سلسلۂ نصابیات علمیہ جامعۂ عثمانیہ

مساواتوں کا نظریہ

جلد دوم

تصنیف

ڈبلیو۔ ایس۔ برنسائڈ۔ ایم۔ اے۔ ڈی۔ ایس۔ سی

و

اے۔ ڈبلیو۔ پینٹن۔ ایم۔ اے۔ ڈی۔ ایس۔ سی

ترجمہ

محمد نذیر الدین ایم۔ اے (عثمانیہ)

رکن دارالترجمہ جامعہ عثمانیہ سرکار عالی

سنہ ۱۳۵۵ھ سنہ ۱۳۴۵ف سنہ ۱۹۳۶ء

از مطبع جامعۂ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن

۷۸۶
۹۲

فہرست مضامین

مساواتوں کا نظریہ

جلد دوم

تیرھواں باب

مقطعات

چودہواں باب

اسقاط

پندرہواں باب

متشاکل تفاعلوں کو محسوب کرنا نیم غیر متغیر اور نیم ہم متغیر

سولھواں باب

ہم متغیر اور غیر متغیر

سترہواں باب

دو درجی، تین درجی اور چار درجی کے ہم متغیر اور غیر متغیر

اٹھارواں باب

مجتمع شکلوں کے ہم متغیر اور غیر متغیر

بیسواں باب

ابدالات اور گروہوں کا نظریہ

فصل اول۔ ابدالات بالعموم

فصل دوم۔ کثیر قیمتی تفاعل اور گروہ

فصل سوم ۔ گیلوا کا محلل

فصل چہارم ۔ مساواتوں کا جبری حل

فصل پنجم ۔ آبل کی مساواتیں

مساواتوں کا نظریہ

جلد دوم

تیرہواں باب (۱)

مقطعات

۱۲۷ — تعریفات — اس باب میں تفاعلوں کی ایک اہم جماعت پر بحث کی جائیگی جو اکثر تحلیل میں پیش آیا کرتے ہیں۔ یہ تفاعل اہم خواص رکھتے ہیں جن کے علم سے نظری اور عملی ریاضیات دونوں کے بہت سے حسابوں میں بڑی آسانی پیدا کیجا سکتی ہے۔

چار مقداروں

ا۱ ب۱
ا۲ ب۲

کا تفاعل ا۱ ب۲ + ا۲ ب۱ اس طور پر حاصل ہوتا ہے:— ا اور ب کو حرفی ترتیب میں لکھ کر اعداد ۱ اور ۲ کی دو ترتیبوں کے جواب میں ان حرفوں کو لاحقے ۱، ۲ اور ۲، ۱ لگادو اور اس طور پر بنے ہوئے دونوں حاصل ضربوں کو جمع کردو۔

اسی طرح نو مقداروں

ا$_1$، ب$_1$، ج$_1$

ا$_2$، ب$_2$، ج$_2$

ا$_3$، ب$_3$، ج$_3$

کا تفاعل ا$_1$ب$_2$ج$_3$ + ا$_1$ب$_3$ج$_2$ + ا$_2$ب$_3$ج$_1$ + ا$_2$ب$_1$ج$_3$

+ ا$_3$ب$_1$ج$_2$ + ا$_3$ب$_2$ج$_1$ .... (۱)

اس طرح پر حاصل ہوتا ہے۔ ا، ب، ج کو حرفی ترتیب ا ب ج میں لکھکر اعداد ۱، ۲، ۳ کی تمام ترتیبوں کے جواب میں ان حرفوں کو (انھیں اسی حرفی ترتیب میں رکھکر) لاحقے لگاؤ اور اس طور پر جیسے ہو سب حاصل ضربوں کو جمع کرو۔ اس پورے جملہ کو (ا ب ج) سے تعبیر کیا جا سکتا ہے یا کوئی اور دوسری ترقیم استعمال کی جا سکتی ہے جس سے تمام رقمیں آسانی کے ساتھ لکھی جا سکیں۔

ترقیم (ا ب ج د) کو ایک ایسے ہی تفاعل کے تعبیر کرنے میں استعمال کیا جا سکتا ہے جو ۱۶ مقداروں ا$_1$، ب$_1$، ج$_1$، د$_1$، ا$_2$، ب$_2$ وغیرہ کی ۲۴ رقموں سے بنتا ہے اور ان تمام رقموں کو آسانی کے ساتھ اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ کی ۲۴ ترتیبوں کی مدد سے لکھ لیا جا سکتا ہے۔ (2)

عام صورت میں اگر ن حروف ا، ب، ج، ..... ل لئے جائیں تو ہم اسی طرح ن کا تفاعل لکھ سکتے ہیں جس میں ن (ن−۱) (ن−۲) ..... ×۳×۲×۱ رقمیں شامل ہونگی یہ تعداد وہی ہے جو ۱، ۲، ۳ ... ن کو آپس میں ترتیب دینے سے حاصل ہوتی ہے۔

اب وہ تفاعل جنکا حوالہ اوپر دیا گیا ہے یعنی جو ریاضیاتی تحلیل میں بکثرت سے واقع ہوتے ہیں متذکرہ بالا تفاعلوں سے صرف ایک بات میں مختلف ہیں یعنے ۱×۲×۳×...×ن (جو ایک جفت تعداد ہے) رقموں میں سے سب کی سب مثبت ہونگی بجائے

(جیسا کہ اوپر کے تفاعلوں میں ہے) رقموں کی نصف تعداد مثبت علامت سے اور نصف تعداد منفی علامت سے متاثر ہوتی ہے۔

اب ہم ایسے تفاعلوں کی چند مثالیں دیتے ہیں جو اس باب میں زیر بحث رہینگے۔ یہ تفاعل اکثر خطی مساواتوں کا حاصل استقاط معلوم کرنے میں نتیجہ کے طور پر حاصل ہوتے ہیں۔ مثلاً مساواتوں

ا$_1$ لا + ب$_1$ ما = ۰ ، ا$_2$ لا + ب$_2$ ما = ۰

سے لا اور ما کو ساقط کیا جائے تو نتیجہ ہوگا

ا$_1$ ب$_2$ − ا$_2$ ب$_1$ = ۰

نیز مساواتوں

ا$_1$ لا + ب$_1$ ما + ج$_1$ ی = ۰

ا$_2$ لا + ب$_2$ ما + ج$_2$ ی = ۰

ا$_3$ لا + ب$_3$ ما + ج$_3$ ی = ۰

سے لا، ما، ی کو ساقط کرنیکا نتیجہ ہوگا

ا$_1$ ب$_2$ ج$_3$ − ا$_1$ ب$_3$ ج$_2$ + ا$_2$ ب$_3$ ج$_1$ − ا$_2$ ب$_1$ ج$_3$ + ا$_3$ ب$_1$ ج$_2$

− ا$_3$ ب$_2$ ج$_1$ = ۰ .... (۲)

چنانچہ اسکی تصدیق آسانی کے ساتھ اِن میں سے دو مساواتوں کو حل کرکے تیسری مساوات میں درج کرنے سے ہوسکتی ہے۔ یہ تفاعل، تفاعل (۱) سے صرف اسقدر فرق رکھتا ہے کہ اس کی سب رقمیں مثبت ہونے کی بجائے تین رقمیں منفی ہیں۔

اسی طرح چار خطی مساواتوں کی صورت میں عمل استقاط سے ایک تفاعل سولہ مقداروں ا$_1$، ب$_1$، ج$_1$، د$_1$، ا$_2$، ب$_2$، وغیرہ کا حاصل ہوتا ہے (3)
جو (ا ب ج د) سے تعبیر شدہ تفاعل سے صرف اسقدر فرق رکھتا ہے کہ اسکی بارہ رقمیں منفی ہیں۔

اس قسم کے جملے جو یہاں بیان کئے گئے مقطعات[1] کہلاتے ہیں۔

[1] دیکھو اس جلد کے آخر میں دیا ہوا نوٹ ۱

وہ ترقیم جو عام طور پر ان کو تعبیر کرنے کے لئے استعمال کیجاتی ہے سب سے پہلے "کوشی" نے جاری کی۔ ان جملوں کو اس طور پر تعبیر کرنے میں بہت سے فائدے ہیں۔ تفاعل میں شامل ہونے والی مقداروں کو دو انتصابی خطوں کے درمیان مربع کی صورت میں ترتیب دیا جاتا ہے مثلاً ترقیم

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix}$$

سے مقطع $\text{ا}_1 \text{ب}_2 - \text{ا}_2 \text{ب}_1$ تعبیر ہوتا ہے۔

اسی طرح مساوات (۲) کی سیدھی طرف کا جملہ ترقیم ذیل سے تعبیر ہوتا ہے:-

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}$$

اور عام صورت میں ن^2 مقداروں ا_1، ب_1، ج_1، ..... ل_1، ا_2، ب_2، وغیرہ کا مقطع ترقیم

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 & \cdots & \text{ل}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 & \cdots & \text{ل}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 & \cdots & \text{ل}_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{ا}_\text{ن} & \text{ب}_\text{ن} & \text{ج}_\text{ن} & \cdots & \text{ل}_\text{ن} \end{vmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots (۳)$$

سے تعبیر ہوگا۔

ان ن حرفوں کو حرفی ترتیب میں لکھ کر اور اعداد ۱، ۲، ۳، ... ن کی

ن (ن − ۱) (ن − ۲) .... ۳ × ۲ × ۱ ترتیبوں کے جواب میں

لاحقے لگا کر مقطع کی سب رقمیں لکھی جا سکتی ہیں۔ پھر نصف رقموں کو مثبت اور نصف رقموں کو منفی علامت دینی چاہئیے۔ اگلے دفعہ میں (۴) وہ قاعدہ دیا جائیگا جس کی رو سے مثبت اور منفی رقموں میں تمیز ہو سکیگی۔

ہم جداگانہ حروف ا۱، ب۱، ج۱، ....، ا۲، .... کو جن سے مقطع ترکیب پاتا ہے اجزائے ترکیبی یا عناصر کہینگے۔ اجزائے ترکیبی کا کوئی افقاً ترتیب دیا ہوا سلسلہ مثلاً ا۱، ب۱، ج۱، ....ل۱ مقطع کی **صف** اور کوئی انتصاباً ترتیب دیا ہوا سلسلہ مثلاً ا۱، ا۲، ا۳، .... ان مقطع کا **ستون** کہلاتا ہے۔ اصطلاح خط بعض اوقات صف یا ستون کو بلا امتیاز ظاہر کرنیکے لئے استعمال کیجائے گی۔

۱۲۸۔ علامتوں سے متعلق قاعدہ۔ دفعہ ماسبق سے یہ ظاہر ہے کہ مقطع کی ہر رقم میں ہر صف سے ایک (اور صرف ایک) جزو ترکیبی شامل ہوگا کیونکہ اس میں تمام حروف شامل ہوتے ہیں۔ نیز اس میں ہر ستون سے ایک (اور صرف ایک) جزو ترکیبی شامل ہوگا کیونکہ ہر رقم کے لاحقے تمام اعداد پر مشتمل ہوتے ہیں۔ اس لئے ہم دفعہ ۱۲۰ کی مربع جدول (۳) کو ایسے تفاعل کی ترکیبی تعبیر سمجھ سکتے ہیں جو عموماً ن (ن-۱) (ن-۲)....۳×۲×۱ رقموں پر مشتمل ہوتی ہے اور جس میں وہ تمام مثبت حاصل ضرب داخل ہوتے ہیں جو ہر صف سے ایک اور صرف ایک جزو ترکیبی اور ہر ستون سے ایک اور صرف ایک جزو ترکیبی سے بن سکتے ہیں۔ اب تفاعل کو مکمل صورت میں پیش کرنیکے لئے صرف یہ معلوم کرنا

باقی ہے کہ کسی مخصوص رقم کو کونسی علامت لگائی جائے۔ اس مقصد
کے لئے ذیل کے دو قاعدوں کی پابندی کرنی پڑیگی:-

(۱) رقم ا ۱ ب ۲ ج ۳ ... ل ن جو اُس وتر کے اجزائے
ترکیبی سے بنتی ہے جو سیدھے طرف کے اوپر کے کونے سے
بائیں طرف کے نچلے کونے تک کھینچا گیا ہے مثبت ہے۔

اس رقم کو ہم صدر یا فائق رقم کہینگے۔ اس میں لاحقے اور حروف
دونوں اپنی قدرتی ترتیب میں واقع ہوتے ہیں اور اس سے کسی
دوسری رقم کی علامت قاعدۂ ذیل سے حاصل ہوتی ہے:-

(۲) کسی دوسری رقم کی علامت مثبت یا منفی ہوگی بموجب
اسکے کہ اس رقم میں صدر رقم کے لاحقوں کی ترتیب کے ساتھ مقابلہ
کرنے پر اسکے لاحقوں میں ترتیب کے انقلابات کی تعداد جفت یا طاق ہو۔

یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ حروف اپنی قدرتی ترتیب میں واقع
ہوتے ہیں اور انقلاب کا واقع ہونا اسوقت کہا جاتا ہے جب
کبھی لاحقوں کے درمیان کوئی اعلیٰ تر عدد اپنے نچلے عدد سے پہلے (5)
واقع ہو۔ مثلاً رقم ا ۳ ب ۴ ج ۱ د ۲ میں چار انقلابات ہیں کیونکہ
عدد ۳، ۱ سے پہلے اور ۲ سے پہلے واقع ہوتا ہے اور عدد ۴، ۱
سے پہلے اور ۲ سے پہلے۔ اسی طرح ا ۳ ب ۲ ج ۵ د ۴ ع ۱ میں
چھ انقلابات شامل ہیں جنہیں طالب علم آسانی کے ساتھ دیکھ سکتا
ہے۔ اس قاعدے کی حسب ذیل ترمیم فائدہ مند ثابت ہوگی:-

متصل لاحقوں کا ایک انتقال (یا باہمی تبادلہ) رقم کی علامت کو بدل دیتا ہے

کیونکہ یہ دیکھنا آسان ہے کہ اس قسم کا کوئی انتقال ایک انقلاب کی زیادتی یا کمی کے مساوی ہے۔ اس عمل سے سلسلے کے کسی دیگر انقلاب میں کوئی فرق پیدا نہیں ہوتا سوائے ایسے انقلاب کے جو دو متصل لاحقوں کے اضافی مقامات پر منحصر ہو جبکہ ان کا ایک دوسرے کے ساتھ مقابلہ کیا جائے۔ اگر عمل انتقال سے قبل یہ لاحقے اپنی قدرتی ترتیب میں ہوں تو ایک انقلاب کا اضافہ ہوتا ہے اور اگر یہ اپنی قدرتی ترتیب میں نہ ہوں تو ایک انقلاب کم ہو جاتا ہے۔ مثلاً ۶۱۷۲۴۳۵ کی ترتیب میں ۲ اور ۷ کو آپس میں بدلنے سے ایک انقلاب کا اضافہ ہوتا ہے چنانچہ انقلابات کی تعداد گیارہ سے بڑھ کر بارہ ہو جاتی ہے۔ اس لئے مقطع میں اس کے متناظر رقم کی علامت – سے + میں بدل جاتی ہے۔

اب دفعہ ۱۲۷ میں جو یہ بیان کیا گیا ہے کہ مقطع میں مثبت اور منفی رقموں کی تعداد مساوی ہوتی ہے درست ہے۔ کیونکہ کسی ایک رقم سے دوسری ایسی رقم اخذ ہو سکتی ہے جو پہلی سے صرف اسقدر فرق رکھے کہ آخری دو لاحقے آپس میں بدلے ہوئے ہوں اور یہی وہ دو ارقام ہیں جن میں پہلے (ن – ۲) لاحقوں کی ترتیب ایک ہی ہے۔ اس لئے تمام رقموں کو ایسے جوڑوں میں ترتیب دیا جا سکتا ہے کہ اگر پہلی مثبت ہو تو دوسری منفی اور اس کے برعکس۔

مثالیں

۱۔ رقم ا۴ ب۳ ج۲ د۵ ع۱ کی علامت ۵ ویں رتبہ کے مقطع میں دریافت کرو۔

سوال یہ ہے کہ ۱۵۲۳۴ میں ترتیب کے لحاظ سے کتنے انقلابات واقع ہوتے ہیں یا کتنی تبدیلیوں سے ۵۴۳۲۱ کو ۱۵۲۳۴ میں بدلا جا سکتا ہے۔

یہاں جب ۳ کو ۲ سے اور پھر ۱ سے بدلا جائے تو وہ پہلے مقام پر آجاتا ہے اور ترتیب ہو جاتی ہے ۵۴۲۱۳ ۔ پھر ۵۴۲۱۳ میں ۴ کو ۲ سے اور پھر ۱ سے بدلا جائے تو ترتیب ۵۲۱۴۳ حاصل ہوتی ہے ۔ ۲ کو ۱ سے بدلنے سے ترتیب ۵۱۲۴۳ ملتی ہے اور بالآخر ۵ کو ۱ سے بدلنے سے مطلوبہ ترتیب ۱۵۲۴۳ حاصل ہو جاتی ہے ۔ پس کل چھ تبدیلیاں کرنی پڑیں اور اس لئے مطلوبہ علامت مثبت ہے ۔

عام طور پر ذیل کا طریقہ استعمال کیا جا سکتا ہے :۔ مطلوبہ ترتیب (6)
میں جو عدد پہلے واقع ہوتا ہے اسکو لو اور قدرتی ترتیب ۱۲۳۴ .... میں اسکو اپنی جگہ سے پہلے مقام تک حرکت دو اور اس طور پر اسکو لانے میں ہر عدد پر سے گذرتے وقت ایک نقل مقام شمار کرتے جاؤ ۔ پھر مطلوبہ ترتیب کا دوسرا عدد لو اور قدرتی ترتیب میں اسکو اپنی جگہ سے دوسرے مقام تک حرکت دو اور علیٰ ہذا القیاس ۔ اگر اس عمل میں مقام کی تبدیلیوں کی تعداد جفت ہو تو علامت مثبت ہے اور اگر طاق ہو تو علامت منفی ہے ۔

۲ ـــ ۷ ویں رتبہ کے مقطع میں رقم $ا_۳\, ب_۷\, ج_۶\, د_۵\, ع_۱\, ف_۴\, گ_۲$ کی علامت کیا ہے ۔

یہاں دو تبدیلیوں سے ۳ پہلے مقام پر آتا ہے ۔ پانچ تبدیلیوں سے ۷ دوسرے مقام پر آتا ہے ۔ پھر چار تبدیلیوں سے ۶ تیسرے مقام پر، پھر تین سے ۵ چوتھے مقام پر، عدد ۱ اپنے مقام پر ہے اور بالآخر ایک تبدیلی ۴ کو چھٹے مقام پر لاتی ہے ۔ اس لئے کل جملہ پندرہ تبدیلیاں ہیں اور مطلوبہ علامت منفی ہے ۔

۳ ــــ مقطع

$$\begin{vmatrix} ا_۱ & ب_۱ & ج_۱ & د_۱ \\ ا_۲ & ب_۲ & ج_۲ & د_۲ \\ ا_۳ & ب_۳ & ج_۳ & د_۳ \\ ا_۴ & ب_۴ & ج_۴ & د_۴ \end{vmatrix}$$

کی سب رقمیں لکھو۔

لاحقوں کی وہ چھ ترتیبیں جنمیں ۱ پہلے مقام پر آتا ہے یہ ہیں
۱۲۳۴، ۱۲۴۳، ۱۳۲۴، ۱۳۴۲، ۱۴۲۳، ۱۴۳۲
ان کے جواب میں چھ ارقام گذشتہ مثالوں کے مطابق یہ ہیں

$ا_1 ب_2 ج_3 د_4 - ا_1 ب_2 ج_4 د_3 + ا_1 ب_3 ج_4 د_2 - ا_1 ب_3 ج_2 د_4$

$+ ا_1 ب_4 ج_2 د_3 - ا_1 ب_4 ج_3 د_2$

جنکو طالب علم آسانی کے ساتھ قانون (۲) استعمال کرکے دیکھ سکتا ہے
باقی اٹھارہ ارقام جو اُن ترتیبوں کے جواب میں ہیں جنمیں ۲، ۳، ۴ علی الترتیب پہلا مقام اختیار کرتے ہیں یہ ہیں

$ا_2 ب_1 ج_3 د_4 - ا_2 ب_1 ج_4 د_3 + ا_2 ب_3 ج_4 د_1 - ا_2 ب_3 ج_1 د_4 + ا_2 ب_4 ج_1 د_3 - ا_2 ب_4 ج_3 د_1$

$+ ا_3 ب_1 ج_2 د_4 - ا_3 ب_1 ج_4 د_2 + ا_3 ب_2 ج_4 د_1 - ا_3 ب_2 ج_1 د_4 + ا_3 ب_4 ج_1 د_2 - ا_3 ب_4 ج_2 د_1$

$+ ا_4 ب_1 ج_2 د_3 - ا_4 ب_1 ج_3 د_2 + ا_4 ب_2 ج_3 د_1 - ا_4 ب_2 ج_1 د_3 + ا_4 ب_3 ج_1 د_2 - ا_4 ب_3 ج_2 د_1$

۴۔ ثابت کرو کہ کسی دو لاحقوں کا باہمی تبادلہ (بشرطیکہ حروف اپنی ترتیب میں ہوں) رقم کی علامت بدل دیتا ہے۔

کیونکہ اگر ان دو عناصر کے درمیان جن کے لاحقے آپس میں بدلے جارہے ہیں م عناصر ہوں تو مجوزہ انتقال متصل لاحقوں کے ۲م + ۱ انتقالوں کے ذریعہ عمل میں آسکتا ہے۔ اس مسئلہ کی مدد سے کسی رقم کی علامت کو ہم مثال (۱) میں بیان کردہ عام طریقہ میں انتقالات کی مطلوبہ تعداد کی بہ نسبت کم تعداد کے ذریعہ دریافت کرسکتے ہیں۔ مثلاً مثال ۲ میں رقم کی علامت معلوم کرنے کے لئے پانچ انتقال کافی ہیں پہلے ا کا ۳ کے ساتھ، پھر علی الترتیب ا کا ۶ کے ساتھ، ا کا ۴ کے ساتھ، ا کا ۵ کے ساتھ

اور بالآخر ۲ کا ۰ کے ساتھ۔ یہ آسانی سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اس مقصد کے لئے انتقالات کی چھوٹی سے چھوٹی تعداد کی تعیین ابدالات کے نظریہ کے ایک ابتدائی مسئلہ پر منحصر ہے۔ (بیسویں باب کے ساتھ مقابلہ کرو۔)

(7) ۵ — ثابت کرو کہ کسی دو حرفوں کا باہمی تبادلہ جبکہ لاحقوں کی ترتیب وہی رہے رقم کی علامت بدل دیتا ہے۔

کیونکہ اگر دو حروف کا باہمی تبادلہ کیا جائے اور پھر متناظر عناصر کو آپس میں بدل دیا جائے تو یہ پورا عمل لاحقوں کے ایک باہمی تبادلے کے مماثل ہے۔ مثلاً اگر $\text{ا}_1\text{ب}_2\text{ج}_3\text{د}_4\text{ع}_5$ میں ب اور ع کو آپس میں بدل دیا جائے تو ہم $\text{ا}_1\text{ع}_2\text{ج}_3\text{د}_4\text{ب}_5$ حاصل کرتے ہیں جو $\text{ا}_1\text{ب}_5\text{ج}_3\text{د}_4\text{ع}_2$ کے مساوی ہے اور یہ دی ہوئی رقم سے لاحقوں ۲ اور ۵ کو آپس میں بدلنے سے حاصل ہوتا ہے۔

۶ — ثابت کرو کہ اگر کوئی دو متصل عدد ایک ساتھ عددوں کی کسی تعداد م پر سے گذارے جائیں تو علامت غیر متغیر رہتی ہے۔

کیونکہ اگر انکو جداگانہ طور پر حرکت دیجائے تو کل عمل ۲ م عددوں پر سے حرکت دینے کے مماثل ہے۔

۷ — ن ویں درجہ کے مقطع میں دوسری قطری رقم $\text{ا}_{\text{ن}}\text{ب}_{\text{ن}-1}\text{ج}_{\text{ن}-2}$ ... $\text{ک}_2\text{ل}_1$ کی علامت معلوم کرو۔

اس صورت میں ترتیب کے انقلابات کی تعداد آسانی کے ساتھ معلوم ہوتی ہے

$$(\text{ن}-1)+(\text{ن}-2)+(\text{ن}-3)+\dots+2+1=\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2}$$

اس لئے مطلوبہ علامت ہے $(-1)^{\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2}}$

۱۲۹ — اس دفعہ اور دفعات آئندہ کے مسئلوں میں مقطعات کے اہم ترین ابتدائی خواص شامل ہیں جو متذکرہ بالا کوشی کی ترقیم کی مدد سے، ان تفاعلوں کو استعمال کرنے میں بہت زیادہ عملی فائدہ پہنچاتے ہیں۔

مسئلہ ا ۔ اگر مقطع کے کسی دو صفوں یا کسی دو ستونوں کو آپس میں بدل دیا جائے تو مقطع کی علامت بدلجاتی ہے۔

یہ مقطع کو بنانے کے طریقہ سے فوراً اخذ ہو سکتا ہے (دیکھو قاعدہ (۲) دفعہ ۱۲۸) کیونکہ دو صفوں کا باہمی تبادلہ ایسا ہی ہے جیسے دو لاحقوں کا باہمی تبادلہ اور دو ستونوں کا باہمی تبادلہ ایسا ہی ہے جیسے دو حرفوں کا باہمی تبادلہ۔ پس ہر صورت میں مقطع کے ہر رقم کی علامت بدلجاتی ہے (دیکھو امثلہ ۴ اور ۵ دفعہ ۱۲۸)۔

اس مسئلہ کی مدد سے کسی رقم کی علامت حاصل کرنیکا قاعدہ ایسی شکل میں بیان ہو سکتا ہے جو عموماً عملی مقاصد کے لئے اوپر بیان کی ہوئی شکل کی نسبت زیادہ سہولت بخش ہے۔

یہ فوراً دیکھ لیا جا سکتا ہے کہ عمل کا وہ عام طریقہ جو مثال ۱ دفعہ ۱۲۸ میں واضح کیا گیا ہے ذیل کے مماثل ہے:—

(8) **صفوں (یا ستونوں) کو حرکت دیکر رقم (جسکی علامت مطلوب ہے) کے اجزاء کو صدر وتر کے محل میں لاؤ تو رقم کی علامت مثبت یا منفی ہوگی بموجب اس کے کہ ہٹاؤں کی تعداد جفت یا طاق ہو۔**

مثال

مقطع

ا	ب	ج	لا
عہ	بہ	جہ	ما
ل	م	نِ	ی
لہ	مہ	نہ	ہ

پس رقم لہ بہ ن لا کی علامت کیا ہے؟

یہاں چوتھی صف کو تین صفوں پر سے (یعنے تین ہٹاؤں سے) حرکت دیجائے تو لہ پہلے مقام پر آجاتا ہے۔ ابتدائی دوسری صف کا ایک اوپر وار ہٹاؤ وتری رقم میں بہ کو مطلوبہ محل میں لے آتا ہے۔ اور پھر ابتدائی تیسری صف کا ایک مزید اوپر وار ہٹاؤ مطلوبہ ترتیب پیدا کر دیتا ہے چنانچہ رقم لہ بہ ن لا وتری محل میں آجاتی ہے۔ اب چونکہ ہٹاؤں کی تعداد طاق ہے اس لئے مطلوبہ علامت منفی ہے۔

۱۳۰۔ مسئلہ ۲۔ جب کبھی کسی مقطع میں دو صف یا دو ستون متماثل ہوں تو مقطع معدوم ہو جاتا ہے۔

کیونکہ مسئلہ ا کی رو سے ان دو خطوں کے باہمی تبادلہ سے مقطع ∆ کی علامت بدلنی چاہیئے لیکن دو متماثل صفوں یا ستونوں کا باہمی تبادلہ کسی طور پر بھی مقطع کو بدل نہیں سکتا۔ پس ∆ = -∆ یعنی ∆ = ۰

۱۳۱۔ مسئلہ ۳۔ مقطع کی قیمت نہیں بدلتی اگر صفوں کو ستونوں کی طرح اور ستونوں کو صفوں کی طرح لکھا جائے۔

کیونکہ دونوں صورتوں میں ہر صف سے ایک جزو ترکیبی اور ہر ستون سے ایک جزو ترکیبی لینے سے تمام ارقام پیدا ہوتی ہیں اور ظاہر ہے کہ دونوں صورتوں میں ایسی سب رقمیں قیمت میں

وہی ہونگی چنانچہ صدر رقم تماثلاً وہی ہوتی ہے اور (مسئلہ ۱ کی رو سے) کسی دوسری رقم کی علامت متعین کرنے میں اسکو صدر وتر کے محل میں لانے کے لئے پہلی صورت میں صفوں کے ہٹاوں کی جتنی تعداد درکار ہوتی ہے دوسری صورت میں بھی ستونوں کے ہٹاو کی اتنی ہی تعداد درکار ہے۔

مثال

(9)

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \underline{\text{ج}_1} & \text{د}_1 \\ \underline{\text{ا}_2} & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 & \text{د}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 & \underline{\text{د}_3} \\ \text{ا}_4 & \underline{\text{ب}_4} & \text{ج}_4 & \text{د}_4 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \underline{\text{ا}_2} & \text{ا}_3 & \text{ا}_4 \\ \text{ب}_1 & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 & \underline{\text{ب}_4} \\ \underline{\text{ج}_1} & \text{ج}_2 & \text{ج}_3 & \text{ج}_4 \\ \text{د}_1 & \text{د}_2 & \underline{\text{د}_3} & \text{د}_4 \end{vmatrix}$$

یہاں کسی رقم $\text{ا}_2\ \text{ب}_4\ \text{ج}_1\ \text{د}_3$ کی علامت دونوں مقطعوں میں وہی ہے۔ کیونکہ پہلے مقطع میں صفوں کے تین ہٹاوں سے یہ رقم صدر محل میں آجاتی ہے اور دوسرے مقطع میں ستونوں کے ہٹاوں کی اتنی ہی تعداد ان عناصر کو صدر محل میں لانیکے لئے درکار ہے

۱۳۲ — مسئلہ ۴۔ اگر کسی خط کے ہر عنصر کو ایک ہی جزو ضربی سے ضرب دیں تو مقطع اس جزو ضربی سے ضرب کھا جاتا ہے۔

کیونکہ مقطع کی ہر رقم میں کسی صف یا کسی ستون سے ایک اور صرف ایک عنصر شامل ہونا چاہئے۔

نتیجۂ صریح ۱۔ اگر کسی خط کے عناصر کسی دوسرے متوازی خط کے عناصر سے بقدر ایک ہی جزو ضربی کے مختلف ہوں تو مقطع معدوم ہو جاتا ہے۔

نتیجۂ صریح ۲۔ اگر کسی خط کے تمام عنصروں کی علامتیں بدل دی جائیں تو مقطع کی علامت بدل جاتی ہے۔ کیونکہ یہ بات جزو ضربی -۱ سے ضرب دینے کے مماثل ہے۔

مثالیں

۱۔
$$\begin{vmatrix} \text{ک}\,\text{ا}_{۱} & \text{ب}_{۱} & \text{ج}_{۱} \\ \text{ک}\,\text{ا}_{۲} & \text{ب}_{۲} & \text{ج}_{۲} \\ \text{ک}\,\text{ا}_{۳} & \text{ب}_{۳} & \text{ج}_{۳} \end{vmatrix} \equiv \text{ک} \begin{vmatrix} \text{ا}_{۱} & \text{ب}_{۱} & \text{ج}_{۱} \\ \text{ا}_{۲} & \text{ب}_{۲} & \text{ج}_{۲} \\ \text{ا}_{۳} & \text{ب}_{۳} & \text{ج}_{۳} \end{vmatrix}$$

۲۔
$$\begin{vmatrix} \text{عہ}_{۱} & \text{م}\,\text{عہ}_{۱} & \text{عہ}_{۲} \\ \text{بہ}_{۱} & \text{م}\,\text{بہ}_{۱} & \text{بہ}_{۲} \\ \text{جہ}_{۱} & \text{م}\,\text{جہ}_{۱} & \text{جہ}_{۲} \end{vmatrix} \equiv \text{م} \begin{vmatrix} \text{عہ}_{۱} & \text{عہ}_{۱} & \text{عہ}_{۲} \\ \text{بہ}_{۱} & \text{بہ}_{۱} & \text{بہ}_{۲} \\ \text{جہ}_{۱} & \text{جہ}_{۱} & \text{جہ}_{۲} \end{vmatrix} \equiv ۰$$

۳۔ ثابت کرو کہ ذیل کا مقطع معدوم ہو جاتا ہے:۔ (10)

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۱ & ۵ & ۲ \\ ۲ & ۵ & ۷ & ۳ \\ ۸ & ۹ & ۱ & ۴ \\ ۶ & ۱۵ & ۲۱ & ۹ \end{vmatrix}$$

۴۔ متماثلہ ذیل ثابت کرو۔

$$\begin{vmatrix} \text{ب}\,\text{ج} & \text{ا} & \text{ا}^{۲} \\ \text{ج}\,\text{ا} & \text{ب} & \text{ب}^{۲} \\ \text{ا}\,\text{ب} & \text{ج} & \text{ج}^{۲} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} ۱ & \text{ا}^{۲} & \text{ا}^{۳} \\ ۱ & \text{ب}^{۲} & \text{ب}^{۳} \\ ۱ & \text{ج}^{۲} & \text{ج}^{۳} \end{vmatrix}$$

پہلے مقطع کو Δ سے تعبیر کرو اور اسکی صفوں کو علی الترتیب ا، ب، ج سے ضرب دو تو

$$\Delta\,\text{ا ب ج} = \begin{vmatrix} \text{ا ب ج} & \text{ا}^2 & \text{ا}^3 \\ \text{ا ب ج} & \text{ب}^2 & \text{ب}^3 \\ \text{ا ب ج} & \text{ج}^2 & \text{ج}^3 \end{vmatrix}$$

اب اسکو ا ب ج سے تقسیم کرو تو نتیجہ نکل آئیگا۔

۵۔ ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} \text{بہ جہ ضہ} & \text{عہ} & \text{عہ}^2 & \text{عہ}^3 \\ \text{جہ ضہ عہ} & \text{بہ} & \text{بہ}^2 & \text{بہ}^3 \\ \text{ضہ عہ بہ} & \text{جہ} & \text{جہ}^2 & \text{جہ}^3 \\ \text{عہ بہ جہ} & \text{ضہ} & \text{ضہ}^2 & \text{ضہ}^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \text{عہ}^2 & \text{عہ}^3 & \text{عہ}^4 \\ 1 & \text{بہ}^2 & \text{بہ}^3 & \text{بہ}^4 \\ 1 & \text{جہ}^2 & \text{جہ}^3 & \text{جہ}^4 \\ 1 & \text{ضہ}^2 & \text{ضہ}^3 & \text{ضہ}^4 \end{vmatrix}$$

۶۔ ثابت کرو

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -7 \\ -4 & -3 & 8 \\ 6 & 5 & -9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

دوسرے صف کی تمام علامتیں بدلو اور پھر تیسرے ستون کی۔

۷۔ ثابت کرو

$$\begin{vmatrix} \text{عہ} & \text{بہ} & \text{جہ} \\ \text{عہ}' & \text{بہ}' & \text{جہ}' \\ \text{عہ}'' & \text{بہ}'' & \text{جہ}'' \end{vmatrix} = \frac{1}{\text{عہ بہ جہ}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{عہ}'\,\text{بہ جہ} & \text{بہ}'\,\text{جہ عہ} & \text{جہ}'\,\text{عہ بہ} \\ \text{عہ}''\,\text{بہ جہ} & \text{بہ}''\,\text{جہ عہ} & \text{جہ}''\,\text{عہ بہ} \end{vmatrix}$$

پہلے مقطع کے ستونوں کو علی الترتیب بہ جہ، جہ عہ، عہ بہ سے ضرب دو اور پھر پہلی صف کو عہ بہ جہ سے تقسیم کرو۔

یہ ظاہر ہے کہ اسی طرح کے عمل سے کسی مقطع کو ایسے مقطع میں تحویل کیا جا سکتا ہے جس میں کسی خاص صف یا ستون کے عناصر اکائیاں ہوں۔

۸ — مقطع ذیل کو ایسے مقطع میں تحویل کرو جسمیں پہلی صف کے عناصر اکائیاں ہوں :— (11)

$$\begin{vmatrix} 10 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} \equiv \Delta$$

یہاں چونکہ ۴، ۲، ۵، ۱۰ کا ذو اضعاف اقل ۲۰ ہے ستونوں کو ترتیب وار ۵، ۱۰، ۴، ۲ سے ضرب دینا کافی ہے۔ چنانچہ ہمیں اس طور پر حاصل ہوتا ہے

$$\begin{vmatrix} 20 & 20 & 20 & 20 \\ 6 & 24 & 10 & 5 \\ 10 & 0 & 30 & 35 \\ 16 & 20 & 30 & 0 \end{vmatrix} \frac{1}{2\times 4\times 10\times 5} \equiv \Delta$$

اب پہلی صف سے جزو ضربی ۲۰، تیسری صف سے ۵، اور چوتھی صف سے ۴ نکالنے سے بالآخر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 24 & 10 & 5 \\ 2 & 0 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 5 & 0 \end{vmatrix} \equiv \Delta$$

۹— ثابت کرو

$$(\text{ب} - \text{ج})(\text{ج} - \text{ع})(\text{ع} - \text{ب}) \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{ج} & \text{ب} & \text{ع} \\ \text{ج}^2 & \text{ب}^2 & \text{ع}^2 \end{vmatrix}$$

اگر ب، ج کے مساوی ہوتا تو دو ستون متماثل ہو جاتے اس لئے مقطع میں (ب − ج) ایک جزو ضربی ہونا چاہئے۔ اسی طرح (ج − ع)

اور (عہ - بہ) بھی اجزائے ضربی ہونے چاہئیں۔ پس ان تین فرقوں کا حاصل ضرب مقطع کی قیمت سے صرف اس طور پر مختلف ہوسکتا ہے کہ اسکا ایک جزو ضربی عددی ہو کیونکہ دونوں تفاعل عہ، بہ، جہ میں تیسرے درجہ کے ہیں۔ رقم بہ جہ² کا مقابلہ کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ جزو ضربی + ۱ ہے۔

۱۰۔ اسی طرح متماثلہ ذیل ثابت کرو:۔

$$(\text{جہ} - \text{عہ})(\text{عہ} - \text{ضہ})(\text{بہ} - \text{جہ}) - \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \text{ضہ} & \text{جہ} & \text{بہ} & \text{عہ} \\ \text{ضہ}^2 & \text{جہ}^2 & \text{بہ}^2 & \text{عہ}^2 \\ \text{ضہ}^3 & \text{جہ}^3 & \text{بہ}^3 & \text{عہ}^3 \end{vmatrix}$$
$$(\text{جہ} - \text{ضہ})(\text{عہ} - \text{بہ})(\text{بہ} - \text{ضہ})$$

یہ ظاہر ہے کہ عام صورت میں اسی طرح کے ثبوت سے ن مقداروں عہ، بہ، جہ،... لہ کا اس نمونہ کا مقطع قیمت میں $\frac{1}{2}$ ن (ن - ۱) فرقوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے جو ان ن مقداروں سے بن سکتے ہیں۔

(12) **۱۳۳۔ صغیر مقطعات۔ تعریفات۔** جب کسی مقطع سے صفوں کی کوئی تعداد اور ستونوں کی اتنی ہی تعداد نکال لیجاتی ہے تو وہ مقطع جو باقی عناصر سے (انکو اضافی مقامات پر بحال رکھکر) بنایا جاتا ہے **صغیر مقطع** کہلاتا ہے۔

اگر ایک صف اور ایک ستون نکال لئے جائیں تو اس کے جواب میں جو صغیر مقطع حاصل ہوگا اس کو ہم پہلا صغیر کہینگے۔ اگر دو صف اور دو ستون نکالے جائیں تو ایسے صغیر مقطع کو ہم دوسرا صغیر کہینگے اور وقس علیٰ ہذا۔ نکالی ہوئی صفوں اور ستونوں میں چند مشترک عناصر ہوتے ہیں جن سے ایک مقطع بنتا ہے ان کو نکال لینے سے جو صغیر مقطع باقی رہ جاتا ہے اسکو ہم اس مقطع کا متمم کہینگے۔ چنانچہ

اُس صغیر مقطع کو جو صدر عنصر ا_1 کا تکملی ہے صدر پہلا صغیر کہتے ہیں اور پھر اسکا صدر پہلا صغیر ابتدائی مقطع کا صدر دوسرا صغیر ہے۔

مقطع کو عموماً ہم Δ سے تعبیر کرینگے۔ $\Delta_{\text{ع}}$ سے وہ پہلا صغیر تعبیر ہوگا جو Δ میں سے وہ صف اور وہ ستون نکالنے سے بنتا ہے جنہیں عنصر ع شامل ہے۔ $\Delta_{\text{ع،ب}}$ سے وہ دوسرا صغیر تعبیر ہوگا جو اُن دو صفوں اور دو ستونوں کو نکالنے سے پیدا ہوتا ہے جنمیں ع اور ب شامل ہیں اور علیٰ ہذا القیاس۔ چنانچہ $\Delta_{\text{ا}_1}$ سے صدر پہلا صغیر اور $\Delta_{\text{ا}_1\text{،ب}_2}$ سے صدر دوسرا صغیر تعبیر ہوتے ہیں۔

مقطع Δ کو جو عناصر ا_1، ب_1، ج_1 وغیرہ سے بنتا ہے اختصاراً کی خاطر صدر رقم کو خطوط وحدانی میں رکھکر اکثر تعبیر کیا جائیگا مثلاً

$$\Delta \equiv (\text{ا}_1 \; \text{ب}_2 \; \text{ج}_3 \ldots \text{ل}_{\text{ن}})$$

Δ کو تعبیر کرنے میں ترقیم $\Sigma \pm \text{ا}_1 \; \text{ب}_2 \; \text{ج}_3 \ldots \text{ل}_{\text{ن}}$ بھی استعمال کیجائیگی جسکا مطلب یہ ہے کہ ن لاحقوں سے جتنی ترتیبیں ملسکتی ہیں ان کو لیکر ارقام (انکو صحیح علامتیں لگاکر) بنائی جائیں تو انکا مجموعہ اس ترقیم سے تعبیر ہوتا ہے۔

۱۳۴ ـ **مقطعات کا پھیلاؤ** ـ کسی مقطع کی ہر رقم میں چونکہ ہر صف میں سے اور ہر ستون میں سے ایک اور صرف ایک عنصر شامل ہوتا ہے اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ Δ **کسی ایک صف یا کسی**

ایک ستون کے عناصر کا ایک خطی اور متجانس تفاعل ہے۔

اس لئے ہم لکھ سکتے ہیں

$$\Delta = ل_1 ا_1 + ل_2 ا_2 + ل_3 ا_3 + \cdots\cdots \qquad (13)$$

$$\Delta = ب_1 ب_1 + ب_2 ب_2 + ب_3 ب_3 + \cdots\cdots$$

اور نیز $\Delta = ا_1 ا_1 + ب_1 ب_1 + ج_1 ج_1 + \cdots\cdots$

$$\Delta = ا_2 ا_2 + ب_2 ب_2 + ج_2 ج_2 + \cdots\cdots$$

دفعہ ۱۲۸ مثال ۳ پر غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ چوتھے رتبہ کا جو مقطع وہاں پھیلا کر لکھا گیا ہے وہ ذیل میں درج کردہ طریقہ سے بنا ہے :-

$$\Delta = ا_1 \begin{vmatrix} ب_2 & ج_2 & د_2 \\ ب_3 & ج_3 & د_3 \\ ب_4 & ج_4 & د_4 \end{vmatrix} + ا_2 \begin{vmatrix} ب_1 & ج_1 & د_1 \\ ب_3 & ج_3 & د_3 \\ ب_4 & ج_4 & د_4 \end{vmatrix} + ا_3 \begin{vmatrix} ب_1 & ج_1 & د_1 \\ ب_2 & ج_2 & د_2 \\ ب_4 & ج_4 & د_4 \end{vmatrix} + ا_4 \begin{vmatrix} ب_1 & ج_1 & د_1 \\ ب_2 & ج_2 & د_2 \\ ب_3 & ج_3 & د_3 \end{vmatrix}$$

اب ہم یہ بتائینگے کہ عام صورت میں Δ کو شکل

$$\Delta = ل_1 ا_1 + ل_2 ا_2 + ل_3 ا_3 + \cdots + ل_ن ا_ن$$

میں لکھنے سے سر $ا_1$، $ا_2$، $ا_3$ وغیرہ ن - ۱ رتبہ کے مقطعات ہیں۔

لاحقوں ۱، ۲، ۳، ... ، ن کی تمام ترتیبیں معلوم کرنے میں

پہلے فرض کرو کہ $ا_۱$ صدر مقام پر رہتا ہے جیسا کہ متذکرہ بالا مثال میں کیا گیا ہے۔ تب ہمیں ۱×۲×۳×....×ن رقمیں ملینگی جن میں $ا_۱$ جزو ضربی کے طور پر شامل ہوگا اور اس لئے

$$ا_۱ ا'_۱ = ا_۱ \Sigma \pm ب_۲ ج_۳ \cdots ل_ن$$

پس

$$ا'_۱ = \Sigma \pm ب_۲ ج_۳ \cdots ل_ن = \begin{vmatrix} ب_۲ & ج_۲ & \cdots & ل_۲ \\ ب_۳ & ج_۳ & \cdots & ل_۳ \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ب_ن & ج_ن & & ل_ن \end{vmatrix}$$

اور یہ مقطع وہ صغیرہ ہے جو عنصر $ا_۱$ کے جواب میں حاصل ہوتا ہے۔ یعنی $ا'_۱ = \Delta_{ا_۱}$

$ا'_۲$ کی قیمت معلوم کرنے میں ہم $ا_۲$ کو صفوف کے ایک ہٹاؤ سے صدر مقام پر لاتے ہیں۔ اس سے Δ کی علامت بدلجاتی ہے اور اسلئے ہمیں حاصل ہوتا ہے $ا'_۲ = -\Delta_{ا_۲}$ یعنی $ا'_۲$ = اُس صغیرہ کے جو بہ تبدیل علامت $ا_۲$ کے جواب میں ہے۔
پھر دو ہٹاؤں سے $ا_۳$ کو صدری مقام پر لانے سے $ا'_۳ = \Delta_{ا_۳}$

اور علیٰ ہذا۔

پس ہم عام صورت میں یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ (14)

$$\Delta = ا_۱ \Delta_{ا_۱} - ا_۲ \Delta_{ا_۲} + ا_۳ \Delta_{ا_۳} - ا_۴ \Delta_{ا_۴} + \cdots$$

اسی طرح ہم Δ کو کسی دوسرے ستون یا کسی صف کے

عناصر کی رقوم میں پھیلا سکتے ہیں ۔ مثلاً

$$\Delta = \text{ا}_{۱}\,\Delta_{\text{ا}_{۱}} - \text{ب}_{۱}\,\Delta_{\text{ب}_{۱}} + \text{ج}_{۱}\,\Delta_{\text{ج}_{۱}} - \ldots\ldots$$

اگر ہم اس صغیر کی ٹھیک علامت معلوم کرنا چاہیں جو مقطع کے کسی جزو ترکیبی کے ساتھ مقطع کے پھیلاؤ میں ضرب کھاتا ہے تو ہمیں صرف یہ غور کرنا ہوگا کہ کتنے ہٹاؤں سے یہ جزو ترکیبی صدر مقام پر آجائیگا ۔ مثلاً فرض کرو کہ مقطع (ا۱ ب۲ ج۳ د۴ ع۵) کو چوتھے ستون کی رقوم میں پھیلایا گیا ہے اور یہ معلوم کرنا ہے کہ ج۳ $\Delta_{\text{د}_{۴}}$ کو کونسی علامت لگانی چاہئے ۔ یہاں اوپر وار دو ہٹاؤں اور بعد میں دائیں جانب تین ہٹاؤں سے د۴ صدر مقام پر آجائیگا ۔ پس مطلوبہ علامت منفی ہے ۔ اس قاعدے کو سادہ طور پر یوں بیان کیا جاسکتا ہے ۔ اسے نکلکر پہلی صف پر زیر بحث جزو ترکیبی تک چلو اور پھر اس ستون سے نیچے اترو جس میں یہ جزو ترکیبی ہے تو اس جزو پر پہنچنے سے پہلے جتنے حروف پر سے گذرنا پڑیگا انکی تعداد سے صغیر کی علامت کا تصفیہ ہوگا ۔ متذکرہ بالا مثال میں ہم ا۱ ، ب۱ ، ج۱ ، د۱ ، د۲ کل پانچ شمار کرتے ہیں اور یہ عدد طاق ہونے کی وجہ سے مطلوبہ علامت منفی لیتے ہیں

مقطع کے پھیلاؤ کے لئے متذکرہ صدر دونوں ترتیبوں کو برقرار رکھنا سہولت کا باعث ہوگا مقطع کو صغائر کی رقوم میں ان کو

باری باری سے مثبت اور منفی علامتیں لگا کر پھیلانا اسوقت مفید ہے جبکہ مقطع کی قیمت کو نچلے درجہ کے مقطعوں میں متواتر تحویل کر کے محسوب کرنا مطلوب ہو۔ لیکن بعض دیگر مقاصد کے لئے جیسا کہ دفعات آئندہ میں معلوم ہوگا قبل الذکر ترقیم کا استعمال کرنا زیادہ سہولت بخش ہوتا ہے جس میں علامتیں سب کی سب مثبت ہوتی ہیں (خواہ کوئی صف یا ستون زیر بحث ہو) اور کسی جزو ترکیبی کا سر (یا اس کے ساتھ کا جزو ضربی) متناظر بڑے حرف سے تعبیر ہوتا ہے۔ اس بڑے حرف کی بجائے متناظر صغیر مقطع اسکی ٹھیک علامت کے ساتھ مندرج کیا جائے (جس کو معلوم کرنے کا طریقہ اوپر بیان کر دیا گیا ہے) تو بعد الذکر ترقیم قبل الذکر میں بدل جاتی ہے۔

مثالیں (15)

۱۔

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} = \text{ا}_1 \begin{vmatrix} \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} - \text{ا}_2 \begin{vmatrix} \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} + \text{ا}_3 \begin{vmatrix} \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \end{vmatrix}$$

$$= \text{ا}_1\text{ب}_2\text{ج}_3 - \text{ا}_1\text{ب}_3\text{ج}_2 - \text{ا}_2\text{ب}_1\text{ج}_3 + \text{ا}_2\text{ب}_3\text{ج}_1 + \text{ا}_3\text{ب}_1\text{ج}_2 - \text{ا}_3\text{ب}_2\text{ج}_1$$

(دفعہ ۱۲، (۲) کے ساتھ مقابلہ کرو)

۲۔

$$\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ھ} & \text{گ} \\ \text{ھ} & \text{ب} & \text{ف} \\ \text{گ} & \text{ف} & \text{ج} \end{vmatrix} = \text{ا} \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ف} \\ \text{ف} & \text{ج} \end{vmatrix} - \text{ھ} \begin{vmatrix} \text{ھ} & \text{گ} \\ \text{ف} & \text{ج} \end{vmatrix} + \text{گ} \begin{vmatrix} \text{ھ} & \text{گ} \\ \text{ب} & \text{ف} \end{vmatrix}$$

$$= \text{ا}\,\text{ب}\,\text{ج} + 2\,\text{ف}\,\text{گ}\,\text{ھ} - \text{ا}\,\text{ف}^2 - \text{ب}\,\text{گ}^2 - \text{ج}\,\text{ھ}^2$$

۳۔ چوتھے رتبہ کے مقطع کو چوتھی صف کے عناصر کی رقوم میں پھیلاؤ۔

$$\Delta = -\text{ا}_4 \Delta_{\text{ا}_4} + \text{ب}_4 \Delta_{\text{ب}_4} - \text{ج}_4 \Delta_{\text{ج}_4} + \text{د}_4 \Delta_{\text{د}_4}$$

$$= -\text{ا}_{۴}\begin{vmatrix} \text{ب}_{۱} & \text{ج}_{۱} & \text{د}_{۱} \\ \text{ب}_{۲} & \text{ج}_{۲} & \text{د}_{۲} \\ \text{ب}_{۳} & \text{ج}_{۳} & \text{د}_{۳} \end{vmatrix} + \text{ب}_{۴}\begin{vmatrix} \text{ا}_{۱} & \text{ج}_{۱} & \text{د}_{۱} \\ \text{ا}_{۲} & \text{ج}_{۲} & \text{د}_{۲} \\ \text{ا}_{۳} & \text{ج}_{۳} & \text{د}_{۳} \end{vmatrix} - \text{ج}_{۴}\begin{vmatrix} \text{ا}_{۱} & \text{ب}_{۱} & \text{د}_{۱} \\ \text{ا}_{۲} & \text{ب}_{۲} & \text{د}_{۲} \\ \text{ا}_{۳} & \text{ب}_{۳} & \text{د}_{۳} \end{vmatrix} + \text{د}_{۴}\begin{vmatrix} \text{ا}_{۱} & \text{ب}_{۱} & \text{ج}_{۱} \\ \text{ا}_{۲} & \text{ب}_{۲} & \text{ج}_{۲} \\ \text{ا}_{۳} & \text{ب}_{۳} & \text{ج}_{۳} \end{vmatrix}$$

جب تیسرے رتبہ کے مقطعات کو پھیلایا جاتا ہے تو دفعہ ۲۸ : مثال ۳ کا جملہ حاصل ہوگا۔ طالب علم اسکی تصدیق آسانی کے ساتھ کرسکتا ہے۔

۴ —

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۲ & ۴ \\ ۷ & ۶ & ۱ \\ ۵ & ۳ & ۸ \end{vmatrix} = ۳\begin{vmatrix} ۶ & ۱ \\ ۳ & ۸ \end{vmatrix} - ۷\begin{vmatrix} ۲ & ۴ \\ ۳ & ۸ \end{vmatrix} + ۵\begin{vmatrix} ۲ & ۴ \\ ۶ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$= ۳(۴۸ - ۳) - ۷(۱۶ - ۱۲) + ۵(۲ - ۲۴)$$

$$= -۳$$

۵ — مقطع ذیل کی قیمت معلوم کرو :—

$$\Delta = \begin{vmatrix} ۸ & ۷ & ۲ & ۲۰ \\ ۳ & ۱ & ۴ & ۷ \\ ۵ & ۰ & ۱۱ & ۰ \\ ۸ & ۱ & ۰ & ۶ \end{vmatrix}$$

تیسری صف کی رقوم میں پھیلانے سے چونکہ اس میں دو عناصر صفر ہیں ہم بغیر دقت کے حاصل کرتے ہیں

$$\Delta = ۵\begin{vmatrix} ۷ & ۲ & ۲۰ \\ ۱ & ۴ & ۷ \\ ۱ & ۰ & ۶ \end{vmatrix} + ۱۱\begin{vmatrix} ۸ & ۷ & ۲۰ \\ ۳ & ۱ & ۷ \\ ۸ & ۱ & ۶ \end{vmatrix}$$

اور تیسرے رتبہ کے ان دو مقطعوں کو پھیلانے سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ $\Delta = ۲۱۸۸$

۶ — پھیلاؤ

$$\begin{vmatrix} ۰ & \text{ج} & \text{ب} & \text{د} \\ \text{ج} & ۰ & \text{ا} & \text{ع} \\ \text{ب} & \text{ا} & ۰ & \text{ف} \\ \text{د} & \text{ع} & \text{ف} & ۰ \end{vmatrix}$$

پھیلاؤ ہے

$$\text{ا}^۲\text{د}^۲ + \text{ب}^۲\text{ع}^۲ + \text{ج}^۲\text{ف}^۲ - ۲\,\text{ب ج ع ف} - ۲\,\text{ج ا ف د} - ۲\,\text{ا ب د ع}$$

اسلئے دیا ہوا مقطع مندرجۂ ذیل چار اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کے مساوی ہے

$$\sqrt{\text{ا د}} + \sqrt{\text{ب ع}} + \sqrt{\text{ج ف}}\,،\quad \sqrt{\text{ا د}} - \sqrt{\text{ب ع}} - \sqrt{\text{ج ف}}$$

$$-\sqrt{\text{ا د}} + \sqrt{\text{ب ع}} - \sqrt{\text{ج ف}}\,،\quad -\sqrt{\text{ا د}} - \sqrt{\text{ب ع}} + \sqrt{\text{ج ف}}$$

یہ نتیجہ بعض اوقات مفید ثابت ہوتا ہے۔

۷ ــ ثابت کرو

$$\begin{vmatrix} ۱ & \text{عہ} & \text{بہ} & \text{جہ} \\ -\text{عہ} & ۱ & \bar{\text{جہ}} & -\bar{\text{بہ}} \\ -\text{بہ} & -\bar{\text{جہ}} & ۱ & \bar{\text{عہ}} \\ -\text{جہ} & \bar{\text{بہ}} & -\bar{\text{عہ}} & ۱ \end{vmatrix} = ۱ + \text{عہ}^۲ + \text{بہ}^۲ + \text{جہ}^۲ + \bar{\text{عہ}}^۲ + \bar{\text{بہ}}^۲ + \bar{\text{جہ}}^۲ + (\text{عہ}\bar{\text{عہ}} + \text{بہ}\bar{\text{بہ}} + \text{جہ}\bar{\text{جہ}})^۲$$

۸ ــ پھیلاؤ

$$\begin{vmatrix} -\text{ا} & \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \\ \text{ب} & -\text{ا} & \text{د} & \text{ج} \\ \text{ج} & \text{د} & -\text{ا} & \text{ب} \\ \text{د} & \text{ج} & \text{ب} & -\text{ا} \end{vmatrix}$$

جواب:- $\text{ا}^۴ + \text{ب}^۴ + \text{ج}^۴ + \text{د}^۴ - ۲\,\text{ب}^۲\text{ج}^۲ - ۲\,\text{ج}^۲\text{ا}^۲ - ۲\,\text{ا}^۲\text{ب}^۲ - ۲\,\text{ا}^۲\text{د}^۲ - ۲\,\text{ب}^۲\text{د}^۲ - ۲\,\text{ج}^۲\text{د}^۲ - ۸\,\text{ا ب ج د}$

۹ — مندرجۂ ذیل متماثلہ ثابت کرو اور مقطعوں کو پھیلاؤ:—

۰	۱	۱	۱			۰	لا	ما	ی
۱	۰	ی^2	ما^2	≡		لا	۰	ی	ما
۱	ی^2	۰	لا^2			ما	ی	۰	لا
۱	ما^2	لا^2	۰			ی	ما	لا	۰

جواب:— لا^4 + ما^4 + ی^4 − ۲ ما^2 ی^2 − ۲ ی^2 لا^2 − ۲ لا^2 ما^2

۱۰ — ذیل کے مقطع کی قیمت معلوم کرو:—

	ا	ھ	گ	ل
Δ ≡	ھ	ب	ف	م
	گ	ف	ج	ن
	ل	م	ن	۰

اول آخری صف یا آخری ستون کی رقوم میں پھیلاؤ اور پھر ہر تیسرے رتبہ کے مقطع کو ل، م، ن کی رقوم میں پھیلاؤ۔

جواب:— − Δ = (ب ج − ف^2) ل^2 + (ج ا − گ^2) م^2

+ (ا ب − ھ^2) ن^2 + ۲ (گ ھ − ا ف) م ن

+ ۲ (ھ ف − ب گ) ن ل + (ف گ − ج ھ) ل م

۱۳۵ — مقطع کو پھیلانیکا لاپلاس کا طریقہ — دفعہ گذشتہ میں جس (۱۶)
پھیلاؤ کی تشریح کیگئی وہ لاپلاس کے بیان کردہ پھیلاؤ میں شامل ہے یہ پھیلاؤ زیادہ عام طریقہ پر حاوی ہے۔ اس میں مقطع کو کسی خط کے اجزائے ترکیبی کے خطی تفاعل کے طور پر پھیلانے کی بجائے ہم اس کو صغیروں کے خطی تفاعل کے طور پر جس میں خطوں کی کوئی تعداد شامل ہو سکتی ہے پھیلاتے ہیں۔

مثلاً کسی مقطع کے پہلے دو ستونوں (ا ، ب) پر غور کرو اور اور فرض کرو کہ ان دو ستونوں کی کسی دو صفوں کو لینے سے دوسرے رتبہ $(ا_ف ، ب_ق)$ کے جتنے مقطعے بن سکتے ہیں بنا لئے گئے ہیں۔ فرض کرو کہ $ا_ف$ اور $ب_ف$ خطوں کو دبا دینے سے (یعنے خارج تصور کرنے سے) جو مقطع بنتا ہے وہ $\Delta_{ف،ق}$ سے تعبیر ہوتا ہے۔ اب مقطع کو شکل $\Sigma \pm (ا_ف \, ب_ق) \, \Delta_{ف،ق}$ میں پھیلایا جا سکتا ہے جس میں ہر رقم دو متمم مقطعوں کا حاصل ضرب ہے (دیکھو دفعہ ۳۴) اسکو ثابت کرنیکے لئے ہم دیکھتے ہیں کہ مقطع کی ہر رقم میں ستون ا سے ایک عنصر اور ستون ب سے ایک عنصر شامل ہونا چاہئے۔ فرض کرو کہ ایک رقم میں جزو ضربی $ا_ف \, ب_ق$ شامل ہوتا ہے۔ تب (ف اور ق کو باہم بدلنے سے) ایک دوسری رقم بھی ہونی چاہئے جو اوپر کی رقم سے صرف علامت میں مختلف ہو اور اس کے لاحقے آپس میں بدلے ہوئے ہوں۔ پس مقطع کو شکل $\Sigma (ا_ف \, ب_ق) \, !_{ف،ق}$ میں پھیلا سکتے ہیں جہاں $!_{ف،ق}$ صریحاً ان سب رقموں کا مجموعہ ہے جو حروف ج ، د ، ع ، وغیرہ کے (ن - ۲) لاحقوں کو ہر ممکن طریقہ سے ترتیب دینے سے حاصل ہو سکتے ہیں۔ یعنے یہ $\pm \Delta_{ف،ق}$ ہے کسی مخصوص صورت میں علامت کو متعین کرنیکے لئے دفعہ ۱۲۸ کا قاعدہ استعمال کیا جا سکتا ہے۔ اس استدلال کو عام صورت کے لئے بھی

توسیع دیجاسکتی ہے۔ فرض کرو کہ ستونوں کی کوئی تعداد ف لیگئی ہے اور ان ستونوں کی ف صفوں کو لیکر تمام ممکن صغیر مقطعے بنائے گئے ہیں۔ تب ان میں سے ہر صغیر کو متمم صغیر سے ضرب دینا چاہئے اور پھر ایسے تمام حاصل ضربوں کے مجموعہ سے مقطع کو بیان کرنا چاہئے بشرطیکہ ہر حاصل ضرب کی علامت متذکرۂ بالا قانون سے معلوم کرلی گئی ہو۔

مثالیں

۱۔ مقطع $(\text{ا}_{۱}\,\text{ب}_{۲}\,\text{ج}_{۳}\,\text{د}_{۴})$ کو پہلے دو ستونوں سے بننے والے دوسرے رتبہ کے صغیر مقطعوں کی رقوم میں پھیلاؤ۔

خطوط وحدانی کی ترقیم استعمال کرکے ہم پھیلاؤ کو شکل ذیل میں لکھ سکتے ہیں:۔

$$(\text{ا}_{۱}\,\text{ب}_{۲})(\text{ج}_{۳}\,\text{د}_{۴}) - (\text{ا}_{۱}\,\text{ب}_{۳})(\text{ج}_{۲}\,\text{د}_{۴}) + (\text{ا}_{۱}\,\text{ب}_{۴})(\text{ج}_{۲}\,\text{د}_{۳})$$

$$+ (\text{ا}_{۲}\,\text{ب}_{۳})(\text{ج}_{۱}\,\text{د}_{۴}) - (\text{ا}_{۲}\,\text{ب}_{۴})(\text{ج}_{۱}\,\text{د}_{۳}) + (\text{ا}_{۳}\,\text{ب}_{۴})(\text{ج}_{۱}\,\text{د}_{۲})$$

جسمیں کسی حاصل ضرب کی علامت اس طور پر مقرر کیجاتی ہے کہ اول جزو ضربی میں شامل ہونیوالی دو صفوں کو پہلے اور دوسرے محلوں میں حرکت دیجائے۔ مثلاً دوسری اور چوتھی صفوں کو ان محلوں میں حرکت دینے کے لئے تین ہٹاوں کی ضرورت ہے اسلئے حاصل ضرب $(\text{ا}_{۲}\,\text{ب}_{۴})(\text{ج}_{۱}\,\text{د}_{۳})$ کی علامت منفی ہے۔ (18)

۲۔ اسی طرح مقطع $(\text{ا}_{۱}\,\text{ب}_{۲}\,\text{ج}_{۳}\,\text{د}_{۴}\,\text{ع}_{۵})$ کو پھیلاؤ۔

جواب:۔ $(\text{ا}_{۱}\,\text{ب}_{۲})(\text{ج}_{۳}\,\text{د}_{۴}\,\text{ع}_{۵}) - (\text{ا}_{۱}\,\text{ب}_{۳})(\text{ج}_{۲}\,\text{د}_{۴}\,\text{ع}_{۵}) + (\text{ا}_{۱}\,\text{ب}_{۴})(\text{ج}_{۲}\,\text{د}_{۳}\,\text{ع}_{۵})$

$$-(\text{ا}_1\,\text{ب}_5)(\text{ج}_2\,\text{د}_3\,\text{ع}_4)+(\text{ا}_2\,\text{ب}_3)(\text{ج}_1\,\text{د}_4\,\text{ع}_5)-(\text{ا}_2\,\text{ب}_4)(\text{ج}_1\,\text{د}_3\,\text{ع}_5)$$

$$+(\text{ا}_2\,\text{ب}_5)(\text{ج}_1\,\text{د}_3\,\text{ع}_4)-(\text{ا}_3\,\text{ب}_4)(\text{ج}_1\,\text{د}_2\,\text{ع}_5)+(\text{ا}_3\,\text{ب}_5)(\text{ج}_1\,\text{د}_2\,\text{ع}_4)$$

$$-(\text{ا}_4\,\text{ب}_5)(\text{ج}_1\,\text{د}_2\,\text{ع}_3)$$

۳ — ذیل کی متماثلہ ثابت کرو :—

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 & \text{د}_1 & \text{ع}_1 & \text{ف}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 & \text{د}_2 & \text{ع}_2 & \text{ف}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 & \text{د}_3 & \text{ع}_3 & \text{ف}_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \text{عہ}_1 & \text{بہ}_1 & \text{جہ}_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \text{عہ}_2 & \text{بہ}_2 & \text{جہ}_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \text{عہ}_3 & \text{بہ}_3 & \text{جہ}_3 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \text{عہ}_1 & \text{بہ}_1 & \text{جہ}_1 \\ \text{عہ}_2 & \text{بہ}_2 & \text{جہ}_2 \\ \text{عہ}_3 & \text{بہ}_3 & \text{جہ}_3 \end{vmatrix}$$

اول تین ستونوں سے صغیر مقطعوں کو بناکر انکی رقوم میں مقطع کو پھیلانے سے اوپر کی متماثلہ ثابت ہو جاتی ہے کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ ایسے تمام صغیر مقطعے (کم از کم ایک صفروں والی صف شامل ہونے کی وجہ سے) معدوم ہو جاتے ہیں سوائے ایک صغیر مقطع $(\text{ا}_1\,\text{ب}_2\,\text{ج}_3)$ کے۔

عام صورت میں اسی طرح یہ معلوم ہوگا کہ اگر ۲م ویں رتبہ والے مقطع میں م^2 صفروں کا مربع کسی محل میں شامل ہو تو اس مقطع کو م ویں رتبہ کے دو مقطعوں کے حاصل ضرب سے بیان کیا جا سکتا ہے۔

۴ — مقطع

$$\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ھ} & \text{گ} & \text{ل} & \text{ل}' \\ \text{ھ} & \text{ب} & \text{ف} & \text{م} & \text{م}' \\ \text{گ} & \text{ف} & \text{ج} & \text{ن} & \text{ن}' \\ \text{ل} & \text{م} & \text{ن} & \cdot & \cdot \\ \text{ل}' & \text{م}' & \text{ن}' & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

کو عہ، بہ، جہ کی قوتوں میں پھیلاؤ جہاں

عہ ≡ مہ نَہ - مَہ نہ، بہ ≡ نہ لَہ - نَہ لہ، جہ = لہ مَہ - لَہ مہ

جواب:- ا عہ^{٢} + ب بہ^{٢} + ج جہ^{٢} + ٢ ف بہ جہ + ٢ گ جہ عہ

+ ٢ ھ عہ بہ

۵ — دفعہ ہذا کے پھیلاؤ کی تصدیق کرنے کے لئے ثابت کرو کہ عام صورت میں اس سے رقموں کی ٹھیک تعداد حاصل ہوتی ہے۔

ن ویں رتبہ کے مقطع کے پہلے ر ستونوں پر غور کرو۔ ان سے صغیر مقطعوں کی جو تعداد بنتی ہے وہ ن اشیاء میں سے ر، ر اشیاء کے اجتماعوں کی تعداد کے مساوی ہے۔ اس عدد کو اگر ۱ × ۲ × ۳ × .... × ر سے (جو ہر صغیر مقطع میں رقموں کی تعداد ہے) اور ۱ × ۲ × ۳ × .... × (ن - ر) سے ضرب دیا جائے تو ۱ × ۲ × ۳ × .... × ن حاصل ہوگا جو مقطع میں رقموں کی تعداد کے مساوی ہے۔

(19) ۱۳۶ — مقطع کا پھیلاؤ صدر عناصر کے حاصل ضربوں میں۔

اس دفعہ اور آیندہ دفعات میں پھیلاؤ کے دو مزید طریقے بتائے جائینگے جو خاص شکل کے چند مقطعوں کو پھیلانے میں مفید ثابت ہونگے۔ ذیل کا پھیلاؤ یہ بتانے کے لئے کافی ہے کہ کسی مقطع کو صدر عناصر کے حاصل ضربوں میں کس طرح پھیلایا جا سکتا ہے:-

مقطع

ا۱	ب۱	ج۱	د۱
ا۲	ب۲	ج۲	د۲
ا۳	ب۳	ج۳	د۳
ا۴	ب۴	ج۴	د

کو جو چوتھے رتبہ کا ہے ا، ب، ج، د کے حاصل ضربوں کی

بموجب پھیلانا مقصود ہے۔ صدر عناصر کو اہمیت دینے کی خاطر ہم نے ا_1، ب_2، ج_3، د_4 کی بجائے بڑے حروف ا، ب، ج، د سے کام لیا ہے۔ پھیلاؤ کا عمل کرنے کے بعد یہ ظاہر ہے کہ نتیجہ کی شکل حسب ذیل ہوگی :-

$$\Delta \equiv \Delta_0 + \sum \text{لہ}\,\text{ا} + \sum \text{لَہ}\,\text{ا ب} + \text{ا ب ج د}$$

جہاں Δ_0 میں وہ سب رقمیں شامل ہیں جنمیں کوئی صدر عنصر واقع نہیں ہوتا، $\sum \text{لہ}\,\text{ا}$ وہ سب رقموں کا مجموعہ ہے جنمیں صرف ایک صدر عنصر واقع ہوتا ہے، $\sum \text{لَہ}\,\text{ا ب}$ وہ سب رقموں کا مجموعہ ہے جنمیں صدر عناصر کے ایک ایک زوج کا حاصل ضرب پایا جاتا ہے، اور صدر رقم ا ب ج د ان تمام صدر عناصر کا حاصل ضرب ہے۔ یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ مندرجۂ بالا پھیلاؤ میں شکل $\text{لہَ}\,\text{ا ب ج}$ کی کوئی رقم شامل نہیں ہوتی کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ پھیلا ہوا مقطع عام طور پر ایسی رقموں پر مشتمل نہیں ہو سکتا جنمیں سوائے ایک کے باقی سب صدر عناصر کے حاصل ضرب واقع ہوتے ہوں کیونکہ ایسے کسی حاصل ضرب کا سر بچا ہوا وتری عنصر ہوگا۔ اب صرف یہ دیکھنا باقی ہے کہ Δ_0 کی شکل کیا ہے اور لہ، مہ، ....، لہَ، مہَ، .... وغیرہ کی قیمتیں کیا ہیں۔

مندرجۂ بالا متماثلہ میں ا، ب، ج، د سب کو صفر کے مساوی رکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\Delta_0 \equiv \begin{vmatrix} 0 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 & \text{د}_1 \\ \text{ا}_2 & 0 & \text{ج}_2 & \text{د}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & 0 & \text{د}_3 \\ \text{ا}_4 & \text{ب}_4 & \text{ج}_4 & 0 \end{vmatrix}$$

پھر لہ کو حاصل کرنے کے لئے فرض کرو کہ ب، ج، د صفر بنائے گئے ہیں تو ا کا سر صریحاً

$$\begin{vmatrix} 0 & \text{ج}_2 & \text{د}_2 \\ \text{ب}_3 & 0 & \text{د}_3 \\ \text{ب}_4 & \text{ج}_4 & 0 \end{vmatrix}$$

ہوگا۔ اسی طرح د ب کا سر ب کے صغیر متمم مقطع میں اَ ج، د کی بجائے صفر رکھنے سے حاصل ہوتا ہے اور علیٰ ہذا القیاس۔

پھر لَ کو معلوم کرنے کے لئے فرض کرو کہ ج اور د کو صفر بنایا (20)
گیا ہے تو اب کا سر حاصل شدہ مقطع کا دوسرا صغیر مقطع

$$\begin{vmatrix} 0 & \text{د}_3 \\ \text{ج}_4 & 0 \end{vmatrix}$$

ہوگا۔ کسی اور حاصل ضرب کا سر اسی طرح معلوم کیا جا سکتا ہے۔ آخر الامر △ کا پھیلاؤ اس شکل میں لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{vmatrix} 0 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 & \text{د}_1 \\ \text{ا}_2 & 0 & \text{ج}_2 & \text{د}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & 0 & \text{د}_3 \\ \text{ا}_4 & \text{ب}_4 & \text{ج}_4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+\text{ا}\begin{vmatrix} 0 & \text{ج}_2 & \text{د}_2 \\ \text{ب}_3 & 0 & \text{د}_3 \\ \text{ب}_4 & \text{ج}_4 & 0 \end{vmatrix} +\text{ب}\begin{vmatrix} 0 & \text{ج}_1 & \text{د}_1 \\ \text{ا}_3 & 0 & \text{د}_3 \\ \text{ا}_4 & \text{ج}_4 & 0 \end{vmatrix} +\text{ج}\begin{vmatrix} 0 & \text{ب}_1 & \text{د}_1 \\ \text{ا}_2 & 0 & \text{د}_2 \\ \text{ا}_4 & \text{ب}_4 & 0 \end{vmatrix} +\text{د}\begin{vmatrix} 0 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2 & 0 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+\text{اب}\begin{vmatrix} 0 & \text{د}_3 \\ \text{ج}_4 & 0 \end{vmatrix} +\text{اج}\begin{vmatrix} 0 & \text{د}_2 \\ \text{ب}_4 & 0 \end{vmatrix} +\text{اد}\begin{vmatrix} 0 & \text{ج}_2 \\ \text{ب}_3 & 0 \end{vmatrix} +\text{بج}\begin{vmatrix} 0 & \text{د}_1 \\ \text{ا}_4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+\text{بد}\begin{vmatrix} 0 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_3 & 0 \end{vmatrix} +\text{جد}\begin{vmatrix} 0 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & 0 \end{vmatrix} +\text{ابجد}$$

وہ مقطع جس کے صدر عناصر سب کے سب معدوم ہوتے ہیں
صفر وتری کہلاتا ہے۔ متذکرہ صدر نتیجہ کو اب ہم یوں بیان کر سکتے ہیں:-
کسی مقطع کو صدر عناصر کے حاصل ضربوں میں پھیلایا جا سکتا ہے۔ پھیلاؤ میں ہر حاصل ضرب کا ہم ضربی صفر وتری مقطع ہوتا ہے

۱۳۷ — مقطع کا پھیلاؤ ایک صف اور ایک ستون کے عناصر کے زوجوں کے حاصل ضربوں میں۔

ذیل میں ہم پہلی صف اور پہلے ستون کو لیتے ہیں اور ان کے رقوم میں پھیلاؤ معلوم کرتے ہیں۔ یہ صریحاً کافی ہے کیونکہ کوئی صف اور کوئی ستون ان محلوں میں ہٹاؤں کی مدد سے لائے جا سکتے ہیں
مقطع کو شکل

اِ	عہ	بہ	جہ	..
عہَ	ا۱	ب۱	ج۱	..
بہَ	ا۲	ب۲	ج۲	..
جہَ	ا۳	ب۳	ج۳	..
...	...	...	...	..

میں لکھنے سے آسانی پیدا ہوتی ہے۔
(21) فرض کرو کہ اس کو Δ' سے تعبیر کیا گیا ہے اور اسکا پہلا صدر صغیر مقطع (ا۱ ب۲ ج۳ ....) حسب معمول Δ سے تعبیر ہوتا ہے اس مقطع Δ' کو Δ سے اس کو حاشیہ لگا کر اخذ کر سکتے ہیں چنانچہ Δ کو اِ، عہ، بہ، جہ .... عناصر کا افقاً اور اِ، عہَ، بہَ، جہَ .... عناصر کا انتصاباً حاشیہ لگانے سے مقطع Δ' حاصل ہو جاتا ہے۔

جب Δ کو پھیلایا جاتا ہے تو وہ سب رقمیں جنمیں ا$_1$ آتا ہے ا$_1\Delta$ میں شامل ہیں۔ علاوہ ازیں پھیلاؤ میں ستون اول کے ہر دیگر عنصر اور صف اول کے ہر دیگر عنصر کا حاصل ضرب شامل ہوگا جبکہ دو عناصر کے ہر ایسے حاصل ضرب کو اس کے مناسب جزو ضربی سے ضرب دیدیا جائے۔ کسی حاصل ضرب کے لئے یہ جزو ضربی آسانی کے ساتھ معلوم کیا جا سکتا ہے۔ فرض کرو کہ Δ کے پھیلاؤ ہیں ا$_1$ ب$_2$ ج$_3$ ..... ا$_2$ ب$_3$ ..... وغیرہ کے ہم ضربی دفعہ ۱۳۴ کی ترقیم کی بموجب ا$_1$ ب$_1$ ... ا$_2$ ب$_2$ ... وغیرہ ہیں۔ یہ واضح رہے کہ وہ جزو ضربی جو کسی حاصل ضرب کے ساتھ آتا ہے (مثلاً Δ کے پھیلاؤ میں عہ عہَ کے ساتھ) وہی ہے جو ا$_1$ کے ساتھ بہ تبدیل علامت آتا ہے یعنے $-$ ا$_1$۔ اسی طرح وہ جزو ضربی جو عہَ بہ کے ساتھ آتا ہے وہی ہے جو ا$_1$ ب$_1$ کے ساتھ بہ تبدیل علامت آتا ہے یعنے $-$ ب$_1$۔ اور علی ہذا القیاس۔ اس قسم کے حاصل ضرب کے ساتھ جو جزو ضربی موجود ہوتا ہے اسکو حاصل کرنیکا قاعدہ صاف طور پر یہ ہے:۔ صدر رقم ا$_1$ اور ان دو اجزائے ترکیبی سے جو حاصل ضرب میں داخل ہوتے ہیں بننے والے مستطیل کو مکمل کر کے چوتھا جزو ترکیبی معلوم کرو تو مطلوبہ جزو ضربی Δ کے اس طور پر حاصل کردہ جزو ترکیبی کی بجائے متناظر بڑا حرف منفی علامت کے ساتھ درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ اس لئے آخر الامر یہ معلوم ہوتا ہے کہ Δ کا پھیلاؤ شکل ذیل میں لکھا جا سکتا ہے:۔

$$\Delta' \equiv ا\,\Delta - ا_1\, ع\, ع' - ب_1\, ب\, ع' - ج_1\, ج\, ع' - \ldots\ldots$$
$$- ا_2\, ع\, ب' - ب_2\, ب\, ب' - ج_2\, ج\, ب' - \ldots\ldots$$
$$- ا_3\, ع\, ج' - ب_3\, ب\, ج' - ج_3\, ج\, ج' - \ldots\ldots$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots$$

پھیلاؤ کے اس طریقہ کا فائدہ کسی آئندہ دفعہ میں مثالوں کے ذریعہ واضح کیا جائیگا۔

۱۳۸ — مقطعات کی جمع — مسئلہ — اگر کسی خط کے ہر عنصر کو دو عناصر کے مجموعہ میں تحلیل کیا جا سکے تو مقطع کو دوسرے دو مقطعوں کے مجموعہ میں تحلیل کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ ستون اول کے عناصر $ا_1 + ع_1$، $ا_2 + ع_2$، $ا_3 + ع_3$ (22)
وغیرہ ہیں۔ دفعہ ۱۳۴ کے پھیلاؤ میں ان کو درج کرنے سے

$$\Delta = (ا_1 + ع_1)\, ا'_1 + (ا_2 + ع_2)\, ا'_2 + (ا_3 + ع_3)\, ا'_3 + \ldots\ldots$$
$$= ا_1 ا'_1 + ا_2 ا'_2 + ا_3 ا'_3 + \ldots\ldots + ع_1 ا'_1 + ع_2 ا'_2 + ع_3 ا'_3 + \ldots\ldots$$

یعنی

$$\begin{vmatrix} ا_1 + ع_1, & ب_1, & ج_1 & \ldots \\ ا_2 + ع_2, & ب_2, & ج_2 & \ldots \\ ا_3 + ع_3, & ب_3, & ج_3 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 & ج_1 & \ldots \\ ا_2 & ب_2 & ج_2 & \ldots \\ ا_3 & ب_3 & ج_3 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ع_1 & ب_1 & ج_1 & \ldots \\ ع_2 & ب_2 & ج_2 & \ldots \\ ع_3 & ب_3 & ج_3 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

جس سے مسئلہ ثابت ہے۔

اگر کسی اور ستون کے عناصر دو دو عناصر کے مجموعوں میں تحلیل ہو سکیں تو پہلے ایک ستون کے لحاظ سے تحلیل کرنے سے اور

بعد میں اس دوسرے ستون کے لحاظ سے تحلیل کرنے سے بآسانی
کے ساتھ دیکھ لیا جا سکتا ہے کہ مقطع کو چار دوسرے مقطعوں کے
مجموعہ میں تحلیل کیا جا سکتا ہے۔ مثلاً مقطع

$$\begin{vmatrix} ا_1 + ع_1 & ب_1 + بہ_1 & ج_1 \\ ا_2 + ع_2 & ب_2 + بہ_2 & ج_2 \\ ا_3 + ع_3 & ب_3 + بہ_3 & ج_3 \end{vmatrix}$$

دفعہ ۱۳۳ کی ترقیم کی بموجب ان چار مقطعوں کے مجموعہ کے مساوی ہے

$$(ا_1\, ب_2\, ج_3) + (ع_1\, ب_2\, ج_3) + (ع_1\, بہ_2\, ج_3) + (ا_1\, بہ_2\, ج_3)$$

اسی طرح یہ نتیجہ اخذ ہو سکتا ہے کہ اگر ایک ستون کا ہر عنصر
رقموں کی کسی تعداد کے جبری مجموعہ میں تحلیل ہو سکے تو مقطع کو دوسرے
مقطعوں کی متناظر تعداد میں تحلیل کیا جا سکتا ہے۔
مثلاً

$$\begin{vmatrix} ا_1 - ع_1 + عَ_1 & ب_1 & ج_1 \\ ا_2 - ع_2 + عَ_2 & ب_2 & ج_2 \\ ا_3 - ع_3 + عَ_3 & ب_3 & ج_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 & ج_1 \\ ا_2 & ب_2 & ج_2 \\ ا_3 & ب_3 & ج_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ع_1 & ب_1 & ج_1 \\ ع_2 & ب_2 & ج_2 \\ ع_3 & ب_3 & ج_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} عَ_1 & ب_1 & ج_1 \\ عَ_2 & ب_2 & ج_2 \\ عَ_3 & ب_3 & ج_3 \end{vmatrix}$$

(23) اور عام صورت میں اگر ایک ستون دوسرے م ستونوں کا جبری مجموعہ
ہو کوئی دوسرا ستون دوسرے ن ستونوں کا مجموعہ ہو کوئی تیسرا
ستون دوسرے ف ستونوں کا مجموعہ ہو وغیرہ تو مقطع کو دوسرے
مقطعوں کی تعداد م ن ف ... وغیرہ میں تحلیل کیا جا سکتا ہے
اب یہ ظاہر ہے کہ ایسے ہی نتیجے صفوں کے لحاظ سے صادق
آتے ہیں کیونکہ ان کو ثبوت بالا میں ستونوں کی بجائے مندرج کیا جا سکتا ہے

۱۳۹ — مسئلہ ۶ — اگر ایک خط کے عناصر باقی دوسرے خطوں کے متناظر عناصر کے (جنکو مستقل اجزائے ضربی سے ضرب دیا گیا ہو) مجموعوں کے مساوی ہوں تو مقطع معدوم ہو جاتا ہے۔

کیونکہ ایسی صورت میں اس مقطع کو ایسے مقطعوں کے مجموعہ میں تحلیل کیا جا سکتا ہے جنمیں سے ہر ایک جداگانہ طور پر معدوم ہوتا ہے۔ مثلاً

$$\begin{vmatrix} \text{م}\,\text{ا}_1+\text{ن}\,\text{ب}_1 & \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{م}\,\text{ا}_2+\text{ن}\,\text{ب}_2 & \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \\ \text{م}\,\text{ا}_3+\text{ن}\,\text{ب}_3 & \text{ا}_3 & \text{ب}_3 \end{vmatrix} = \text{م}\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ا}_3 & \text{ب}_3 \end{vmatrix} + \text{ن}\begin{vmatrix} \text{ب}_1 & \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ب}_2 & \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \\ \text{ب}_3 & \text{ا}_3 & \text{ب}_3 \end{vmatrix}$$

اور بائیں طرف کا ہر مقطع معدوم ہوتا ہے (دفعہ ۱۳۰)۔

۱۴۰ — مسئلہ ۷ — اگر کسی ستون یا صف کے ہر عنصر میں باقی دوسرے ستونوں یا صفوں کے متناظر عناصر مستقل اجزائے ضربی سے علی الترتیب ضرب دینے کے بعد جمع کر دئے جائیں تو مقطع کی قیمت نہیں بدلتی۔

کیونکہ جب مقطع کو دوسرے مقطعوں کے مجموعہ میں دفعہ ۱۳۸ کی طرح تحلیل کیا جاتا ہے تو وہ مقطعات جنمیں جمع کردہ خطوط واقع ہوتے ہیں معدوم ہو جاتے ہیں کیونکہ ان میں سے ہر ایک مستقل جزو ضربی کو جدا کرنیکے بعد دو متماثل خطوط رکھتا ہے۔

مثلاً

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \text{ا}_1 + \text{م ب}_1 + \text{ن ج}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2 + \text{م ب}_2 + \text{ن ج}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 + \text{م ب}_3 + \text{ن ج}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}$$

کیونکہ جب دوسرے مقطع کو تین دیگر مقطعوں کے مجموعہ کے طور پر بیان کیا جاتا ہے تو وہ مقطعات، جو جمع کردہ ستونوں سے پیدا ہوتے ہیں متماثلاً معدوم ہو جاتے ہیں (دفعہ ۱۳۹)۔

اس دفعہ کا مسئلہ مقطعوں کی قیمت معلوم کرنے میں عملاً بہت مفید ثابت ہوتا ہے۔

مثالیں

(24)

۱۔ ثابت کرو کہ حسب ذیل مقطع معدوم ہوتا ہے:۔

$$\begin{vmatrix} \text{ب} + \text{ج} & \text{ع} & \text{ا} \\ \text{ج} + \text{ع} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{ع} + \text{ب} & \text{ج} & \text{ا} \end{vmatrix}$$

دوسرے ستون کے عناصر کو پہلے ستون کے متناظر عناصر میں جمع کر کے ہم ع + ب + ج کو ایک جزو ضربی کے طور پر باہر نکال سکتے ہیں اور پھر دو ستون متماثل ہو جاتے ہیں۔

۲۔ ذیل کے مقطع کی قیمت معلوم کرو:۔

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ ۲ & ۳ & ۷ \\ ۳ & ۴ & ۱۰ \end{vmatrix}$$

ستونِ اول کے عناصر کو ستون دوم کے عناصر میں سے تفریق کرنے اور ستونِ اول کے عناصر کو ۳ سے ضرب دیکر ان کو ستون سوم میں سے

تفریق کرنے سے ہمیں مقطع

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

حاصل ہوتا ہے جو متماثلاً معدوم ہو جاتا ہے۔

۳—

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -16$$

یہاں پہلا استحالہ صف اول کے عناصر کو یکے بعد دیگرے دوسری، تیسری، چوتھی صفوں کے عناصر کے ساتھ جمع کرنے سے حاصل کیا گیا۔

۴—

$$\begin{vmatrix} 7 & 11 & 4 \\ 13 & 15 & 10 \\ 3 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 7 & 11 & 4 \\ 13 & 15 & 10 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 7 & -10 & -10 \\ 13 & -24 & -16 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 10 & 10 \\ 24 & 16 \end{vmatrix} = 30\,(16-24) = -240$$

یہاں دوسرا استحالہ ستون اول کو ۳ سے ضرب دیکر اسکو ستون دوم
میں سے تفریق کرنے اور ستون اول کے دوچند کو ستون سوم میں سے
تفریق کرنے سے حاصل ہوا۔ اس قسم کی مثالوں میں اس بات کی کوشش
ہونی چاہیے کہ کسی صف یا ستون کے تمام عنصروں کو سوائے ایک عنصر
کے صفر میں تحویل کیا جائے کیونکہ اس عمل سے دیا ہوا مقطع نچلے رتبہ کے
مقطع میں تحویل ہو جاتا ہے اور اس لئے اسکی قیمت معلوم کرنے میں
آسانی پیدا ہو جاتی ہے۔ یہ بات کسی خط کو اکائیوں میں تحویل کرنے سے (25)
ہمیشہ عمل میں آسکیگی جیسے مثال ۷، دفعہ ۱۳۲ کی صورت میں۔ لیکن عام
طور پر صرف جمع یا تفریق کے عمل سے مثال بالا کی طرح اس قسم کی

آسانی پیدا ہو سکتی ہے۔

۵۔

$$\begin{vmatrix}7&-2&0&5\\-2&6&-2&2\\0&-2&5&3\\5&2&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7&-2&0&5\\19&0&-2&17\\-7&0&5&-2\\12&0&3&9\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}19&-2&17\\-7&5&-2\\12&3&9\end{vmatrix}$$

صفِ اول کے دو چند کو صفِ دوم میں جمع کرو، صفِ اول کو صفِ سوم میں سے تفریق کرو، اور صفِ اول کو صفِ چہارم میں جمع کرو تو دوسرا استحالہ حاصل ہو جائیگا۔ تحویل شدہ مقطع میں ستون دوم کا چار گنا ستون اول میں سے اور ستون دوم کا تین گنا ستون سوم میں سے تفریق کرو تو اس مقطع کو آسانی کے ساتھ محسوب کیا جا سکتا ہے۔ چنانچہ

$$2\begin{vmatrix}19&-2&17\\-7&5&-2\\12&3&9\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}27&-2&23\\-27&5&-17\\0&3&0\end{vmatrix}=-6\begin{vmatrix}27&23\\-27&-17\end{vmatrix}=-972$$

۶۔ ذیل کا مقطع محسوب کرو:۔

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&15&14&4\\12&6&7&9\\8&10&11&5\\13&3&2&16\end{vmatrix}$$

اس مقطع میں پہلے سولہ طبعی اعداد کو ایک ایسے مربع میں ترتیب دیا گیا ہے جسکو ہم "طلسمی مربع" کہہ سکتے ہیں کیونکہ کسی صف یا کسی ستون کے اعداد کا مجموعہ مستقل (۳۴) ہے۔ تمام صورتوں میں پہلے $ن^2$ طبعی اعداد کے مربع کے لئے یہ مجموعہ $\frac{1}{2}$ ن ($ن^2 + 1$) ہوگا۔ ایسے مقطعوں کو بقدر ایک درجہ کے فوراً گھٹایا جا سکتا ہے۔ مندرجۂ بالا مقطع میں آخری تین ستونوں کو پہلے ستون میں جمع کرنے اور آخری صف کو باقی ہر صف میں سے تفریق کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں

$$\Delta = 34\begin{vmatrix}4&14&15&1\\9&7&6&1\\5&11&10&1\\16&2&3&1\end{vmatrix} = 34\begin{vmatrix}-12&12&12&0\\-7&5&3&0\\-11&9&7&0\\16&2&3&1\end{vmatrix}$$

$$= 34 \times 12\begin{vmatrix}-1&1&1\\-7&5&3\\-11&9&7\end{vmatrix}$$

اور دوسری صف کو آخری صف میں سے تفریق کرنے پر یہ ظاہر ہے کہ محول مقطع معدوم ہو جاتا ہے۔ پس $\Delta = 0$

۷ ـــ پہلے نو طبعی اعداد کو طلسمی مربع میں ترتیب دیکر مقطع بنایا گیا ہے ۔ اسکو محسوب کرو :ـــ

$$\begin{vmatrix}2&9&4\\7&5&3\\6&1&8\end{vmatrix}$$

جواب :ـ ۳۶۰

۸ ـــ پہلے پچیس طبعی اعداد کو طلسمی مربع میں ترتیب دیکر مقطع بنایا گیا ہے ۔ اسکی قیمت معلوم کرو :ـــ (26)

$$\begin{vmatrix}22&14&1&18&10\\16&8&25&12&4\\15&2&19&6&23\\9&21&13&5&17\\3&20&7&24&11\end{vmatrix}$$

جواب :ـ ـ ۴۶۸

۹ ـ مثال ۹ دفعہ ۱۳۴ کا مقطع دفعہ بالا کے طریقہ سے محسوب کرو :ـ

$$\Delta = \begin{vmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & \text{ی}^2 & \text{ما}^2 \\ ۱ & \text{ی}^2 & ۰ & \text{لا}^2 \\ ۱ & \text{ما}^2 & \text{لا}^2 & ۰ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & \text{ی}^2 & \text{ما}^2 \\ ۱ & \text{ی}^2 & -\text{ی}^2 & \text{لا}^2-\text{ی}^2 \\ ۱ & \text{ما}^2 & \text{لا}^2-\text{ما}^2 & -\text{ما}^2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} ۱ & \text{ی}^2 & \text{ما}^2 \\ ۱ & -\text{ی}^2 & \text{لا}^2-\text{ی}^2 \\ ۱ & \text{لا}^2-\text{ما}^2 & -\text{ما}^2 \end{vmatrix}$$

یہاں ہم دوسرا مقطع حاصل کرنے کے لئے دوسرے ستون کو اس کے بعد کے ستونوں میں سے تفریق کرتے ہیں۔ تحویل شدہ مقطع میں پہلی صف کو باقی دوسری صفوں میں سے تفریق کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\Delta = - \begin{vmatrix} ۱ & \text{ی}^2 & \text{ما}^2 \\ ۰ & -۲\,\text{ی}^2 & \text{لا}^2-\text{ی}^2-\text{ما}^2 \\ ۰ & \text{لا}^2-\text{ما}^2-\text{ی}^2 & -۲\,\text{ما}^2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} ۲\,\text{ی}^2 & \text{ما}^2+\text{ی}^2-\text{لا}^2 \\ \text{ما}^2+\text{ی}^2-\text{لا}^2 & ۲\,\text{ما}^2 \end{vmatrix}$$

$$= (\text{ما}^2+\text{ی}^2-\text{لا}^2)^2 - ۴\,\text{ما}^2\text{ی}^2$$

$$= (\text{ما}^2+\text{ی}^2-\text{لا}^2-۲\,\text{ما}\,\text{ی})(\text{ما}^2+\text{ی}^2-\text{لا}^2+۲\,\text{ما}\,\text{ی})$$

$$= \{(\text{ما}-\text{ی})^2-\text{لا}^2\}\{(\text{ما}+\text{ی})^2-\text{لا}^2\}$$

$$= -(\text{لا}+\text{ما}+\text{ی})(\text{ما}+\text{ی}-\text{لا})(\text{ی}+\text{لا}-\text{ما})(\text{لا}+\text{ما}-\text{ی})$$

۱۰۔ متماثلہ ذیل ثابت کرو:—

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} (\text{ب}+\text{ج})^2 & \text{ا}^2 & \text{ا}^2 \\ \text{ب}^2 & (\text{ج}+\text{ا})^2 & \text{ب}^2 \\ \text{ج}^2 & \text{ج}^2 & (\text{ا}+\text{ب})^2 \end{vmatrix} \equiv ۲\,\text{ا}\,\text{ب}\,\text{ج}(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})^3$$

آخری ستون کو باقی دوسرے ستونوں میں سے تفریق کرکے $(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})^2$ کو جزو ضربی کے طور پر باہر نکالا جا سکتا ہے۔ باقی مقطع کو Δ' سے تعبیر کرکے اور اس میں پہلی دو صفوں کے مجموعہ کو آخری صف سے تفریق کرنے سے ہمیں حاصل ہوگا

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \text{ب + ج - ا} & ٠ & \text{ا}^2 \\ ٠ & \text{ج + ا - ب} & \text{ب}^2 \\ \text{ج - ا - ب} & \text{ج - ا - ب} & (\text{ا + ب})^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ب + ج - ا} & ٠ & \text{ا}^2 \\ ٠ & \text{ج + ا - ب} & \text{ب}^2 \\ \text{- ٢ب} & \text{- ٢ا} & \text{٢اب} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\text{اب}} \begin{vmatrix} \text{ا (ب + ج - ا)} & ٠ & \text{ا}^2 \\ ٠ & \text{ب (ج + ا - ب)} & \text{ب}^2 \\ \text{- ٢اب} & \text{- ٢اب} & \text{٢اب} \end{vmatrix}$$

آخری ستون کو باقی دوسرے ستونوں میں جمع کرنے سے ہمیں حاصل ہوگا (27)

$$\Delta' = \frac{1}{\text{اب}} \begin{vmatrix} \text{ا (ب + ج)} & \text{ا}^2 & \text{ا}^2 \\ \text{ب}^2 & \text{ب (ج + ا)} & \text{ب}^2 \\ ٠ & ٠ & \text{٢اب} \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} \text{ا (ب + ج)} & \text{ا}^2 \\ \text{ب}^2 & \text{ب (ج + ا)} \end{vmatrix}$$

$$= \text{٢اب} \begin{vmatrix} \text{(ب + ج)} & \text{ا} \\ \text{ب} & \text{(ج + ا)} \end{vmatrix} = \text{٢اب ج (ا + ب + ج)}$$

$$\text{پس}\quad \Delta = \Delta' (\text{ا + ب + ج})^2 = \text{٢اب ج (ا + ب + ج)}^3$$

۱۱۔ مماثلہ ذیل ثابت کرو:-

$$\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ \text{عہ} & \text{یہ} & \text{جہ} \\ \text{عہ}^3 & \text{یہ}^3 & \text{جہ}^3 \end{vmatrix} \equiv \text{(یہ - جہ) (جہ - عہ) (عہ - یہ) (عہ + یہ + جہ)}$$

پہلے ستون کو باقی دوسرے ستونوں میں سے تفریق کرو تو یہ - عہ اور جہ - عہ اجزائے ضربی ہو جائینگے۔ پھر تحویل شدہ مقطع میں پہلی صف کو عہ^2 سے ضرب دیکر دوسری صف سے تفریق کرو۔

۱۲۔ مقطع

$$\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ا} & \text{ا} & \text{ا} \\ \text{ضہ} & \text{جہ} & \text{بہ} & \text{عہ} \\ \text{ضہ}^{2} & \text{جہ}^{2} & \text{بہ}^{2} & \text{عہ}^{2} \\ \text{ضہ}^{4} & \text{جہ}^{4} & \text{بہ}^{4} & \text{عہ}^{4} \end{vmatrix} \equiv \Delta$$

کو مفرد اجزائے ضربی میں تحلیل کرو ۔

مثال ۱۱ کی طرح عمل کرنے سے آسانی کے ساتھ معلوم ہو جائیگا کہ (بہ − عہ) (جہ − عہ) (ضہ − عہ) جزو ضربی ہے اور تحویل شدہ مقطع ہے

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{ضہ} + \text{عہ} & \text{جہ} + \text{عہ} & \text{بہ} + \text{عہ} \\ \text{بہ}^{3} + \text{بہ}^{2}\text{عہ} + \text{بہ}\,\text{عہ}^{2} + \text{عہ}^{3} & \text{جہ}^{3} + \text{جہ}^{2}\text{عہ} + \text{جہ}\,\text{عہ}^{2} + \text{عہ}^{3} & \text{ضہ}^{3} + \text{ضہ}^{2}\text{عہ} + \text{ضہ}\,\text{عہ}^{2} + \text{عہ}^{3} \end{vmatrix}$$

پہلے ستون کو باقی دوسرے ستونوں میں سے تفریق کرو تو (جہ − بہ) (ضہ − بہ) جزو ضربی کے طور پر نکل آئیگا اور باقی جزو ضربی کا (ضہ − جہ) (عہ + بہ + جہ + ضہ) ہونا آسانی کے ساتھ معلوم ہو جائیگا ۔ پس بالآخر

Δ = − (بہ − جہ) (عہ − ضہ) (جہ − عہ) (بہ − ضہ) (عہ − بہ) (جہ − ضہ) (عہ + بہ + جہ + ضہ)

۱۳ ــ مقطع

$$\begin{vmatrix} \text{ج} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{ب} & \text{ا} & \text{ج} \\ \text{ا} & \text{ج} & \text{ب} \end{vmatrix} \equiv \Delta$$

کو خطی اجزائے ضربی میں تحلیل کرو ۔

دوسرے ستون کو سہ سے اور تیسرے ستون کو سہ² سے ضرب دو اور پہلا ستون دونوں میں جمع کرو ۔ جزو ضربی ا + سہ ب + سہ² ج پہلے ستون سے نکل آئیگا (کیونکہ سہ³ = ۱) اور عناصر ا، سہ، سہ² بچ جائینگے پھر دوسری اور تیسری صفوں کو پہلی صف میں جمع کرنے سے جزو ضربی ا + ب + ج باہر نکالا جا سکتا ہے اور بقیہ مقطع کا ا + سہ² ب + سہ ج کے مساوی ہونا آسانی کے ساتھ معلوم ہو جاتا ہے ۔ پس

Δ ≡ (ا + ب + ج) (ا + سہ ب + سہ^2 ج) (ا + سہ^2 ب + سہ ج)

۱۴ ــ مقطع (28)

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \text{د} & \text{ج} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{ج} & \text{د} & \text{ا} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{ا} & \text{د} & \text{ج} \\ \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \end{vmatrix}$$

کو خطی اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

نتیجہ ہوگا

Δ ≡ − (ا + ب + ج + د) (ب + ج − ا − د) (ج + ا − ب − د) (ا + ب − ج − د)

کیونکہ مندرجہ بالا ہر جزو ضربی مقطع کا ایک جزو ضربی ہے۔ مثلاً پہلے ستون میں دوسرا ستون جمع کرنے اور تیسرا اور چوتھے ستونوں کو تفریق کرنے سے یہ بتایا جا سکتا ہے کہ مقطع کا ایک جزو ضربی ا + ب − ج − د ہے۔ ا^4 کی علامت کا مقابلہ کرنے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ حاصل ضرب کی علامت منفی ہونی چاہیئے۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ مثال ۹ کا مقطع مندرجہ بالا مقطع کی مخصوص صورت ہے کیونکہ ا = ۰ رکھنے سے یہ مقطع حاصل ہو جاتا ہے چنانچہ مثال ۹ دفعہ ۱۳۴ کی متماثلہ اشکال کا مقابلہ کرنے سے یہ بات واضح ہے۔

۱۴۱ ــ مقطعات کی ضرب۔ مسئلہ ۸۔ کسی رتبہ کے دو مقطعوں کا حاصل ضرب اُسی رتبہ کا ایک مقطع ہوتا ہے۔

ہم یہ مسئلہ تیسرے رتبہ کے دو مقطعوں کے لئے ثابت کرینگے۔ طالب علم کو ثبوت کی نوعیت سے معلوم ہو جائیگا کہ یہ عام صورت میں بھی اُسی طرح اطلاق پذیر ہے۔ یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ دو مقطعوں (ا$_1$ ب$_2$ ج$_3$) اور (عہ$_1$ بہ$_2$ جہ$_3$) کا حاصل ضرب ہے

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1\text{ع}_1+\text{ب}_1\text{ہ}_1+\text{ج}_1\text{جہ}_1 & \text{ا}_1\text{ع}_2+\text{ب}_1\text{ہ}_2+\text{ج}_1\text{جہ}_2 & \text{ا}_1\text{ع}_3+\text{ب}_1\text{ہ}_3+\text{ج}_1\text{جہ}_3 \\ \text{ا}_2\text{ع}_1+\text{ب}_2\text{ہ}_1+\text{ج}_2\text{جہ}_1 & \text{ا}_2\text{ع}_2+\text{ب}_2\text{ہ}_2+\text{ج}_2\text{جہ}_2 & \text{ا}_2\text{ع}_3+\text{ب}_2\text{ہ}_3+\text{ج}_2\text{جہ}_3 \\ \text{ا}_3\text{ع}_1+\text{ب}_3\text{ہ}_1+\text{ج}_3\text{جہ}_1 & \text{ا}_3\text{ع}_2+\text{ب}_3\text{ہ}_2+\text{ج}_3\text{جہ}_2 & \text{ا}_3\text{ع}_3+\text{ب}_3\text{ہ}_3+\text{ج}_3\text{جہ}_3 \end{vmatrix}$$

جس کے عناصر مقطع ($\text{ا}_1 \; \text{ب}_2 \; \text{ج}_3$) کی کسی صف کے عناصر کو مقطع ($\text{ع}_1 \; \text{ہ}_2 \; \text{جہ}_3$) کی کسی صف کے متناظر عناصر سے ضرب دینے سے جو حاصل ضرب ملتے ہیں اُن کے مجموعے ہیں ۔

اب چونکہ ہر ستون تین رقموں پر مشتمل ہے یہ مقطع دوسرے ستائیس مقطعوں کے مجموعہ میں پھیلایا جا سکتا ہے (دفعہ ۱۳۸)۔ اب یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ جب ان میں سے کسی ایک کو لکھ لیا جاتا ہے تو ہر ستون سے ایک مشترک جزو ضربی نکل سکتا ہے اور یہ کہ جزوی مقطعات میں سے چند ایسے مقطع بھی ہیں کہ مشترک اجزائے ضربی کو علیحدہ کر دینے کے بعد انہیں دو (یا زیادہ) ستون متماثل ہو جاتے ہیں ۔ جو مقطعات اس طور پر معدوم نہیں ہوتے اِن کو آسانی
(29) کے ساتھ چن لیا جا سکتا ہے ۔ مثلاً اگر ہم پہلے ستون سے پہلا انتصابی خط لیں اور اس کے ساتھ دوسرے ستون سے پہلا خط تو ہمیں معدوم ہونیوالا مقطع ملیگا۔ اس لئے ہمیں دوسرے ستون سے دوسرا خط اور اس کے ساتھ تیسرے ستون سے تیسرا خط لینا ہوگا تاکہ وہ مقطع حاصل ہو جو معدوم نہیں ہوتا ۔ پہلے ستون کے پہلے خط کو دوسرے ستون کے تیسرے خط اور تیسرے ستون کے دوسرے خط کے ساتھ لینے سے بھی معدوم نہ ہونیوالا مقطع حاصل ہوگا ۔ ستونوں کے مشترک اجزائے ضربی کو باہر نکال لینے سے اِن دو مقطعوں کو یوں لکھا جا سکتا ہے :-

$$\text{ع}_1\text{ہ}_2\text{جہ}_3 \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} + \text{ع}_1\text{جہ}_2\text{ہ}_3 \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ج}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ج}_2 & \text{ب}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ج}_3 & \text{ب}_3 \end{vmatrix}$$

اسی طرح باری باری سے پہلے ستون کے باقی دوسرے خطوں کو لینے سے ہم چار اور مقطعے حاصل کرتے ہیں جو معدوم نہیں ہوتے پس کل چھ ارقام ہیں اور یہ ظاہر ہے کہ اُنمیں سے ہر ایک میں (اب۲ ج۳) ایک جزو ضربی ہے۔ اِس جزو ضربی کو باہر نکالنے سے اِن چھ رقموں کا مجموعہ باقی رہتا ہے:۔

عہ۱ بہ۲ جہ۳ − عہ۱ بہ۳ جہ۲ − عہ۲ بہ۱ جہ۳ + عہ۳ بہ۱ جہ۲ + عہ۲ بہ۳ جہ۱ − عہ۳ بہ۲ جہ۱

اور یہ مقطع (عہ۱ بہ۲ جہ۳) ہے۔ اسلئے ہم نے ثابت کر دیا کہ مندرجہ بالا مقطع دو دئے ہوئے مقطعوں کا حاصل ضرب ہے۔

دئے ہوئے مقطعوں میں سے کسی میں ستونوں کی بجائے صفوں کو لکھا جا سکتا ہے۔ اس لئے حاصل ضرب کو متعدد مختلف شکلوں میں مقطع کے طور پر لکھا جا سکتا ہے لیکن ظاہر ہے کہ اِن کو پھیلانے سے وہی قیمت حاصل ہوگی۔

۱۴۲ ۔ مقطعوں کا حاصل ضرب (مسلسل) ۔ لاپلاس کے پھیلاؤ کے طریقہ سے جسکی تشریح دفعہ ۱۲۵ میں ہو چکی ہے دفعہ گذشتہ کے مسئلہ کے ثبوت کا ایک اور طریقہ ملتا ہے جس میں ایک ہی رتبہ کے دو دئے ہوئے مقطعوں کا حاصل ضرب ایک مقطع کی شکل میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

اس ثبوت کی نوعیت کافی طور پر ذیل کے تیسرے رتبہ کے دو مقطعوں پر استعمال کرنے سے واضح ہو جائیگی۔

دو مقطعوں (ا۱ ب۲ ج۳) اور (عہ۱ بہ۲ جہ۳) کا حاصل ضرب صریحاً (80)

مقطع

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 & 0 & 0 & 0 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 & 0 & 0 & 0 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \text{عہ}_1 & \text{عہ}_2 & \text{عہ}_3 \\ 0 & -1 & 0 & \text{بہ}_1 & \text{بہ}_2 & \text{بہ}_3 \\ 0 & 0 & -1 & \text{جہ}_1 & \text{جہ}_2 & \text{جہ}_3 \end{vmatrix}$$

کے مساوی ہے (مثال ۳ دفعہ ۱۳۵)۔

اس مقطع میں پہلے ستون کو عہ_1 سے، دوسرے کو بہ_1 سے، تیسرے کو جہ_1 سے ضرب دیکران کے مجموعہ کو چوتھے ستون میں جمع کرو۔ پھر پہلے ستون کو عہ_2 سے، دوسرے کو بہ_2 سے، تیسرے کو جہ_2 سے ضرب دیکران کے مجموعہ کو پانچویں ستون میں جمع کرو۔ پھر پہلے ستون کو عہ_3 سے، دوسرے کو بہ_3 سے، تیسرے کو جہ_3 سے ضرب دیکران کے مجموعہ کو چھٹے ستون میں جمع کرو۔ تب مقطع ہوجاتا ہے

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 & \text{ا}_1\text{عہ}_1+\text{ب}_1\text{بہ}_1+\text{ج}_1\text{جہ}_1 & \text{ا}_1\text{عہ}_2+\text{ب}_1\text{بہ}_2+\text{ج}_1\text{جہ}_2 & \text{ا}_1\text{عہ}_3+\text{ب}_1\text{بہ}_3+\text{ج}_1\text{جہ}_3 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 & \text{ا}_2\text{عہ}_1+\text{ب}_2\text{بہ}_1+\text{ج}_2\text{جہ}_1 & \text{ا}_2\text{عہ}_2+\text{ب}_2\text{بہ}_2+\text{ج}_2\text{جہ}_2 & \text{ا}_2\text{عہ}_3+\text{ب}_2\text{بہ}_3+\text{ج}_2\text{جہ}_3 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 & \text{ا}_3\text{عہ}_1+\text{ب}_3\text{بہ}_1+\text{ج}_3\text{جہ}_1 & \text{ا}_3\text{عہ}_2+\text{ب}_3\text{بہ}_2+\text{ج}_3\text{جہ}_2 & \text{ا}_3\text{عہ}_3+\text{ب}_3\text{بہ}_3+\text{ج}_3\text{جہ}_3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

اور یہ مقطع، مقطع

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

(جو -۱ کے مساوی ہے)

اور متمم صغیر مقطع کے حاصل ضرب (ٹھیک علامت کے ساتھ) کے مساوی ہے اور یہ حاصل ضرب وہی مقطع ہے جو دفعہ ماسبق میں حاصل ہوا تھا۔ اب یہ امر کہ حاصل ضرب کی علامت منفی ہونی چاہئیے اس طرح واضح ہے کہ پہلی تین صفوں کو نیچے یہاں تک حرکت دینی پڑتی ہے کہ زیر بحث دو صغیر مقطعوں کے وتر خود مقطع کا وتر بن جائیں۔ طالب علم کو یہ دیکھنے میں کوئی مشکل پیش نہیں آئیگی کہ عام صورت میں اس قسم کے ہٹاؤں کی تعداد طاق ہے اگر دئے ہوئے مقطعوں کا رتبہ طاق ہو اور جفت ہے اگر مقطعوں کا رتبہ جفت ہو۔ پس دفعہ ۱۴۱ کے حاصل ضربی مقطع کی علامت ہمیشہ مثبت ہوتی ہے۔

اس دفعہ اور دفعہ گذشتہ کا اہم مسئلہ مندرجہ ذیل مثالوں سے بخوبی واضح ہو جائیگا۔

مثالیں (31)

۱ ۔ ثابت کرو کہ دو مقطعوں

$$\begin{vmatrix} \text{ا} + \text{خ ب} & \text{ج} + \text{خ د} \\ -\text{ج} + \text{خ د} & \text{ا} - \text{خ ب} \end{vmatrix} ،\quad \begin{vmatrix} \text{اَ} - \text{خ بَ} & \text{جَ} - \text{خ دَ} \\ -\text{جَ} - \text{خ دَ} & \text{اَ} + \text{خ بَ} \end{vmatrix}$$

کا حاصل ضرب (جہاں $\text{خ} = \sqrt{-1}$) شکل

$$\begin{vmatrix} \text{د} - \text{خ ج} & \text{ب} - \text{خ ا} \\ -\text{ب} - \text{خ ا} & \text{د} + \text{خ ج} \end{vmatrix}$$

میں لکھا جا سکتا ہے جہاں

$\textbf{ا} \equiv \text{ب}\,\text{ج}' - \text{ب}'\,\text{ج} + \text{ا}\,\text{د}' - \text{ا}'\,\text{د}$ ، $\textbf{ب} \equiv \text{ج}\,\text{ا}' - \text{ج}'\,\text{ا} + \text{ب}\,\text{د}' - \text{ب}'\,\text{د}$ ،

$\textbf{ج} \equiv \text{ا}\,\text{ب}' - \text{ا}'\,\text{ب} + \text{ج}\,\text{د}' - \text{ج}'\,\text{د}$ ، $\textbf{د} \equiv \text{ا}\,\text{ا}' + \text{ب}\,\text{ب}' + \text{ج}\,\text{ج}' + \text{د}\,\text{د}'$ ،

اور پھر یولر کا یہ مسئلہ ثابت کرو :-

$$(\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2 + \text{د}^2)\,(\text{ا}'^2 + \text{ب}'^2 + \text{ج}'^2 + \text{د}'^2)$$

$$\equiv (\text{ا}\,\text{ا}' + \text{ب}\,\text{ب}' + \text{ج}\,\text{ج}' + \text{د}\,\text{د}')^2 + (\text{ب}\,\text{ج}' - \text{ب}'\,\text{ج} + \text{ا}\,\text{د}' - \text{ا}'\,\text{د})^2$$
$$+ (\text{ج}\,\text{ا}' - \text{ج}'\,\text{ا} + \text{ب}\,\text{د}' - \text{ب}'\,\text{د})^2 + (\text{ا}\,\text{ب}' - \text{ا}'\,\text{ب} + \text{ج}\,\text{د}' - \text{ج}'\,\text{د})^2$$

یعنے دو مجموعوں کا حاصل ضرب جنمیں سے ہر ایک چار مربعوں کا مجموعہ ہے چار مربعوں کے مجموعہ کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے -

۲ - تیسرے رتبہ کے مقطع کے مربع کے لئے حسب ذیل جملہ ثابت کرو:-

$$2\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ا}' & \text{ب}' & \text{ج}' \\ \text{ا}'' & \text{ب}'' & \text{ج}'' \end{vmatrix}^2$$

$$= \begin{vmatrix} 2(\text{ا}\,\text{ج} - \text{ب}^2) & \text{ا}\,\text{ج}' + \text{ا}'\,\text{ج} - 2\,\text{ب}\,\text{ب}' & \text{ا}\,\text{ج}'' + \text{ا}''\,\text{ج} - 2\,\text{ب}\,\text{ب}'' \\ \text{ا}\,\text{ج}' + \text{ا}'\,\text{ج} - 2\,\text{ب}\,\text{ب}' & 2(\text{ا}'\,\text{ج}' - \text{ب}'^2) & \text{ا}'\,\text{ج}'' + \text{ا}''\,\text{ج}' - 2\,\text{ب}'\,\text{ب}'' \\ \text{ا}\,\text{ج}'' + \text{ا}''\,\text{ج} - 2\,\text{ب}\,\text{ب}'' & \text{ا}'\,\text{ج}'' + \text{ا}''\,\text{ج}' - 2\,\text{ب}'\,\text{ب}'' & 2(\text{ا}''\,\text{ج}'' - \text{ب}''^2) \end{vmatrix}$$

یہ ثابت ہو جاتا ہے اگر ہم دو مقطعوں

$$\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ا}' & \text{ب}' & \text{ج}' \\ \text{ا}'' & \text{ب}'' & \text{ج}'' \end{vmatrix} ، \begin{vmatrix} \text{ج} & -2\,\text{ب} & \text{ا} \\ \text{ج}' & -2\,\text{ب}' & \text{ا}' \\ \text{ج}'' & -2\,\text{ب}'' & \text{ا}'' \end{vmatrix}$$

کو ضرب دیں جو صرف جزو ضربی ۲ سے متفاوت ہیں -

۳ - متماثلہ ذیل ثابت کرو :-

$$\begin{vmatrix} 2\,\text{ب}\,\text{ج} - \text{ا}^2 & \text{ج}^2 & \text{ب}^2 \\ \text{ج}^2 & 2\,\text{ج}\,\text{ا} - \text{ب}^2 & \text{ا}^2 \\ \text{ب}^2 & \text{ا}^2 & 2\,\text{ا}\,\text{ب} - \text{ج}^2 \end{vmatrix} \equiv (\text{ا}^3 + \text{ب}^3 + \text{ج}^3 - 3\,\text{ا}\,\text{ب}\,\text{ج})^2$$

یہ آسانی کے ساتھ ثابت ہوتا ہے اگر ہم دو متماثل مقطعوں (32)

$$\begin{vmatrix} \text{ج} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{ا} & \text{ج} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{ا} & \text{ج} \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ج} & -\text{ا} \\ \text{ج} & \text{ا} & -\text{ب} \\ \text{ا} & \text{ب} & -\text{ج} \end{vmatrix}$$

کو باہم ضرب دیں ۔

۴ ۔ دفعہ ۱۳۲ مثال ۱۰ کے مقطع کا مربع لیکر چار درجے کی اصلوں عہ، یہ، جہ، ضہ کے درمیان ذیل کا رشتہ ثابت کرو جہاں س_0، س_1، س_2 وغیرہ کے وہی معنی ہیں جو جلد اول کے آٹھویں باب میں بیان کئے گئے ہیں :-

$$\begin{vmatrix} \text{س}_3 & \text{س}_2 & \text{س}_1 & \text{س}_0 \\ \text{س}_4 & \text{س}_3 & \text{س}_2 & \text{س}_1 \\ \text{س}_5 & \text{س}_4 & \text{س}_3 & \text{س}_2 \\ \text{س}_6 & \text{س}_5 & \text{س}_4 & \text{س}_3 \end{vmatrix} = (\text{یہ} - \text{جہ})^2 (\text{عہ} - \text{ضہ})^2 (\text{جہ} - \text{عہ})^2 (\text{یہ} - \text{ضہ})^2 \times (\text{عہ} - \text{یہ})^2 (\text{جہ} - \text{ضہ})^2$$

طالب علم کو کسی درجہ کی مساوات کے لئے ایک متناظر مقطع (اصلوں کی قوتوں کے مجموعوں کی رقوم میں) جو فرقوں کے مربعوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے لکھ لینے میں کوئی دقت محسوس نہ ہوگی ۔

۵ ۔ مقطع

$$\begin{vmatrix} \text{لا}^3 & \text{س}_3 & \text{س}_4 & \text{س}_5 & \text{س}_6 \\ \text{لا}^2 & \text{س}_2 & \text{س}_3 & \text{س}_4 & \text{س}_5 \\ \text{لا} & \text{س}_1 & \text{س}_2 & \text{س}_3 & \text{س}_4 \\ 1 & \text{س}_0 & \text{س}_1 & \text{س}_2 & \text{س}_3 \\ 0 & 1 & \text{ما} & \text{ما}^2 & \text{ما}^3 \end{vmatrix}$$

کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرو جبکہ س، س١، س٢ وغیرہ تین مقداروں عہ، بہ، جہ کی قوتوں کے مجموعے ہیں۔ یہ مقطع، دو مقطعوں

عہ³	بہ³	جہ³	لا³	۰
عہ²	بہ²	جہ²	لا²	۰
عہ	بہ	جہ	لا	۰
١	١	١	١	۰
۰	۰	۰	۰	١

،

عہ³	بہ³	جہ³	۰	ما³
عہ²	بہ²	جہ²	۰	ما²
عہ	بہ	جہ	۰	ما
١	١	١	۰	١
۰	۰	۰	١	۰

کا حاصل ضرب ہے اور انمیں سے ہر ایک آسانی کے ساتھ اجزائے ضربی میں تحلیل ہو سکتا ہے۔

(33) ٦۔ مثال ۲۸ صفحہ ۸۰ جلد اول کا نتیجہ ذیل کے دو مقطعوں کو ضرب دیکر ثابت کرو:-

لا	ما	ی
ی	لا	ما
ما	ی	لا

،

لاَ	ماَ	یَ
یَ	لاَ	ماَ
ماَ	یَ	لاَ

٧۔ ثابت کرو کہ مختلف رتبوں کے دو مقطعوں کو ضرب دیا جا سکتا ہے کیونکہ ان کے رتبہ مساوی بنائے جا سکتے ہیں چنانچہ کسی مقطع کا رتبہ، ستونوں کی کوئی تعداد اور صفوں کی مساوی تعداد جمع کرنے سے بڑھایا جا سکتا ہے جبکہ جمع کردہ ارقام میں وتری ارقام اکائیاں ہوں اور باقی سب صفر۔ مثلاً

ا١	ب١
ا٢	ب٢

کو لکھا جا سکتا ہے

١	۰	۰	۰
۰	١	۰	۰
۰	۰	ا١	ب١
۰	۰	ا٢	ب٢

جمع کردہ عناصر کا صرف یہ اثر ہوگا کہ مقطع اکائی سے ضرب کھا جائیگا۔

زیادہ عام صورت میں جمع کردہ عناصر کا ایک جُٹ (یعنی وہ جو وتر کی داہنی طرف یا بائیں طرف ہوں) کسی مقداروں کا لیا جا سکتا ہے بشرطیکہ باقی دوسرا جٹ صفروں پر مشتمل ہو۔ چنانچہ (ا, ب۲) کو ذیل کی دو شکلوں میں سے کسی ایک میں لکھا جا سکتا ہے :۔

ا	عہ	بہ	جہ
.	ا	ضہ	صہ
.	.	$ا_1$	$ب_1$
.	.	$ا_2$	$ب_2$

،

ا	عہ	بہ	جہ
.	ا	.	.
.	ضہ	$ا_1$	$ب_1$
.	صہ	$ا_2$	$ب_2$

دفعہ ۱۳۴ کے پھیلاؤ کے ذریعہ یہ ظاہر ہے۔

۱۴۳۔ مستطیلی آراستے۔ وہ آراستے جنمیں صفوں کی تعداد ستونوں کی تعداد کے مساوی نہ ہو مستطیلی کہا جا سکتا ہے وہ خود کسی معین تفاعل کو تعبیر نہیں کرتے۔ لیکن اگر ایک ہی ابعاد کے دو ایسے آراستے دیے جائیں تو دفعہ ۱۴۱ کے عمل سے انکے ذریعہ ہم ایک مقطع اخذ کر سکتے ہیں جسکی قیمت کی اب ہم تحقیق کرینگے۔

(۱) جب ستونوں کی تعداد صفوں کی تعداد سے متجاوز ہو۔

تمثیلاً دو مستطیلی آراستے لو

$ا_1$	$ب_1$	$ج_1$	$د_1$	(۱)
$ا_2$	$ب_2$	$ج_2$	$د_2$	

$عہ_1$	$بہ_1$	$جہ_1$	$ضہ_1$	(۲)
$عہ_2$	$بہ_2$	$جہ_2$	$ضہ_2$	

اور انپر وہی عمل کرو جو دو مقطعوں کو ضرب دینے میں کیا جاتا ہے (34)

تو ہمیں مقطع

$ا_1عہ_1 + ب_1بہ_1 + ج_1جہ_1 + د_1ضہ_1$	$ا_1عہ_2 + ب_1بہ_2 + ج_1جہ_2 + د_1ضہ_2$
$ا_2عہ_1 + ب_2بہ_1 + ج_2جہ_1 + د_2ضہ_1$	$ا_2عہ_2 + ب_2بہ_2 + ج_2جہ_2 + د_2ضہ_2$

حاصل ہوتا ہے۔ اِسکی قیمت آسانی کے ساتھ معلوم ہو جاتی ہے

$$(\text{ا}_1\ \text{ب}_2)(\text{عہ}_1\ \text{بہ}_2) + (\text{ا}_1\ \text{ج}_2)(\text{عہ}_1\ \text{جہ}_2) + (\text{ا}_1\ \text{د}_2)(\text{عہ}_1\ \text{ضہ}_2)$$

$$+ (\text{ب}_1\ \text{ج}_2)(\text{بہ}_1\ \text{جہ}_2) + (\text{ب}_1\ \text{د}_2)(\text{بہ}_1\ \text{ضہ}_2) + (\text{ج}_1\ \text{د}_2)(\text{جہ}_1\ \text{ضہ}_2)$$

یعنی ایک آراستے سے جتنے مقطع بن سکتے ہیں (صفوں کی تعداد کے مساوی ستونوں کی تعداد لینے سے) اُنکو دوسرے آراستے سے جو متناظر مقطع بنتے ہیں اُن کے ساتھ ضرب دو اور ایسے سب حاصل ضربوں کو جمع کرو تو مندرجۂ بالا قیمت اس مجموعہ کے مساوی ہے۔

اس مسئلہ کا دوسرا ثبوت جو دفعہ ۴۲ میں بیان کردہ مقطعوں کی ضرب کے مماثل ہے مندرجۂ ذیل مثالوں میں ملیگا۔ اِن دونوں ثبوتوں میں سے کسی کو بھی آسانی کے ساتھ عام صورت کے لئے وسعت دیجا سکتی ہے۔

(۲) جب صفوں کی تعداد ستونوں کی تعداد سے بڑی ہو تو حاصل شدنی مقطع معدوم ہو جاتا ہے۔

تمثیلاً دو آراستے

$$\left.\begin{matrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 \end{matrix}\right\} (1) \qquad \left.\begin{matrix} \text{عہ}_1 & \text{بہ}_1 \\ \text{عہ}_2 & \text{بہ}_2 \\ \text{عہ}_3 & \text{بہ}_3 \end{matrix}\right\} (2)$$

لو اور ضرب کے عمل کی تکمیل کرو تو مقطع ذیل حاصل ہوتا ہے:-

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1\text{عہ}_1+\text{ب}_1\text{بہ}_1 & \text{ا}_1\text{عہ}_2+\text{ب}_1\text{بہ}_2 & \text{ا}_1\text{عہ}_3+\text{ب}_1\text{بہ}_3 \\ \text{ا}_2\text{عہ}_1+\text{ب}_2\text{بہ}_1 & \text{ا}_2\text{عہ}_2+\text{ب}_2\text{بہ}_2 & \text{ا}_2\text{عہ}_3+\text{ب}_2\text{بہ}_3 \\ \text{ا}_3\text{عہ}_1+\text{ب}_3\text{بہ}_1 & \text{ا}_3\text{عہ}_2+\text{ب}_3\text{بہ}_2 & \text{ا}_3\text{عہ}_3+\text{ب}_3\text{بہ}_3 \end{vmatrix}$$

اب یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ یہ مقطع وہی ہے جو پیدا ہوتا اگر صفروں کا ایک ستون دئے ہوئے آرا ستون میں سے ہر ایک میں جمع کر دیا جاتا اور پھر اس طور پر بنے ہوئے مقطعوں کو ضرب دیا جاتا۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ مندرجۂ بالا مقطع معدوم ہوتا ہے۔

اسی طرح کا ثبوت عام صورت میں دیا جا سکتا ہے۔ کسی مثال میں صرف اس بات کی ضرورت ہے کہ صفروں کے ستون ہر آراستے میں جمع کر دئے جائیں تا کہ ستونوں کی تعداد صفوں کی تعداد کے مساوی ہو جائے اور پھر ان دو مقطعوں کو ضرب دیدیا جائے۔

مثالیں (85)

۱۔ دو آرا ستوں۔

$$\left.\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{عہ} & \text{بہ} & \text{جہ} \end{matrix}\right\} (1) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{عہ} & \text{بہ} & \text{جہ} \end{vmatrix} (2)$$

سے ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} 3 & \text{عہ}+\text{بہ}+\text{جہ} \\ \text{عہ}+\text{بہ}+\text{جہ} & \text{عہ}^2+\text{بہ}^2+\text{جہ}^2 \end{vmatrix} \equiv (\text{عہ}-\text{بہ})^2+(\text{عہ}-\text{جہ})^2+(\text{بہ}-\text{جہ})^2$$

۲۔ دو آرا ستوں

$$\left.\begin{matrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ا}' & \text{ب}' & \text{ج}' \end{matrix}\right\} (1) \qquad \left.\begin{matrix} \text{ج} & -2\text{ب} & \text{ا} \\ \text{ج}' & -2\text{ب}' & \text{ا}' \end{matrix}\right\} (2)$$

سے ثابت کرو کہ

$$4(\text{ا}\text{ج}-\text{ب}^2)(\text{ا}'\text{ج}'-\text{ب}'^2)-(\text{ا}\text{ج}'+\text{ا}'\text{ج}-2\text{ب}\text{ب}')^2$$
$$\equiv 4(\text{ب}\text{ج}'-\text{ب}'\text{ج})(\text{ا}\text{ب}'-\text{ا}'\text{ب})-(\text{ا}\text{ج}'-\text{ا}'\text{ج})^2$$

۳ — آراستے

$$\left\{\begin{matrix}\text{ا} & \text{ب} & \text{ج}\\ \text{ا}' & \text{ب}' & \text{ج}'\end{matrix}\right\}$$

کا مربع لیکر ثابت کرو کہ

$$(\text{ا}^2+\text{ب}^2+\text{ج}^2)(\text{ا}'^2+\text{ب}'^2+\text{ج}'^2)\equiv(\text{ا}\text{ا}'+\text{ب}\text{ب}'+\text{ج}\text{ج}')^2$$
$$+(\text{ب}\text{ج}'-\text{ب}'\text{ج})^2+(\text{ج}\text{ا}'-\text{ج}'\text{ا})^2+(\text{ا}\text{ب}'-\text{ا}'\text{ب})^2$$

۴ — آراستے

$$\left\{\begin{matrix}\text{ا} & \text{ب} & \text{ج} & \text{د}\\ \text{ا}' & \text{ب}' & \text{ج}' & \text{د}'\end{matrix}\right\}$$

کا مربع لیکر دفعہ ۲۴۲ مثال ۱ کے نتیجہ کی تصدیق کرو۔

۵ — متماثلہ ذیل کو ثابت کرو:—

$$\begin{vmatrix}(\text{ا}_1-\text{ب}_1)^2 & (\text{ا}_1-\text{ب}_2)^2 & (\text{ا}_1-\text{ب}_3)^2 & (\text{ا}_1-\text{ب}_4)^2\\ (\text{ا}_2-\text{ب}_1)^2 & (\text{ا}_2-\text{ب}_2)^2 & (\text{ا}_2-\text{ب}_3)^2 & (\text{ا}_2-\text{ب}_4)^2\\ (\text{ا}_3-\text{ب}_1)^2 & (\text{ا}_3-\text{ب}_2)^2 & (\text{ا}_3-\text{ب}_3)^2 & (\text{ا}_3-\text{ب}_4)^2\\ (\text{ا}_4-\text{ب}_1)^2 & (\text{ا}_4-\text{ب}_2)^2 & (\text{ا}_4-\text{ب}_3)^2 & (\text{ا}_4-\text{ب}_4)^2\end{vmatrix}\equiv 0$$

اِس متماثلہ کو حسب ذیل دو آراستوں کو باہم ضرب دینے سے ثابت کیا جاسکتا ہے۔

$$\left.\begin{matrix}\text{ا}_1^2 & \text{ا}_1 & 1\\ \text{ا}_2^2 & \text{ا}_2 & 1\\ \text{ا}_3^2 & \text{ا}_3 & 1\\ \text{ا}_4^2 & \text{ا}_4 & 1\end{matrix}\right\}(1) \qquad \left\{\begin{matrix}1 & -2\text{ب}_1 & \text{ب}_1^2\\ 1 & -2\text{ب}_2 & \text{ب}_2^2\\ 1 & -2\text{ب}_3 & \text{ب}_3^2\\ 1 & -2\text{ب}_4 & \text{ب}_4^2\end{matrix}\right\}(2)$$

(86)

۶ — ن ویں درجہ کی عام مساوات کے لئے جسکی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ، وغیرہ ہوں اور اصلوں کی قوتوں کے مجموعے س_0، س_1، س_2 وغیرہ، ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} \text{س}_0 & \text{س}_1 \\ \text{س}_1 & \text{س}_2 \end{vmatrix} = \Sigma\,(\text{عہ} - \text{بہ})^2$$

یہ فوراً واضح ہو جاتا ہے اگر ہم حسب ذیل آراستے کا مربع لیں:-

$$\left\{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ \text{عہ} & \text{بہ} & \text{جہ} & \text{ضہ} & \text{صہ} & \cdot & \end{matrix}\right\}$$

۷ — عام مساوات کے لئے اسی طرح ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} \text{س}_0 & \text{س}_1 & \text{س}_2 \\ \text{س}_1 & \text{س}_2 & \text{س}_3 \\ \text{س}_2 & \text{س}_3 & \text{س}_4 \end{vmatrix} = \Sigma\,(\text{بہ} - \text{جہ})^2(\text{جہ} - \text{عہ})^2(\text{عہ} - \text{بہ})^2$$

پچھلی مثال کی طرح یہ بھی آسانی کے ساتھ ثابت ہوتا ہے اگر ہم ایک مناسب آراستے کا مربع لیں ۔ نیز اس قسم کے روابط کا سلسلہ قایم کرنے میں یہی عمل اختیار کیا جا سکتا ہے ۔ جب آراستے میں صفوں کی تعداد مساوات کے درجہ کے مساوی ہوتی ہے تو مقطع کی قیمت اصلوں کے فرقوں کے مربعوں کا حاصل ضرب ہوتی ہے (دیکھو مثال ۴ دفعہ ۱۴۲)۔ جب صفوں کی تعداد مساوات کے درجہ سے بڑھ جائے تو متناظر مقطع کی قیمت صفر ہے ۔ مثلاً چوتھے رتبہ کا مقطع جسکا حوالہ اوپر دیا گیا ہے دوسرے اور تیسرے درجہ کی مساواتوں کے لئے معدوم ہوتا ہے ۔

۸ — عام مساوات کے لئے ثابت کرو

$$\begin{vmatrix} \text{س}_0 & \text{س}_1 & \text{س}_2 & \text{س}_3 \\ \text{س}_1 & \text{س}_2 & \text{س}_3 & \text{س}_4 \\ \text{س}_2 & \text{س}_3 & \text{س}_4 & \text{س}_5 \\ 1 & \text{لا} & \text{لا}^2 & \text{لا}^3 \end{vmatrix}$$

$$= \underset{\text{دو آراستوں}}{\Sigma} (\text{بہ}-\text{جہ})^2(\text{جہ}-\text{عہ})^2(\text{عہ}-\text{بہ})^2(\text{لا}-\text{عہ})(\text{لا}-\text{بہ})(\text{لا}-\text{جہ})$$

$$\begin{Bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ \text{عہ} & \text{بہ} & \text{جہ} & ۰ & ۰ \\ \text{عہ}^2 & \text{بہ}^2 & \text{جہ}^2 & ۰ & ۰ \end{Bmatrix} ، \begin{Bmatrix} \text{لا}-\text{عہ} & \text{لا}-\text{بہ} & \text{لا}-\text{جہ} \\ \text{عہ}(\text{لا}-\text{عہ}) & \text{بہ}(\text{لا}-\text{بہ}) & \text{جہ}(\text{لا}-\text{جہ}) \\ \text{عہ}^2(\text{لا}-\text{عہ}) & \text{بہ}^2(\text{لا}-\text{بہ}) & \text{جہ}^2(\text{لا}-\text{جہ}) \end{Bmatrix}$$

کو ضرب دیکر ہم ثابت کرتے ہیں کہ

$$\begin{vmatrix} \text{س}_0\text{لا}-\text{س}_1 & \text{س}_1\text{لا}-\text{س}_2 & \text{س}_2\text{لا}-\text{س}_3 \\ \text{س}_1\text{لا}-\text{س}_2 & \text{س}_2\text{لا}-\text{س}_3 & \text{س}_3\text{لا}-\text{س}_4 \\ \text{س}_2\text{لا}-\text{س}_3 & \text{س}_3\text{لا}-\text{س}_4 & \text{س}_4\text{لا}-\text{س}_5 \end{vmatrix}$$

Σ کے مساوی ہے اور اسکو آسانی کے ساتھ مجوزہ مقطع میں مستحیل کیا جا سکتا ہے۔

عام طور پر اسی طریقہ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ (پ + ۱) ویں رتبہ کا ایسی ہی شکل کا مقطع متناظر متشاکل تفاعل کے مساوی ہے جسکی ہر رقم میں ابتدائی مساوات کے پ اجزائے ضربی شامل ہوتے ہیں جبکہ انکو پ اصلوں کے مربع دار فرقوں کے حاصل ضرب سے ضرب دیدیا جائے۔

(37) ۹ ۔ ذیل کے مقطع کی قیمت معلوم کرو اور پھر اس سے پہلی قسم کے آراستوں کی خاصیت کا ایک اور ثبوت اخذ کرو:۔

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 & \text{د}_1 & ۰ & ۰ \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 & \text{د}_2 & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & \text{عہ}_1 & \text{عہ}_2 \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & \text{بہ}_1 & \text{بہ}_2 \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & \text{جہ}_1 & \text{جہ}_2 \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & \text{ضہ}_1 & \text{ضہ}_2 \end{vmatrix}$$

لاپلاس کے طریقہ سے اسکو پھیلا کر ہم آسانی کے ساتھ یہ معلوم کر لیتے ہیں کہ

اسکی قیمت ≡ (ا₁ ب₂) (ع₁ ب₂) ہے جو صفحہ ۵۳ کے چھ حاصل ضربوں پر مشتمل ہے ۔ اور مقطع میں دفعہ ۱۴۲ کی طرح پہلے ستون کو ع₁ سے، دوسرے کو ب₁ سے، وغیرہ ضرب دیکر ان کے مجموعہ کو پانچویں ستون میں جمع کر کے ہم اس مقطع کو دوسرے رتبہ کے مقطع میں تحویل کر دیتے ہیں (دیکھو دفعہ ۱۴۳ (ا) میں ابتداً حاصل کردہ مقطع) ۔

۱۴۴ ۔ خطی مساواتوں کے نظام کا حل ۔ ہم نے دفعہ ۱۳۴ میں دیکھا ہے کہ مقطع کو کسی صف یا ستون کے عناصر کے ایک خطی متجانس تفاعل کے طور پر پھیلایا جا سکتا ہے جس میں کسی عنصر کا سر اپنی مناسب علامت کے ساتھ وہ صغیر مقطع ہوتا ہے جو اس عنصر کے جواب میں ہے مثلاً

$$\Delta = \text{ا}_1 \textbf{ا}_1 + \text{ا}_2 \textbf{ا}_2 + \text{ا}_3 \textbf{ا}_3 + \ldots\ldots$$

اب سر $\textbf{ا}_1$، $\textbf{ا}_2$، $\textbf{ا}_3$ وغیرہ دوسرے ستونوں کے عناصر کے ساتھ ن ۔ ۱ متماثل رشتوں سے مربوط ہوتے ہیں یعنے

$$\text{ب}_1 \textbf{ا}_1 + \text{ب}_2 \textbf{ا}_2 + \text{ب}_3 \textbf{ا}_3 + \ldots \equiv ٠$$

$$\text{ج}_1 \textbf{ا}_1 + \text{ج}_2 \textbf{ا}_2 + \text{ج}_3 \textbf{ا}_3 + \ldots \equiv ٠\text{، وغیرہ}$$

کیونکہ ان میں سے ہر ایک مساوات کی سیدھی طرف کا جملہ، مقطع میں ا₁، ا₂، ا₃ وغیرہ کی بجائے متناظر ستون کے عناصر درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے اور اس لئے اسکو معدوم ہونا چاہئے ۔

ان رشتوں کی مدد سے ہم خطی مساواتوں کے نظام کا حل لکھدے سکتے ہیں ۔ چنانچہ تین مجہول مقداروں لا، ما، ی کی صورت پر اس کا اطلاق عام طریق عمل کو واضح کر دینے کے لئے کافی ہے ۔

فرض کرو کہ مساواتیں ہیں

$$\text{ا}_1\,\text{لا} + \text{ب}_1\,\text{ما} + \text{ج}_1\,\text{ی} = \text{م}_1$$
$$\text{ا}_2\,\text{لا} + \text{ب}_2\,\text{ما} + \text{ج}_2\,\text{ی} = \text{م}_2$$
$$\text{ا}_3\,\text{لا} + \text{ب}_3\,\text{ما} + \text{ج}_3\,\text{ی} = \text{م}_3$$

پہلی مساوات کو $\mathbf{ا}_1$ سے، دوسری کو $\mathbf{ا}_2$ سے، تیسری کو $\mathbf{ا}_3$ سے (38)
ضرب دو اور جمع کرو تو ما اور ی کے سر متذکرۂ بالا ثابت شدہ رشتوں کی وجہ سے معدوم ہو جاتے ہیں اور ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(\text{ا}_1\mathbf{ا}_1 + \text{ا}_2\mathbf{ا}_2 + \text{ا}_3\mathbf{ا}_3)\,\text{لا} = \text{م}_1\mathbf{ا}_1 + \text{م}_2\mathbf{ا}_2 + \text{م}_3\mathbf{ا}_3$$

یعنی

$$\Delta\,\text{لا} = \begin{vmatrix} \text{م}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{م}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{م}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}$$

جہاں Δ سے وہ مقطع تعبیر ہوتا ہے جو تو مقداروں ا_1، ب_1، ج وغیرہ سے بنتا ہے۔

اسی طرح $\mathbf{ب}_1$، $\mathbf{ب}_2$، $\mathbf{ب}_3$ سے ضرب دینے سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$(\text{ب}_1\mathbf{ب}_1 + \text{ب}_2\mathbf{ب}_2 + \text{ب}_3\mathbf{ب}_3)\,\text{ما} = \text{م}_1\mathbf{ب}_1 + \text{م}_2\mathbf{ب}_2 + \text{م}_3\mathbf{ب}_3$$

یعنی

$$\Delta\,\text{ما} = \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{م}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{م}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{م}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}$$

جہاں بائیں طرف کا مقطع وہ ہے جو Δ ہو جاتا ہے جبکہ اسمیں دوسرے

ستون کے عناصر کی بجائے م_1، م_2، م_3 درج کئے جاتے ہیں۔
اسی طرح ی کے لئے ہم حاصل کرتے ہیں

$$\Delta\,\text{ی} = \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{م}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{م}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{م}_3 \end{vmatrix}$$

اِن قیمتوں کو زیادہ اختصار کے ساتھ یوں لکھا جا سکتا ہے :-

$$\Delta\,\text{لا} = (\text{م}_1\ \text{ب}_2\ \text{ج}_3)،\quad \Delta\,\text{ما} = (\text{ا}_1\ \text{م}_2\ \text{ج}_3)،\quad \Delta\,\text{ی} = (\text{ا}_1\ \text{ب}_2\ \text{م}_3)$$

عام صورت میں لا، ما، ی، وغیرہ کی قیمتیں اس طور پر لکھی جا سکتی ہیں

$$\text{لا} = \frac{(\text{م}_1\ \text{ب}_2\ \text{ج}_3 \cdots \text{ل}_\text{ن})}{(\text{ا}_1\ \text{ب}_2\ \text{ج}_3 \cdots \text{ل}_\text{ن})}،\quad \text{ما} = \frac{(\text{ا}_1\ \text{م}_2\ \text{ج}_3 \cdots \text{ل}_\text{ن})}{(\text{ا}_1\ \text{ب}_2\ \text{ج}_3 \cdots \text{ل}_\text{ن})}،\quad \text{ی} = \frac{(\text{ا}_1\ \text{ب}_2\ \text{م}_3 \cdots \text{ل}_\text{ن})}{(\text{ا}_1\ \text{ب}_2\ \text{ج}_3 \cdots \text{ل}_\text{ن})}\ \text{وغیرہ}$$

جہاں کسی مجہول مقدار کی قیمت معلوم کرنے میں دی ہوئی مساواتوں کی بائیں طرف کی معلومہ مقداروں م_1، م_2، م_3 وغیرہ کو Δ میں مطلوبہ مجہول مقدار کے سروں کی بجائے درج کرنا اور اِس طور پر بنے ہوئے مقطع کو Δ سے تقسیم کرنا پڑتا ہے۔

مثالیں

۱۔ اِن مساواتوں کو حل کرو:- (39)

$$\text{لا} + \text{ما} + \text{ی} = \text{ا}$$
$$\text{عہ}\,\text{لا} + \text{بہ}\,\text{ما} + \text{جہ}\,\text{ی} = \text{ا}_1$$
$$\text{عہ}^2\,\text{لا} + \text{بہ}^2\,\text{ما} + \text{جہ}^2\,\text{ی} = \text{ا}_2$$

مندرجۂ بالا ضابطوں سے آسانی کے ساتھ حل معلوم کیا جا سکتا ہے اور یہ بتایا جا سکتا ہے کہ کسی مجہول مقدار کی قیمت اِن مساواتوں میں اُنکے سر کے

دو درجی تفاعل اور عہ، بہ، جہ کے **متشاکل تفاعلوں** (بشمول اعداد مستقل ل٠، ل١، ل٢) کے طور پر بیان کیجاسکتی ہے۔ اس مقصد کے لئے مجہول مقدار (فرض کرو ما) کی قیمت کو ہم شکل ذیل میں لکھتے ہیں:۔

$$\begin{vmatrix} \text{ما} & 0 & 1 & 0 \\ \text{ل}_0 & 1 & 1 & 1 \\ \text{ل}_1 & \text{جہ} & \text{بہ} & \text{عہ} \\ \text{ل}_2 & \text{جہ}^2 & \text{بہ}^2 & \text{عہ}^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

جبکہ آسانی کے ساتھ فوراً حاصل کیا جاسکتا ہے اگر ہم دی ہوئی مساواتوں کے ساتھ متماثل مساوات ما = ما کو بھی شامل کریں اور دفعہ آئندہ کے طریقہ کی بموجب اسقاط کا عمل کریں۔ اب

$$\begin{vmatrix} \text{ما} & \text{یہ}^2 & \text{یہ} & 1 \\ \text{ل}_0 & \text{س}_2 & \text{س}_1 & \text{س}_0 \\ \text{ل}_1 & \text{س}_3 & \text{س}_2 & \text{س}_1 \\ \text{ل}_2 & \text{س}_4 & \text{س}_3 & \text{س}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \text{جہ} & \text{بہ} & \text{عہ} \\ 0 & \text{جہ}^2 & \text{بہ}^2 & \text{عہ}^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \text{ما} & 0 & 1 & 0 \\ \text{ل}_0 & 1 & 1 & 1 \\ \text{ل}_1 & \text{جہ} & \text{بہ} & \text{عہ} \\ \text{ل}_2 & \text{جہ}^2 & \text{بہ}^2 & \text{عہ}^2 \end{vmatrix}$$

اسلئے اگر (یہ مانکر کہ عہ، بہ، جہ غیر مساوی ہیں) ہم مساوات (۱) کو فرقوں کے حاصل ضرب سے ضرب دیں تو ما، یہ کے دو درجی تفاعل اور تین مقداروں عہ، بہ، جہ کی قوتوں کے مجموعوں کی رقوم میں بیان ہو جائیگا۔

۲ — دفعہ ۷، جلد اول کی مساواتوں کے ذریعہ ثابت کرو کہ قوتوں کے مجموعے سروں کی رقوم میں مقطعوں کی شکل میں بیان ہو سکتے ہیں اور اوراس کے بالعکس۔

مثلاً

$$\text{س}_2=\begin{vmatrix}\text{ب}_1 & 1\\ 2\text{ب}_2 & \text{ب}_1\end{vmatrix},\quad \text{س}_3=\begin{vmatrix}\text{ب}_1 & 1 & 0\\ 2\text{ب}_2 & \text{ب}_1 & 1\\ 3\text{ب}_3 & \text{ب}_2 & \text{ب}_1\end{vmatrix},\quad \text{س}_4=\begin{vmatrix}\text{ب}_1 & 1 & 0 & 0\\ 2\text{ب}_2 & \text{ب}_1 & 1 & 0\\ 3\text{ب}_3 & \text{ب}_2 & \text{ب}_1 & 1\\ 4\text{ب}_4 & \text{ب}_3 & \text{ب}_2 & \text{ب}_1\end{vmatrix}$$

وغیرہ —

$$2\text{ب}_2=\begin{vmatrix}\text{س}_1 & 1\\ \text{س}_2 & \text{س}_1\end{vmatrix},\quad -6\text{ب}_3=\begin{vmatrix}\text{س}_1 & 1 & 0\\ \text{س}_2 & \text{س}_1 & 2\\ \text{س}_3 & \text{س}_2 & \text{س}_1\end{vmatrix},\quad 24\text{ب}_4=\begin{vmatrix}\text{س}_1 & 1 & 0 & 0\\ \text{س}_2 & \text{س}_1 & 2 & 0\\ \text{س}_3 & \text{س}_2 & \text{س}_1 & 3\\ \text{س}_4 & \text{س}_3 & \text{س}_2 & \text{س}_1\end{vmatrix}$$

وغیرہ —

(40) **۱۴۵ — خطی متجانس مساواتیں۔** جب ن متغیروں کے درمیان (ن - ۱) خطی متجانس مساواتیں دی جائیں تو ان میں سے کسی ایک کو مساواتوں کی بائیں طرف منتقل کرنے اور پچھلی دفعہ کی طرح حل کرنے سے متغیروں کی نسبتیں متعین ہو سکتی ہیں یا ہم ان نسبتوں کو زیادہ سہولت کے ساتھ حسب ذیل طریقہ پر معلوم کر سکتے ہیں۔ ہم چار مقداروں لا، ما، ی، و کے درمیان تین مساواتوں کی مخصوص صورت لیتے ہیں جو عام طریق عمل کو واضح کرنیکے لئے کافی ہے:—

$$\left.\begin{aligned}\text{ا}_1\text{لا}+\text{ب}_1\text{ما}+\text{ج}_1\text{ی}+\text{د}_1\text{و}&=0\\ \text{ا}_2\text{لا}+\text{ب}_2\text{ما}+\text{ج}_2\text{ی}+\text{د}_2\text{و}&=0\\ \text{ا}_3\text{لا}+\text{ب}_3\text{ما}+\text{ج}_3\text{ی}+\text{د}_3\text{و}&=0\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(1)$$

انمیں ایک چوتھی مساوات شامل کیجا سکتی ہے جسکے سر غیر متعین ہوں یعنی

$$\text{ا}_4\text{لا}+\text{ب}_4\text{ما}+\text{ج}_4\text{ی}+\text{د}_4\text{و}=\text{له}\quad\ldots\ldots(2)$$

معمول کی طرح (ا۴ ب۴ ج۴ د۴) کو Δ سے تعبیر کرکے اور دفعہ گذشتہ کے طریقہ سے اِن چار مساواتوں کو حل کرکے ہم م۱ = ۰، م۲ = م۳ = ۰، م۴ = لہ ہونے کی وجہ سے ذیل کی قیمتیں حاصل کرتے ہیں:-

Δ لا = لہ ا۴، Δ ما = لہ ب۴، Δ ی = لہ ج۴، Δ و = لہ د۴

یعنی لا/ا۴ = ما/ب۴ = ی/ج۴ = و/د۴ = لہ/Δ .... (۳)

انہیں سے پہلی تین مساواتیں، لا، ما، ی، و کی نسبتوں کو دی ہوئی تین مساواتوں کے سروں کی رقوم میں بیان کرتی ہیں اور عام صورت میں متغیر، اُن سروں کے متناسب ہوتے ہیں جو ن ویں صف کے عناصر کی رقوم میں مقطع Δ کے پھیلاؤ میں واقع ہوتے ہیں جبکہ یہ ن ویں صف، دی ہوئی مساواتوں سے حاصل ہونیوالی (ن - ۱) صفوں میں اضافہ کردیجائے۔

اب ہم وہ شرط بیان کرسکتے ہیں کہ ان خطی متجانس مساواتیں ایک دوسری کے ساتھ صحیح ہوں۔ مثلاً مساوات (۲)، جبکہ لہ = ۰، مساواتوں (۱) کے ساتھ صحیح ہو۔ ہمیں صرف (۱) سے اخذ کردہ نسبتوں کو (۲) میں درج کرنا پڑیگا جس سے ہمیں حاصل ہوگا

ا۴ ا۴ + ب۴ ب۴ + ج۴ ج۴ + د۴ د۴ = ۰

یعنی Δ = ۰

(41)

اسی چیز کا اظہار مساواتوں (۳) سے ہوتا ہے کیونکہ اگر لہ = . اور اگر لا، ما، ی، و سب کے سب معدوم نہ ہوں تو Δ کو معدوم ہونا چاہئے۔

جو کچھ ثابت ہوا اسکو یوں بیان کیا جا سکتا ہے :۔ ن مقداروں کی خطی اور متجانس ن مساواتوں سے اِن ن مقداروں کو ساقط کرنیکا نتیجہ یہ ہوگا کہ وہ مقطع جو دی ہوئی مساواتوں کے سروں سے بنتا ہے صفر کے مساوی ہوگا۔

۱۴۶۔ **متکافی مقطعات**۔ اجزائے ضربی ا$_1$، ب$_1$، ج$_1$... ا$_2$، ب$_2$، وغیرہ کو (دیکھو دفعہ ۱۳۴) جو مقطع کے پھیلاؤ میں واقع ہوتے ہیں (یعنے پہلے صغیر مقطعات کو انکی مناسب علامت کے ساتھ) مقلوب عناصر یا اجزائے ترکیبی کہا جا سکتا ہے اور اِن سے بننے والے مقطع کو مقلوب یا **متکافی مقطع**۔ اب ہم چند مفید رشتے ثابت کرینگے جو دئے ہوئے مقطع اور اس کے متکافی مقطعے میں پائے جاتے ہیں :۔

(۱) **دئے ہوئے مقطع کی رقوم میں متکافی مقطع کو بیان کرنا**۔ فرض کرو کہ Δ کا متکافی مقطع Δ' سے تعبیر ہوتا ہے۔ دونوں مقطعوں

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 & ج_1 \\ ا_2 & ب_2 & ج_2 \\ ا_3 & ب_3 & ج_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta' \equiv \begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 & ج_1 \\ ا_2 & ب_2 & ج_2 \\ ا_3 & ب_3 & ج_3 \end{vmatrix}$$

کو ضرب دو تو حاصل ضربی مقطع میں تمام عناصر سوائے اُنکے جو وتر میں ہیں معدوم ہو جاتے ہیں (دفعہ ۱۴۴) اور نتیجہ حاصل ہوتا ہے

$$\Delta\Delta' = \begin{vmatrix} \Delta & \cdot & \cdot \\ \cdot & \Delta & \cdot \\ \cdot & \cdot & \Delta \end{vmatrix} = \Delta^{3}$$

پس $\Delta' = \Delta^{2}$

تیسرے رتبہ کے دو مقطعوں کی مخصوص صورت میں جو عمل یہاں اختیار کیا گیا ہے اسکا اطلاق عام صورت میں بھی اسی طرح ہو سکتا ہے۔ چنانچہ ہمیں حاصل ہوگا $\Delta\Delta' = \Delta^{ن}$ یعنی $\Delta' = \Delta^{ن-1}$۔

پس متکافی مقطع دئے ہوئے مقطع کی (ن-۱) ویں قوت کے مساوی ہوتا ہے۔

(42) (۲) ابتدائی عناصر کی رقوم میں متکافی مقطع کے کسی صغیر کو بیان کرنا۔

تمثیلاً ہم چوتھے رتبہ کا مقطع لیتے ہیں اور اس کے متکافی کے پہلے صغیر کو ابتدائی مقطع کے عناصر کی رقوم میں بیان کرتے ہیں۔ مساوات ذیل میں داہنی طرف کے دو مقطعوں کو ضرب دینے اور دفعہ ۱۴۴ کی متماثلہ مساواتیں استعمال کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 & ج_1 & د_1 \\ ا_2 & ب_2 & ج_2 & د_2 \\ ا_3 & ب_3 & ج_3 & د_3 \\ ا_4 & ب_4 & ج_4 & د_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{ا}_2 & \mathbf{ب}_2 & \mathbf{ج}_2 & \mathbf{د}_2 \\ \mathbf{ا}_3 & \mathbf{ب}_3 & \mathbf{ج}_3 & \mathbf{د}_3 \\ \mathbf{ا}_4 & \mathbf{ب}_4 & \mathbf{ج}_4 & \mathbf{د}_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ا_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ ا_2 & \Delta & \cdot & \cdot \\ ا_3 & \cdot & \Delta & \cdot \\ ا_4 & \cdot & \cdot & \Delta \end{vmatrix}$$

یعنی

$$\Delta \begin{vmatrix} \text{ب}_2 & \text{ج}_2 & \text{د}_2 \\ \text{ب}_3 & \text{ج}_3 & \text{د}_3 \\ \text{ب}_4 & \text{ج}_4 & \text{د}_4 \end{vmatrix} = \text{ا}_1 \Delta^3$$

یا $(\text{ب}_2\ \text{ج}_3\ \text{د}_4) = \text{ا}_1 \Delta^2$

پس $\acute{\Delta}$ کا پہلا صغیر جو ا_1 کا متمم ہے اس طور پر بیان ہو جاتا ہے۔
پھر $\acute{\Delta}$ کے دوسرے صغیروں کو بیان کرنے کے لئے ہم بالکل اسکے مشابہ عمل اختیار کرتے ہیں۔
چنانچہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 & \text{د}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 & \text{د}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 & \text{د}_3 \\ \text{ا}_4 & \text{ب}_4 & \text{ج}_4 & \text{د}_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{\text{ا}}_3 & \mathbf{\text{ب}}_3 & \mathbf{\text{ج}}_3 & \mathbf{\text{د}}_3 \\ \mathbf{\text{ا}}_4 & \mathbf{\text{ب}}_4 & \mathbf{\text{ج}}_4 & \mathbf{\text{د}}_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & 0 & 0 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & 0 & 0 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \Delta & 0 \\ \text{ا}_4 & \text{ب}_4 & 0 & \Delta \end{vmatrix}$$

جس سے

$$\Delta \begin{vmatrix} \mathbf{\text{ج}}_3 & \mathbf{\text{د}}_3 \\ \mathbf{\text{ج}}_4 & \mathbf{\text{د}}_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} \Delta^2$$

یا $(\mathbf{\text{ج}}_3\ \mathbf{\text{د}}_4) = (\text{ا}_1\ \text{ب}_2)\ \Delta$

عام مسئلہ کو یوں بیان کر سکتے ہیں :- م رتبہ کا صغیر جو مقلوب عناصر سے بنتا ہے دو مقداروں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے، ایک مقدار ابتدائی مقطع Δ کے متناظر صغیر کا متمم مقطع ہے اور دوسری مقدار $\acute{\Delta}$ کی (م - ۱) ویں قوت (43)
ثبوت کے تذکرہ بالا طریقہ کی تعمیم ہو سکتی ہے۔ مثلاً پانچویں

رتبہ کے مقطع کی صورت میں تیسرے رتبہ کے ایک صغیر کے لئے
طالب علم حسب ذیل جملے کی آسانی کے ساتھ تصدیق کرسکتا ہے:

$$(ج_3\ د_4\ ع_5) = (ا_1\ ب_2)\ \Delta^2$$

یہ ظاہر ہے کہ اگر ابتدائی مقطع Δ معدوم ہو جائے تو نہ صرف اسکا متکافی مقطع معدوم ہوتا ہے بلکہ کسی رتبہ کے اسکے سب صغیر بھی معدوم ہوتے ہیں۔ دوسرے رتبہ کے صغیروں کا معدوم ہونا ذیل کی مفید شکل میں بیان کیا جاسکتا ہے:۔ **جب مقطع معدوم ہوتا ہے تو اس کے متکافی مقطع کی کسی صف کے عناصر کسی دوسری صف کے عنصروں کے متناسب ہوتے ہیں اور کسی ستون کے عنصر کسی دوسرے ستون کے عنصروں کے متناسب۔**

۴۷ ا۔ **متشاکل مقطعات۔** مقطع کے دو عنصروں کو ہم مزدوج اسوقت کہینگے جبکہ صدر عناصر کے لحاظ سے ایک کا مقام صفوں میں وہی ہو جو دوسرے کا ستونوں میں ہے۔ مثلاً $د_2$ اور $ب_4$ مزدوج ہیں کیونکہ ایک' دوسری صف میں چوتھا مقام اختیار کرتا ہے اور دوسرا' دوسرے ستون میں چوتھا مقام۔ صدر عناصر میں سے ہر ایک اپنا آپ مزدوج ہے۔ کوئی دو مزدوج عناصر ایک خط میں واقع ہوتے ہیں جو صدر وتر پر عمود ہوتا ہے اور وہ اس سے مخالف سمتوں میں مساوی فاصلے پر رہتے ہیں۔

متشاکل مقطع وہ ہے جسمیں ہر دو مزدوج عناصر ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں۔ ایسے مقطعات کی مثالیں طالب علم کو

دفعہ ۱۳۴ امثلہ ۲، ۹، ۱۰ اور دفعہ ۱۳۵ مثال ۴ میں ملینگی۔

متشاکل مقطع میں کسی دو مزدوج عناصر کے متمم پہلے صغیر مساوی ہوتے ہیں کیونکہ ان میں صرف صفوں اور ستونوں کے باہمی تبادلہ کا فرق ہوتا ہے۔ متناظر مقلوب عناصر بھی مساوی ہوتے ہیں اور دونوں صورتوں میں صغیروں کی علامتیں وہی ہوتی ہیں۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ایک **متشاکل مقطع کا متکافی مقطع بھی خود متشاکل** ہوتا ہے۔

صدر صغیر سب کے سب متشاکل مقطعات ہیں۔

دفعہ ۱۳۷ کا پھیلاؤ کا طریقہ متشاکل مقطعوں کی صورت میں (44)
خاص طور پر مفید ہے جیسا کہ حسب ذیل مثالوں سے واضح ہو جائیگا

مثالیں

۱۔ متشاکل مقطع

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ھ} & \text{گ} \\ \text{ھ} & \text{ب} & \text{ف} \\ \text{گ} & \text{ف} & \text{ج} \end{vmatrix}$$

کا متکافی مقطع معلوم کرو۔

دفعہ ۱۳۴ کی بموجب متکافی عنصروں کو بڑے حرفوں سے تعبیر کرو تو Δ کو شکلوں ا ا + ھ ھ + گ گ، ھ ھ + ب ب + ف ف، گ گ + ف ف + ج ج میں سے کسی ایک میں پھیلایا جا سکتا ہے۔ اب متکافی مقطع Δ کو ہم یوں لکھ سکتے ہیں:-

$$\Delta' \equiv \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ھ} & \text{گ} \\ \text{ھ} & \text{ب} & \text{ف} \\ \text{گ} & \text{ف} & \text{ج} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \text{ب ج} - \text{ف}^2 & \text{ف گ} - \text{ج ھ} & \text{ھ ف} - \text{ب گ} \\ \text{ف گ} - \text{ج ھ} & \text{ج ا} - \text{گ}^2 & \text{گ ھ} - \text{ا ف} \\ \text{ھ ف} - \text{ب گ} & \text{گ ھ} - \text{ا ف} & \text{ا ب} - \text{ھ}^2 \end{vmatrix}$$

۲۔ اسی طرح

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ھ} & \text{گ} & \text{ل} \\ \text{ھ} & \text{ب} & \text{ف} & \text{م} \\ \text{گ} & \text{ف} & \text{ج} & \text{ن} \\ \text{ل} & \text{م} & \text{ن} & \text{د} \end{vmatrix}$$

کا منکافی معلوم کرو۔

پچھلی مثال میں استعمال شدہ ترقیم کی متشابہ ترقیم استعمال کرو تو Δ کو اشکال

ا **ا** + ھ **ھ** + گ **گ** + ل **ل** ، ھ **ھ** + ب **ب** + ف **ف** + م **م** وغیرہ

میں سے جس کسی میں ہم چاہیں پھیلا سکتے ہیں۔ اب Δ میں اسکے عناصر کی بجائے متناظر بڑے حروف درج کرنے سے منکافی مقطع حاصل ہوجاتا ہے۔ طالب علم کو حسب ضرورت کسی منکافی عنصر کو پھیلی ہوئی اشکل میں لکھ لینے میں کوئی دقت محسوس نہیں ہوگی۔ مثلاً **ف** وہ صغیرہ ہے جو ف کا متمم ہے (اپنی مناسب علامت کے ساتھ جو اس صورت میں منفی ہے) اور اس لئے **ف** ،

$$- \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ھ} & \text{ل} \\ \text{گ} & \text{ف} & \text{ن} \\ \text{ل} & \text{م} & \text{د} \end{vmatrix}$$

کے پھیلاؤ سے حاصل ہوتا ہے۔

۳۔ دفعہ ۱۳۴ مثال ۱۰ کے مقطع Δ کو دفعہ ۱۳۷ کے طریقہ سے پھیلاؤ۔

آخری صف اور آخری ستون کو پہلی صف اور پہلے ستون کے مقامات میں منتقل کرنے اور مثال ا کی ترقیم صدر صغیرہ کے مقلوب (45) عناصر کے لئے استعمال کرنے سے نتیجہ کو فوراً اشکال ذیل میں لکھا جاسکتا ہے۔

۔ Δ = **ا** ل^{۲} + **ب** م^{۲} + **ج** ن^{۲} + ۲ **ف** م ن + ۲ **گ** ن ل + ۲ **ھ** ل م

اب چونکہ صفوں اور ستونوں دونوں کو الٹی ترتیب میں لکھنے سے مقطع نہیں بدلتا اسلئے اگر مقطع کا پھیلاؤ آخری صف اور آخری ستون کی رقوم میں مطلوب ہو (جیسا کہ اس مثال میں) تو یہ ضروری نہیں کہ ان کو پہلی صف اور پہلے ستون کے مقامات میں منتقل کردیا جائے۔ مقطع جس شکل میں دیا گیا ہے اسی شکل میں اسکو پھیلایا جاسکتا ہے بشرطیکہ دفعہ ۱۳۷ کے قاعدہ میں صدر عنصر اور اسکے صغیر کی بجائے علی الترتیب آخری وتری عنصر اور اس کا متمم صغیر لکھدیا جائے۔

۴ — اوپر کی مثال ۲ کے مقطع Δ کو دفعہ ۱۳۷ کے طریقہ سے آخری صف اور آخری ستون کی رقوم میں پھیلاؤ۔

مثال ۳ کے آخری نوٹ کو مدنظر رکھتے اور اَ، بَ، جَ، فَ، گَ، ھَ سے انہی مقداروں کو تعبیر کرنے سے جو امثلہ ۱ اور ۳ میں کی گئی تھیں نتیجہ کو شکل ذیل میں لکھا جاسکتا ہے:—

ا	ھ	گ
ھ	ب	ف
گ	ف	ج

$\Delta =$ د (مقطع بالا) $=$ - ال۲ - ب م۲ - ج ن۲ - ۲ف م ن - ۲گ ن ل - ۲ھ ل م

جب کسی رتبہ کے متشاکل مقطع کو متشاکل حاشیہ (یعنے افقاً اور عموداً وہی عناصر ہوں) لگایا جاتا ہے تو نتیجہ صریحاً ایک متشاکل مقطع ہوگا جسکا رتبہ دئے ہوئے مقطع کے رتبہ سے بقدر ایک کے بڑا ہوگا۔ دفعہ ۱۳۷ کے نتیجہ سے ظاہر ہے کہ عام طور پر حاشیہ لگائے ہوئے مقطع کے پھیلاؤ میں ابتدائی مقطع اضافہ کردہ صف اور ستون میں جو عنصر مشترک ہے اس سے ضرب دینے کے بعد داخل ہوتا ہے اور اسکے ساتھ باقی اضافہ کردہ عناصر کا ایک دو درجی ہمدات تفاعل۔

۵ —

$\Delta \equiv$

ا	ھ	گ	ل	عہ
ھ	ب	ف	م	ہ
گ	ف	ج	ن	جہ
ل	م	ن	د	ضہ
عہ	بہ	جہ	ضہ	.

کو پھیلاؤ۔ ظاہر ہے کہ مثال ۲ کے مقطع کو متشاکل حاشیہ لگانے سے یہ مقطع پیدا ہوا ہے جس میں جمع کردہ خطوط کا مشترک عنصر صفر ہے۔ نتیجہ صریحاً عہ، بہ، جہ، ضہ کا ایک دو درجی متجانس تفاعل ہے اور مثال ۲ کی ترقیم کی مدد سے △ کی قیمت فوراً شکل ذیل میں لکھی جا سکتی ہے:-

ا عہ^2 + ب بہ^2 + ج جہ^2 + د ضہ^2 + ۲ ف بہ جہ + ۲ گ جہ عہ + ۲ ھ عہ بہ
+ ۲ ک عہ ضہ + ۲ م بہ ضہ + ۲ ن جہ ضہ

٦۔ دفعہ ١٤١ کے مسئلہ کے ذریعہ ثابت کرو کہ کسی مقطع کا مربع ایک متشاکل مقطع ہوتا ہے۔

٧۔ دو متکافی مقطعوں کا حاصل ضرب ابتدائی مقطعوں کے حاصل ضرب کا متکافی مقطع ہوتا ہے۔

(46) **١٤٨۔ معوج متشاکل اور معوج مقطعات۔** معوج متشاکل مقطع وہ ہے جس میں ہر عنصر اپنے مزدوج کے مساوی مگر علامت میں مختلف ہو۔ اب چونکہ ہر صدر عنصر اپنا آپ مزدوج ہوتا ہے اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ایسے مقطع میں تمام صدر عناصر صفر ہیں۔

وہ مقطع جس میں تمام عناصر سوائے صدر عنصروں کے اپنے مزدوجوں کے مساوی اور علامت میں مختلف ہوں معوج مقطع ہے۔ پس معوج متشاکل مقطع صفر وتری ہے اور معوج مقطع میں وتری عناصر موجود ہوتے ہیں۔ دفعہ ١٣٦ کے طریقہ سے معوج مقطع کا پھیلاؤ معوج متشاکل مقطعوں کے پھیلاؤ پر منحصر کیا جا سکتا ہے۔

اس دفعہ کا بقیہ حصہ معوج متشاکل مقطعوں کے بعض مفید خواص ثابت کرنے میں استعمال کیا جائیگا۔

(ا) طاق رتبہ کا معوج متشاکل مقطع معدوم ہوتا ہے۔

کیونکہ کسی معوج متشاکل مقطع △ کی قیمت نہیں بدلتی اگر ستونوں کو صفوں میں بدل دیا جائے اور پھر تمام صفوں کی علامتیں بدل دی جائیں۔

لیکن جب مقطع کا رتبہ طاق ہو تو اس عمل سے Δ کی علامت بدلنی چاہیئے۔ پس اس صورت میں Δ معدوم ہو جاتا ہے۔ مثلاً

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ا} & 0 \\ \text{ج} & 0 & -\text{ا} \\ 0 & -\text{ج} & -\text{ب} \end{vmatrix} \equiv 0$$

(۲) ن ویں رتبہ کے معوج متشاکل مقطع کا متکافی مقطع ایک متشاکل مقطع ہوگا جب ن طاق ہو اور ایک معوج متشاکل مقطع جب ن جفت ہو۔

کسی معوج متشاکل مقطع میں مزدوج عنصروں کے ایک جوڑے کے جواب میں جو صغیر ہوتے ہیں وہ صرف صفوں اور ستونوں کے باہمی تبادلہ اور تمام عنصروں کی علامتوں کے لحاظ سے فرق ہوتے ہیں۔ پس دونوں صغیر مساوی ہیں جب انکا رتبہ جفت ہو یعنی جب ن طاق ہو اور دونوں مساوی مگر علامت میں مختلف ہیں جب ن جفت ہو۔ اس لئے پہلی صورت میں متکافی مقطع متشاکل ہے اور دوسری صورت میں معوج متشاکل کیونکہ اس کے صدر ونری عنصر سب کے سب طاق رتبہ کے معوج متشاکل مقطعات ہیں۔

(۳) جفت رتبہ کا معوج متشاکل مقطع ایک کامل مربع ہوتا ہے۔ (47)

یہ ان اصولوں سے ثابت ہوتا ہے جو دفعہ ۱۴۶ میں بیان ہوئے ہیں۔ مثلاً چوتھے رتبہ کا مقطع

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \text{ج} & \text{ب} & \text{ا} & 0 \\ \text{ع} & \text{د} & 0 & -\text{ا} \\ \text{ف} & 0 & -\text{د} & -\text{ب} \\ 0 & -\text{ف} & -\text{ع} & -\text{ج} \end{vmatrix}$$

لو اور فرض کرو کہ اس کے متکافی مقطع کے عناصر اَ، بَ، … اِ وغیرہ

سے تعبیر ہوتے ہیں۔ تب دفعہ ۱۴۶ (۲) کی رو سے

$$ا_1 ب_2 - ا_2 ب_1 = \Delta \begin{vmatrix} \cdot & ف \\ -ف & \cdot \end{vmatrix} = ف^2 \Delta$$

اب چونکہ $ا_1$ اور $ب_2$ طاق رتبہ کے معوج متشاکل مقطعات ہیں وہ معدوم ہو جاتے ہیں اور $ا_2 = -ب_1$ کیونکہ یہ مزدوج صغیر ہیں۔ پس $ف^2 \Delta = ا_2^2$ جو اس بات کو ثابت کرتا ہے کہ Δ ایک کامل مربع ہے۔ اسی طرح چھٹے رتبہ کے مقطع Δ کے لئے یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ Δ اور چوتھے رتبہ کے ایک معوج متشاکل مقطع کا حاصل ضرب ایک کامل مربع ہے اور چونکہ یہ آخری مقطع بموجب ثبوت بالا ایک کامل مربع ہے اسلئے Δ بھی ایک کامل مربع ہے۔ چھٹے رتبہ کے مقطع کے لئے اس مسئلہ کی صداقت ثابت کرنیکے بعد بالکل اسی طرح کے عمل سے آٹھویں رتبہ کے مقطع کے لئے اسکو ثابت کیا جا سکتا ہے اور علیٰ ہذا۔

مثالیں

۱۔ چوتھے رتبہ کے معوج متشاکل مقطع کے لئے ذیل کے جملہ کی تصدیق کرو:۔

$$\begin{vmatrix} \cdot & ا & ب & ج \\ -ا & \cdot & د & ع \\ -ب & -د & \cdot & ف \\ -ج & -ع & -ف & \cdot \end{vmatrix} \equiv (اف - بع + جد)^2$$

۲۔ معوج مقطع

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} لا & ا & ب & ج \\ -ا & لا & د & ع \\ -ب & -د & لا & ف \\ -ج & -ع & -ف & لا \end{vmatrix}$$

کو لا کی قوتوں میں پھیلاؤ۔

جب ایک معوج مقطع کو پھیلانے میں دفعہ ۱۳۶ کا طریقہ استعمال کیا جائے تو یہ دیکھ لیا جائے کہ پھیلاؤ میں طاق رتبہ کے مقطعات سب کے سب معدوم ہوتے ہیں اور جفت رتبہ کے مقطعات مربعوں کی شکل میں بیان ہو سکتے ہیں۔ یہاں لا کی طاق قوتوں کے سر صریحاً معدوم ہوتے ہیں اور نتیجہ یہ شکل اختیار کرتا ہے

$$\Delta \equiv \text{لا}^4 + (\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2 + \text{د}^2 + \text{ع}^2 + \text{ف}^2)\,\text{لا}^2 + (\text{اف} - \text{ب ع} + \text{ج د})^2$$

۳۔ ذیل کے معوج مقطع کو پھیلاؤ۔

$$\begin{vmatrix} \text{د} & \text{ج} & \text{ب} & \text{ا} & \text{ا} \\ \text{گ} & \text{ف} & \text{ع} & \text{ب} & -\text{ا} \\ \text{خ} & \text{ھ} & \text{ج} & -\text{ع} & -\text{ب} \\ \text{ز} & \text{د} & -\text{ھ} & -\text{ف} & -\text{ج} \\ \text{ع} & -\text{ز} & -\text{خ} & -\text{گ} & -\text{د} \end{vmatrix}$$

نتیجہ کو شکل

$$\text{ا ب ج د} + \Sigma\, \text{ز ا ب ج} + \Sigma\, (\text{ع ز} - \text{ف خ} + \text{گ ھ})^2\, \text{ا}$$

میں لکھا جا سکتا ہے جہاں پہلا مجموعہ Σ دس رقموں پر مشتمل ہے جو اسکے محاذی لکھی ہوئی رقم کے متشابہ ہیں اور دوسرے مجموعہ Σ میں پانچ رقمیں شامل ہوتی ہیں۔ وہ ارقام جنہیں دو دو صدر عناصر کے حاصل ضرب شامل ہوتے ہیں اور وہ ارقام جنہیں صدر عناصر بالکل شامل نہیں ہوتے معدوم ہوتی ہیں۔

۴۔ جفت رتبہ کے کسی مقطع کا مربع ایک متشاکل مقطع کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے۔

ثبوت کا حسب ذیل طریقہ عام صورت میں بھی اطلاق پذیر ہے۔

$(\text{ا}_1\ \text{ب}_2\ \text{ج}_3\ \text{د}_4)$ کا مربع ذیل کے دو مقطعات کو ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے:۔

(49) $$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 & \text{د}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 & \text{د}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 & \text{د}_3 \\ \text{ا}_4 & \text{ب}_4 & \text{ج}_4 & \text{د}_4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -\text{ب}_1 & \text{ا}_1 & -\text{د}_1 & \text{ج}_1 \\ -\text{ب}_2 & \text{ا}_2 & -\text{د}_2 & \text{ج}_2 \\ -\text{ب}_3 & \text{ا}_3 & -\text{د}_3 & \text{ج}_3 \\ -\text{ب}_4 & \text{ا}_4 & -\text{د}_4 & \text{ج}_4 \end{vmatrix}$$

اور انکا حاصل ضرب ہے

$$\begin{vmatrix} \cdot & -(\text{ا}_1\text{ب}_2)-(\text{ج}_1\text{د}_2)' & -(\text{ا}_1\text{ب}_3)-(\text{ج}_1\text{د}_3)' & -(\text{ا}_1\text{ب}_4)-(\text{ج}_1\text{د}_4) \\ (\text{ا}_1\text{ب}_2)+(\text{ج}_1\text{د}_2) & \cdot & -(\text{ا}_2\text{ب}_3)-(\text{ج}_2\text{د}_3) & -(\text{ا}_2\text{ب}_4)-(\text{ج}_2\text{د}_4) \\ (\text{ا}_1\text{ب}_3)+(\text{ج}_1\text{د}_3)' & (\text{ا}_2\text{ب}_3)+(\text{ج}_2\text{د}_3)' & \cdot & -(\text{ا}_3\text{ب}_4)-(\text{ج}_3\text{د}_4) \\ (\text{ا}_1\text{ب}_4)+(\text{ج}_1\text{د}_4)' & (\text{ا}_2\text{ب}_4)+(\text{ج}_2\text{د}_4)' & (\text{ا}_3\text{ب}_4)+(\text{ج}_3\text{د}_4)' & \cdot \end{vmatrix}$$

جو ایک معوج متشاکل مقطع ہے۔

۵ — تیسرے رتبہ کے ایک معوج متشاکل مقطع کا متکافی مقطع بناؤ۔

Δ کے لئے وہ شکل استعمال کرو جو دفعہ ہذا کے (۱) میں دیگئی ہے تو آسانی کے ساتھ معلوم ہو جائیگا کہ اس سے ذیل کا متشاکل مقطع حاصل ہوتا ہے:—

$$\begin{vmatrix} \text{ج}^2 & -\text{ب}\,\text{ج} & \text{ا}\,\text{ج} \\ -\text{ب}\,\text{ج} & \text{ب}^2 & -\text{ا}\,\text{ب} \\ \text{ا}\,\text{ج} & -\text{ا}\,\text{ب} & \text{ا}^2 \end{vmatrix}$$

۶ — مثال (۱) کے چوتھے رتبہ والے معوج متشاکل مقطع Δ کا متکافی مقطع بناؤ۔

تفاعل ا ف − ب ع + ج د کو جسکا مربع Δ کے مساوی ہے فہ سے اور مطلوبہ متکافی مقطع کو Δ' سے تعبیر کرو تو

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \cdot & \text{ف}\,\text{فہ} & -\text{ع}\,\text{فہ} & \text{د}\,\text{فہ} \\ -\text{ف}\,\text{فہ} & \cdot & \text{ج}\,\text{فہ} & -\text{ب}\,\text{فہ} \\ \text{ع}\,\text{فہ} & -\text{ج}\,\text{فہ} & \cdot & +\text{ا}\,\text{فہ} \\ -\text{د}\,\text{فہ} & \text{ب}\,\text{فہ} & -\text{ا}\,\text{فہ} & \cdot \end{vmatrix}$$

اس معوج متشاکل مقطع کی قیمت مثال ۱ کے نتیجہ کی مدد سے لکھ لیجا سکتی ہے۔ چنانچہ اسکی تصدیق فوراً ہو جاتی ہے کہ

$$\Delta' = (\text{اف} - \text{ب ع} + \text{ج د})^{۲}\, \text{فہ}^{۴} = \Delta^{۲}$$

۷۔ مثال ۳ کے مقطع میں تمام صدر عناصر کو صفر بنانے سے پانچویں رتبہ کا جو معوج متشاکل مقطع حاصل ہوتا ہے اسکا متکافی مقطع معلوم کرو۔

اب چونکہ متکافی مقطع ایک متشاکل مقطع ہے (دیکھو دفعہ ۱۴۸، ۲) اور پھر چونکہ یہ ایسا مقطع بھی ہے جسمیں کسی خط کے عناصر کسی متوازی خط کے عناصر کے متناسب ہیں (دفعہ ۱۴۶) اس لئے مطلوبہ مقطع شکل ذیل کا ہونا چاہیے :-

$$\begin{vmatrix} \text{فہ}_{۱}^{۲} & \text{فہ}_{۱}\text{فہ}_{۲} & \text{فہ}_{۱}\text{فہ}_{۳} & \text{فہ}_{۱}\text{فہ}_{۴} & \text{فہ}_{۱}\text{فہ}_{۵} \\ \text{فہ}_{۲}\text{فہ}_{۱} & \text{فہ}_{۲}^{۲} & \text{فہ}_{۲}\text{فہ}_{۳} & \text{فہ}_{۲}\text{فہ}_{۴} & \text{فہ}_{۲}\text{فہ}_{۵} \\ \text{فہ}_{۳}\text{فہ}_{۱} & \text{فہ}_{۳}\text{فہ}_{۲} & \text{فہ}_{۳}^{۲} & \text{فہ}_{۳}\text{فہ}_{۴} & \text{فہ}_{۳}\text{فہ}_{۵} \\ \text{فہ}_{۴}\text{فہ}_{۱} & \text{فہ}_{۴}\text{فہ}_{۲} & \text{فہ}_{۴}\text{فہ}_{۳} & \text{فہ}_{۴}^{۲} & \text{فہ}_{۴}\text{فہ}_{۵} \\ \text{فہ}_{۵}\text{فہ}_{۱} & \text{فہ}_{۵}\text{فہ}_{۲} & \text{فہ}_{۵}\text{فہ}_{۳} & \text{فہ}_{۵}\text{فہ}_{۴} & \text{فہ}_{۵}^{۲} \end{vmatrix}$$

جس میں $\text{فہ}_{۱}$، $\text{فہ}_{۲}$، $\text{فہ}_{۳}$، $\text{فہ}_{۴}$، $\text{فہ}_{۵}$ ابتدائی عنصروں میں دوسرے درجہ کے پانچ تفاعل ہیں جنکے مربع اُن پانچ پہلے صغیروں کی قیمتیں ہیں جو Δ کے صدر عناصر کے متمم ہیں۔

عام صورت میں کسی طاق رتبہ (۲م + ۱) کے ایک معوج (50)
متشاکل مقطع کا متکافی مقطع مندرجہ بالا شکل کے متشابہ ہوتا ہے جسمیں وتری عناصر (۲م + ۱) تفاعلوں کے جنمیں سے ہر ایک ابتدائی عنصروں میں م ویں درجہ کا تفاعل ہے مربع ہیں اور بقیہ عناصر دو دو کے

حاصل ضرب ہیں ۔

۱۴۹ ۔ **مسئلہ** ۔ اس باب کو ختم کرنے سے پہلے ہم ایک اہم مسئلہ بیان کرتے ہیں جو اُس مقطع سے متعلق ہے جس کا صدر پہلا صغیر معدوم ہوتا ہے ۔ دفعہ ۱۴۷ کی ترقیم اختیار کرکے ہم Δ کو ایک معدوم ہونے والا مقطع سمجھتے ہیں اور ثابت شدنی مسئلہ کو یوں بیان کرتے ہیں :۔

اگر ایک مقطع Δ کو جس کی **قیمت صفر ہے کسی طریقہ پر حاشیہ لگائیں** تو اس طور پر بنے ہوئے مقطع اور Δ کے صدر پہلے صغیر کا حاصل ضرب، اضافہ کردہ عناصر کے دو خطی متجانس تفاعلوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے ۔

دفعہ ۱۴۷ کی ترقیم کو برقرار رکھکر ہم یہ ثابت کرینگے کہ Δ' اور ا_1 کا حاصل ضرب شکل ذیل میں بیان ہو سکتا ہے :۔

$$\Delta' \text{ا}_1 = -(\text{ا}_1 \text{ع} + \text{ب}_1 \text{ب} + \text{ج}_1 \text{ج} + \ldots)(\text{ا}_1 \text{ع}' + \text{ا}_2 \text{ب}' + \text{ا}_3 \text{ج}' + \ldots)$$

یہ نتیجہ فوراً دفعہ (۱۴۶) کے ربط (۲) سے حاصل ہوتا ہے اگر Δ' کے متکافی مقطع میں اُن عنصروں کی قیمتوں پر غور کیا جائے جو $\text{ا}'$، $\text{ع}'$، ا_1 کے متکافی ہیں اور پھر ابتدائی عنصروں کی رقوم میں دوسرے رتبہ کا وہ مقطع بیان کیا جائے جو ان چار عناصر سے بنتا ہے ۔ اس نتیجہ کا دوسرا ثبوت آسانی کے ساتھ ایک معدوم مقطع کے متکافی کی خاصیت کی مدد سے (جو یہ ہے کہ $\text{ا}'$ $\text{ب}'$ $\text{ج}'$ وغیرہ سے بننے والے مقطع میں کسی خط کے عناصر کسی متوازی خط کے عناصر کے متناسب ہوتے ہیں دفعہ ۱۴۶) دفعہ ۱۴۷ کی موجب پھیلا کر اخذ کیا جا سکتا ہے ۔

اگر مقطع Δ متشاکل ہو اور اسکو لگایا ہوا حاشیہ بھی متشاکل ہو تو اوپر کی مساوات میں بائیں طرف کے دو اجزائے ضربی مماثل

ہوجاتے ہیں اور مسئلہ شکل ذیل اختیار کرتا ہے :- **اگر ایک تتشاکل مقطع کو جس کی قیمت صفر ہے تتشاکل حاشیہ لگایا جاوے تو اس طور پر بنے ہوئے مقطع اور اس کے صدر دوسرے صغیر کا حاصل ضرب اضافہ کردہ عناصر کے ایک خطی متجانس تفاعل کے مربع (منفی علامت کے ساتھ) کے مساوی ہوتا ہے۔**

اصلی مقطع کو Δ سے تعبیر کیا جائے تو اوپر کے ثابت شدہ مسئلہ کو حسب ذیل مفید شکل میں بیان کیا جا سکتا ہے :- **اگر کسی تتشاکل مقطع میں صدر پہلا صغیر معدوم ہو تو خود مقطع اور اس کا صدر دوسرا صغیر مختلف العلامت ہوتے ہیں۔** (51)

مثالیں

۱- اگر طاق رتبہ (۲ م + ۱) کے ایک معوج متشاکل مقطع Δ کو کسی طریقہ پر حاشیہ لگایا جائے تو حاصل شدہ مقطع Δ' دو منطق تفاعلوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے جنمیں ہر ایک میں اضافہ کردہ عناصر پہلی قوت میں اور ابتدائی عناصر م ویں قوت میں شامل ہوتے ہیں۔

دئے ہوئے معوج متشاکل مقطع کے پھیلاؤ کو دفعہ ۸۴ امثال (۲) کے نتیجہ کی بموجب، شکل

$$\begin{vmatrix} \text{فہ}_1^2 & \text{فہ}_1\text{فہ}_2 & \text{فہ}_1\text{فہ}_3 & \cdot & \cdot \\ \text{فہ}_2\text{فہ}_1 & \text{فہ}_2^2 & \text{فہ}_2\text{فہ}_3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

میں لکھنے اور دفعہ ہذا کا مسئلہ استعمال کرنے سے ہمیں معلوم ہوگا

$$\text{فہ}_1^2\,\Delta' = -(\text{فہ}_1^2\,\text{عہ} + \text{فہ}_1\text{فہ}_2\,\text{بہ} + \text{فہ}_1\text{فہ}_3\,\text{جہ} + \ldots)(\text{فہ}_1^2\,\text{عہ}' + \text{فہ}_1\text{فہ}_2\,\text{بہ}' + \ldots)$$

یا Δ = -(فہ$_{۱}$ عہ + فہ$_{۲}$ بہ + فہ$_{۳}$ جہ + ...)(فہ$_{۱}$ عَہ + فہ$_{۲}$ بَہ + فہ$_{۳}$ جَہ + ...)

یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ اگر اس نتیجہ میں عَہ، بَہ، جَہ، وغیرہ کو - عہ، - بہ، - جہ، وغیرہ کے مساوی بنایا جائے تو دفعہ ۴۸ اسئلہ ۳ حاصل ہو جائیگا۔

۲ - اگر جفت رتبہ ۲ م کے ایک معوج متشاکل مقطع کو کسی طریقہ پر حاشیہ لگایا جائے تو حاصل شدہ مقطع دو منطق تفاعلوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے جنمیں سے ایک تفاعل عناصر میں م ویں درجہ کا ہے اور دوسرا (م + ۱) ویں درجہ کا۔

اس کو پچھلی مثال سے آسانی کے ساتھ اخذ کیا جا سکتا ہے اگر ہم اس میں پہلے ستون کے اضافہ کردہ تمام عنصروں کو یعنے عَہ، بَہ، جَہ وغیرہ کو صفر بنا دیں اور صرف آخری عنصر کو = ۱ رکھیں۔ تب مقطع زیر بحث صورت میں تحویل ہو جائیگا جس میں اوپر کی صف اور آخری ستون حاشیہ میں داخل ہونگے۔ نیز یہ معلوم ہوگا کہ نتیجہ میں م ویں درجہ کا جزو ضربی ۲ م ویں رتبہ کے دئے ہوئے معوج متشاکل مقطع کا جذر المربع ہے۔

۳ - ثابت کرو

.	عہ	بہ	جہ
عَہ	.	ج	- ب
بَہ	- ج	.	ا
جَہ	ب	- ا	.

= -(عہ ا + بہ ب + جہ ج)(عَہ ا + بَہ ب + جَہ ج)

۴ - مقطع

.	عہ	بہ	جہ	ضہ
عَہ	.	ج	- ب	لا
بَہ	- ج	.	ا	ما
جَہ	ب	- ا	.	ی
ضَہ	- لا	- ما	- ی	.

کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرو —

جواب :- (ا لا + ب ما + ج ی){ لا (بہ جہَ)
+ ما (جہ عہَ) + ی (عہ بہَ) + ا (عہ ضہَ) + ب (بہ ضہَ)
+ ج (جہ ضہَ) }

متفرق مثالیں

(52)

۱ — ثابت کرو

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_0 & \text{ا}_1 & \text{ا}_2 \\ \text{ا}_1 & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 \\ \text{ا}_2 & \text{ا}_3 & \text{ا}_4 \end{vmatrix} \equiv \text{ج}$$

جہاں ج سے وہی مراد ہے جو عام طور پر لیجاتی ہے —

۲ — ثابت کرو

$$\begin{vmatrix} \text{بہ} + \text{جہ} & \text{جہ} + \text{عہ} & \text{عہ} + \text{بہ} \\ \text{بہ}' + \text{جہ}' & \text{جہ}' + \text{عہ}' & \text{عہ}' + \text{بہ}' \\ \text{بہ}'' + \text{جہ}'' & \text{جہ}'' + \text{عہ}'' & \text{عہ}'' + \text{بہ}'' \end{vmatrix} \equiv ۲ \begin{vmatrix} \text{عہ} & \text{بہ} & \text{جہ} \\ \text{عہ}' & \text{بہ}' & \text{جہ}' \\ \text{عہ}'' & \text{بہ}'' & \text{جہ}'' \end{vmatrix}$$

۳ — ثابت کرو

$$\begin{vmatrix} \text{بہ جہ} & \text{بہ جہ}' + \text{بہ}' \text{جہ} & \text{بہ}' \text{جہ}' \\ \text{جہ عہ} & \text{جہ عہ}' + \text{جہ}' \text{عہ} & \text{جہ}' \text{عہ}' \\ \text{عہ بہ} & \text{عہ بہ}' + \text{عہ}' \text{بہ} & \text{عہ}' \text{بہ}' \end{vmatrix} \equiv (\text{بہ جہ}')(\text{جہ عہ}')(\text{عہ بہ}')$$

جہاں بائیں طرف کے اجزائے ضربی دوسرے رتبہ کے مقطعات ہیں۔
صفوں کو بہَ جہَ ، جہَ عہَ ، عہَ بہَ سے تقسیم کرنے اور

$\text{ل} = \frac{\text{عہ}}{\text{عہ}'}$ ، $\text{م} = \frac{\text{بہ}}{\text{بہ}'}$ ، $\text{ن} = \frac{\text{جہ}}{\text{جہ}'}$ رکھنے سے مقطع (ایک جزو ضربی ترک کرنے سے) شکل ذیل میں تحویل ہو جاتا ہے:۔

$$\begin{vmatrix} ۱ & \text{مہ} + \text{نہ} & \text{مہ نہ} \\ ۱ & \text{نہ} + \text{لہ} & \text{نہ لہ} \\ ۱ & \text{لہ} + \text{مہ} & \text{لہ مہ} \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} ۱ & -\text{لہ} & \text{مہ نہ} \\ ۱ & -\text{مہ} & \text{نہ لہ} \\ ۱ & -\text{نہ} & \text{لہ مہ} \end{vmatrix} \equiv -(\text{مہ}-\text{نہ})(\text{نہ}-\text{لہ})(\text{لہ}-\text{مہ}) \text{ وغیرہ}$$

۴ — مقطع ذیل کی قیمت معلوم کرو :-

$$\begin{vmatrix} ۱ & \text{بہ} + \text{جہ} + \text{ضہ} & \text{بہ جہ} + \text{بہ ضہ} + \text{جہ ضہ} & \text{بہ جہ ضہ} \\ ۱ & \text{عہ} + \text{جہ} + \text{ضہ} & \text{عہ جہ} + \text{عہ ضہ} + \text{جہ ضہ} & \text{عہ جہ ضہ} \\ ۱ & \text{عہ} + \text{بہ} + \text{ضہ} & \text{عہ بہ} + \text{عہ ضہ} + \text{بہ ضہ} & \text{عہ بہ ضہ} \\ ۱ & \text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} & \text{عہ بہ} + \text{عہ جہ} + \text{بہ جہ} & \text{عہ بہ جہ} \end{vmatrix}$$

یہاں چونکہ دو حرفوں کا باہمی تبادلہ دو صفوں کو مماثل بنا دیگا اسلئے یہ مقطع چھ فرقوں کے حاصل ضرب سے صرف ایک عددی جزو ضربی کے لحاظ سے مختلف ہوگا۔ باہم اس مقطع کو آسانی کے ساتھ دفعہ ۱۳۲ مثال (۱۰) کی شکل میں تحویل کر سکتے ہیں۔ اس قسم کے کسی مقطع کی قیمت اسی طریقہ پر معلوم کیجا سکتی ہے اور علامت کی تعئین دفعہ ۱۳۲ مثال ۹ کے طریقہ سے عمل میں آسکتی ہے۔

(53

۵ — ثابت کرو

$$\begin{vmatrix} \text{بہ}^2\,\text{جہ}^2 + \text{عہ}^2\,\text{ضہ}^2 & \text{بہ جہ} + \text{عہ ضہ} & ۱ \\ \text{جہ}^2\,\text{عہ}^2 + \text{بہ}^2\,\text{ضہ}^2 & \text{جہ عہ} + \text{بہ ضہ} & ۱ \\ \text{عہ}^2\,\text{بہ}^2 + \text{جہ}^2\,\text{ضہ}^2 & \text{عہ بہ} + \text{جہ ضہ} & ۱ \end{vmatrix} \equiv (\text{بہ}-\text{جہ})(\text{عہ}-\text{ضہ})(\text{جہ}-\text{عہ})(\text{بہ}-\text{ضہ})(\text{عہ}-\text{بہ})(\text{جہ}-\text{ضہ})$$

آخری ستون کو ۲ عہ بہ جہ ضہ سے ضرب دو اور پہلے ستون میں جمع کرو۔ تب مقطع دفعہ ۱۳۲ مثال ۹ کی شکل کا ہو جاتا ہے۔

۶ — ثابت کرو

$$\begin{vmatrix} (\text{بہ} + \text{جہ} - \text{عہ} - \text{ضہ})^{۴} & (\text{بہ} + \text{جہ} - \text{عہ} - \text{ضہ})^{۲} & ۱ \\ (\text{جہ} + \text{عہ} - \text{بہ} - \text{ضہ})^{۴} & (\text{جہ} + \text{عہ} - \text{بہ} - \text{ضہ})^{۲} & ۱ \\ (\text{عہ} + \text{بہ} - \text{جہ} - \text{ضہ})^{۴} & (\text{عہ} + \text{بہ} - \text{جہ} - \text{ضہ})^{۲} & ۱ \end{vmatrix}$$

$$\equiv ۶۴ \, (\text{بہ} - \text{جہ})(\text{عہ} - \text{ضہ})(\text{جہ} - \text{عہ})(\text{بہ} - \text{ضہ})(\text{عہ} - \text{بہ})(\text{جہ} - \text{ضہ})$$

۷ — ثابت کرو

$$\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ا لا} + \text{ب} \\ \text{ب} & \text{ج} & \text{ب لا} + \text{ج} \\ \text{ا لا} + \text{ب} & \text{ب لا} + \text{ج} & ۰ \end{vmatrix} \equiv -(\text{ا ج} - \text{ب}^{۲})(\text{ا لا}^{۲} + ۲\,\text{ب لا} + \text{ج})$$

پہلی صف کو لا سے ضرب دو اور پھر اسکے اور دوسری صف کے مجموعہ کو تیسری صف میں سے تفریق کرو۔

۸ — اسی طرح ثابت کرو

$$\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} & \text{ا لا}^{۲} + ۲\,\text{ب لا} + \text{ج} \\ \text{ب} & \text{ج} & \text{د} & \text{ب لا}^{۲} + ۲\,\text{ج لا} + \text{د} \\ \text{ج} & \text{د} & \text{ع} & \text{ج لا}^{۲} + ۲\,\text{د لا} + \text{ع} \\ \text{ا لا}^{۲} + ۲\,\text{ب لا} + \text{ج} & \text{ب لا}^{۲} + ۲\,\text{ج لا} + \text{د} & \text{ج لا}^{۲} + ۲\,\text{د لا} + \text{ع} & ۰ \end{vmatrix}$$

$$\equiv - \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \\ \text{ج} & \text{د} & \text{ع} \end{vmatrix} (\text{ا لا}^{۴} + ۴\,\text{ب لا}^{۳} + ۶\,\text{ج لا}^{۲} + ۴\,\text{د لا} + \text{ع})$$

۹ — اگر

$$\text{ف}_{۱}(\text{لا}) = \text{ا}_{۱}\,\text{لا}^{۳} + ۳\,\text{ب}_{۱}\,\text{لا}^{۲} + ۳\,\text{ج}_{۱}\,\text{لا} + \text{د}_{۱}$$

$$\text{ف}_{۲}(\text{لا}) = \text{ا}_{۲}\,\text{لا}^{۳} + ۳\,\text{ب}_{۲}\,\text{لا}^{۲} + ۳\,\text{ج}_{۲}\,\text{لا} + \text{د}_{۲}$$

$$\text{ف}_{۳}(\text{لا}) = \text{ا}_{۳}\,\text{لا}^{۳} + ۳\,\text{ب}_{۳}\,\text{لا}^{۲} + ۳\,\text{ج}_{۳}\,\text{لا} + \text{د}_{۳}$$

تو ثابت کرو

$$\begin{vmatrix} \text{ف}_1(\text{لا}) & \text{ف}'_1(\text{لا}) & \text{ف}''_1(\text{لا}) \\ \text{ف}_2(\text{لا}) & \text{ف}'_2(\text{لا}) & \text{ف}''_2(\text{لا}) \\ \text{ف}_3(\text{لا}) & \text{ف}'_3(\text{لا}) & \text{ف}''_3(\text{لا}) \end{vmatrix} = -18 \begin{vmatrix} 1 & -\text{لا} & \text{لا}^2 & -\text{لا}^3 \\ \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 & \text{د}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 & \text{د}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 & \text{د}_3 \end{vmatrix} \qquad (54)$$

پہلا مقطع آسانی کے ساتھ (ایک جزو ضربی ترک کرنے سے) ذیل کے مقطع میں تحویل ہو جاتا ہے :-

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1\text{لا} + \text{ب}_1 & \text{ب}_1\text{لا} + \text{ج}_1 & \text{ج}_1\text{لا} + \text{د}_1 \\ \text{ا}_2\text{لا} + \text{ب}_2 & \text{ب}_2\text{لا} + \text{ج}_2 & \text{ج}_2\text{لا} + \text{د}_2 \\ \text{ا}_3\text{لا} + \text{ب}_3 & \text{ب}_3\text{لا} + \text{ج}_3 & \text{ج}_3\text{لا} + \text{د}_3 \end{vmatrix}$$

ہم نے دفعہ ۱۴۲ مثال ۷ میں دیکھا ہے کہ مقطع کا رتبہ اسکی قیمت کو بدلے بغیر بڑھایا جا سکتا ہے۔ مقطع کو محسوب کرنے میں اکثر سہولت اس طور پر پیدا ہو سکتی ہے کہ اضافہ کردہ عناصر کا مناسب انتخاب عمل میں آئے اور انکا حاشیہ لگایا جائے۔ چنانچہ اس آخری مقطع کو شکل ذیل میں لکھا جا سکتا ہے :-

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \text{ا}_1 & \text{ا}_1\text{لا} + \text{ب}_1 & \text{ب}_1\text{لا} + \text{ج}_1 & \text{ج}_1\text{لا} + \text{د}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ا}_2\text{لا} + \text{ب}_2 & \text{ب}_2\text{لا} + \text{ج}_2 & \text{ج}_2\text{لا} + \text{د}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ا}_3\text{لا} + \text{ب}_3 & \text{ب}_3\text{لا} + \text{ج}_3 & \text{ج}_3\text{لا} + \text{د}_3 \end{vmatrix}$$

پہلے ستون کو لا سے ضرب دیکر اسکو دوسرے میں سے تفریق کرنے، پھر اس نئے دوسرے ستون کو لا سے ضرب دیکر اسکو تیسرے میں سے تفریق کرنے، اور بالآخر نئے تیسرے ستون کو لا سے ضرب دیکر اسکو چوتھے میں سے تفریق کرنے سے متذکرۂ صدر نتیجہ ملجاتا ہے۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ مقطع

ل لا^2 + ج ما^2 + ب ی^2 - ۱	(ل - ج) لا ما	(ل - ب) لا ی
(ل - ج) لا ما	ل ما^2 + ا ی^2 + ج لا^2 - ۱	(ل - ا) ما ی
(ل - ب) لا ی	(ل - ا) ما ی	ل ی^2 + ب لا^2 + ا ما^2 - ۱

میں ل (لا^2 + ما^2 + ی^2) - ۱، جزو ضربی کے طور پر شریک ہوتا ہے اور دوسرے جزو ضربی میں ل شامل نہیں ہوتا۔

مثال ۹ کی طرح مقطع کو حاشیہ لگاؤ جس میں پہلے ستون کے عناصر ا، ل لا، ل ما، ل ی ہوں اور پہلی صف کے عناصر ا، ۰، ۰، ۰۔ پھر پہلے ستون کا لا گنا دوسرے ستون میں سے، پہلے ستون کا ما گنا تیسرے ستون میں سے، اور پہلے ستون کا ی گنا چوتھے ستون میں سے تفریق کرو۔ اس طور پر بدلے ہوئے مقطع میں پہلی صف میں سے دوسری کے لا گنا، تیسری کے ما گنا اور چوتھی کے ی گنا کے مجموعہ کو تفریق کرو۔

۱۱۔ مقطع

ا$_1$ + لا	ب$_1$	ج$_1$	د$_1$
ا$_2$	ب$_2$ + لا	ج$_2$	د$_2$
ا$_3$	ب$_3$	ج$_3$ + لا	د$_3$
ا$_4$	ب$_4$	ج$_4$	د$_4$ + لا

کو لا کی قوتوں میں پھیلاؤ۔

جواب:- لا^4 + (ا$_1$ + ب$_2$ + ج$_3$ + د$_4$) لا^3 + {(ب$_2$ ج$_3$) + (ا$_1$ د$_4$) + (ا$_1$ ج$_3$) + (ب$_2$ د$_4$) + (ا$_1$ ب$_2$) + (ج$_3$ د$_4$)} لا^2 + {(ب$_2$ ج$_3$ د$_4$) + (ا$_1$ ج$_3$ د$_4$) + (ا$_1$ ب$_2$ د$_4$) + (ا$_1$ ب$_2$ ج$_3$)} لا + (ا$_1$ ب$_2$ ج$_3$ د$_4$)

(55)

۱۲ — ثابت کرو

$$\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \\ \text{اَ} & \text{بَ} & \text{جَ} & \text{دَ} \\ \frac{\text{ا}^2}{\text{اَ}} & \frac{\text{ب}^2}{\text{بَ}} & \frac{\text{ج}^2}{\text{جَ}} & \frac{\text{د}^2}{\text{دَ}} \\ \frac{\text{اَ}^2}{\text{ا}} & \frac{\text{بَ}^2}{\text{ب}} & \frac{\text{جَ}^2}{\text{ج}} & \frac{\text{دَ}^2}{\text{د}} \end{vmatrix} = \frac{-(\text{ب جَ})(\text{ا دَ})(\text{ج اَ})(\text{ب دَ})(\text{ا بَ})(\text{ج دَ})}{\text{ا ب ج د اَ بَ جَ دَ}}$$

۱۳ — متماثلات ذیل کو ثابت کرو

$$\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{عہ} & \text{عَہ} & \text{عہ عَہ} \\ \text{ا} & \text{بہ} & \text{بَہ} & \text{بہ بَہ} \\ \text{ا} & \text{جہ} & \text{جَہ} & \text{جہ جَہ} \\ \text{ا} & \text{ضہ} & \text{ضَہ} & \text{ضہ ضَہ} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ج} \\ \text{بَ} & \text{جَ} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ج} & \text{ا} \\ \text{جَ} & \text{اَ} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} \\ \text{اَ} & \text{بَ} \end{vmatrix}$$

جہاں

$\text{ا} = (\text{بہ} - \text{جہ})(\text{عہ} - \text{ضہ})$، $\text{ب} = (\text{جہ} - \text{عہ})(\text{بہ} - \text{ضہ})$، $\text{ج} = (\text{عہ} - \text{بہ})(\text{جہ} - \text{ضہ})$

$\text{اَ} = (\text{بَہ} - \text{جَہ})(\text{عَہ} - \text{ضَہ})$، $\text{بَ} = (\text{جَہ} - \text{عَہ})(\text{بَہ} - \text{ضَہ})$، $\text{جَ} = (\text{عَہ} - \text{بَہ})(\text{جَہ} - \text{ضَہ})$

پہلے مقطع کو پہلے دو ستونوں سے بننے والے صغیروں کی رقوم میں (دیکھو دفعہ ۱۲۵) پھیلا کر ہم آسانی کے ساتھ ثابت کرتے ہیں کہ یہ مقطع

$$\text{ا}(\text{بَہ جَہ} + \text{عَہ ضَہ}) + \text{ب}(\text{جَہ عَہ} + \text{بَہ ضَہ}) + \text{ج}(\text{عَہ بَہ} + \text{جَہ ضَہ})$$

کے مساوی ہے اور پھر متماثلہ مساوات $\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} \equiv ۰$ کو دفعہ ۲۷، مثال ۱۸ کے رشتوں کے ساتھ استعمال کرنے سے نتیجہ حاصل ہو جاتا ہے۔

۱۴ — ثابت کرو کہ مثال ۱۳ کا مقطع حسب ذیل مقطع کے مساوی ہے:

$$\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{بہ جہ} + \text{عہ ضہ} & \text{بَہ جَہ} + \text{عَہ ضَہ} \\ \text{ا} & \text{جہ عہ} + \text{بہ ضہ} & \text{جَہ عَہ} + \text{بَہ ضَہ} \\ \text{ا} & \text{عہ بہ} + \text{جہ ضہ} & \text{عَہ بَہ} + \text{جَہ ضَہ} \end{vmatrix}$$

یہ نتیجہ دفعہ ۲۷ مثال ۱۸ کے رشتوں سے فوراً حاصل ہوتا ہے
اگر نتیجہ میں عَہ، بَہ، جَہ، ضَہ کو عہ²، بہ²، جہ²، ضہ² کے مساوی رکھا جائے تو ایک متماثلہ مساوات حاصل ہو گی جسکی ایک مخصوص صورت مثال ۵ ہے۔

۱۵ — حسب ذیل مقطع کو فرقوں کے تفاعل کے طور پر بیان کرو جسکا معدوم ہونا اُس شرط کو تعبیر کرتا ہے جو ایک خط پر چھ نقطوں کے درپیچ کے لئے ہے۔

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \text{عہ عَہ} & \text{عہ} + \text{عَہ} & 1 \\ \text{بہ بَہ} & \text{بہ} + \text{بَہ} & 1 \\ \text{جہ جَہ} & \text{جہ} + \text{جَہ} & 1 \end{vmatrix}$$

مقطع کو

$$\begin{vmatrix} 1 & -\text{عہ} & \text{عہ}^2 \\ 1 & -\text{بہ} & \text{بہ}^2 \\ 1 & -\text{جہ} & \text{جہ}^2 \end{vmatrix}$$

سے ضرب دینے اور پھر مساوات کی دونوں طرفوں سے جزو ضربی (بہ − جہ) (جہ − عہ) (عہ − بہ) جدا کرنے سے Δ کی قیمت کو آسانی کے ساتھ یوں بیان کیا جا سکتا ہے:— (56)

$$\Delta \equiv (\text{عہ} - \text{بَہ})(\text{بہ} - \text{جَہ})(\text{جہ} - \text{عَہ}) + (\text{عَہ} - \text{بہ})(\text{بَہ} - \text{جہ})(\text{جَہ} - \text{عہ})$$

اس نتیجہ کو مثال ۱۳ کے مقطع سے بھی جسکا معدوم ہونا چار نقطوں کے دو جفتوں کے درمیان عام ہم رسم ربط کو بیان کرتا ہے اخذ کیا جا سکتا ہے

۱۶ — مقطع ذیل کو پھیلاؤ:—

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_4 & ۰ & ۰ & ۰ & \text{لا} \\ \text{ا}_3 & ۰ & ۰ & \text{لا} & -1 \\ \text{ا}_2 & ۰ & \text{لا} & -1 & ۰ \\ \text{ا}_1 & \text{لا} & -1 & ۰ & ۰ \\ \text{ا}_0 & -1 & ۰ & ۰ & ۰ \end{vmatrix}$$

عمل کرنے پر معلوم ہوگا کہ یہ مقطع چار درجی

$$\text{ا}_0\,\text{لا}^4 + \text{ا}_1\,\text{لا}^3 + \text{ا}_2\,\text{لا}^2 + \text{ا}_3\,\text{لا} + \text{ا}_4$$

کے ساتھ متماثل ہے۔ یہ آسانی کے ساتھ دیکھا جا سکتا ہے کہ کسی درجہ کا کثیر الارقام اسی شکل کے مقطع کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے ۔

۱۷۔ ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} \text{لا} & \text{ا}_1 & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 & 1 \\ \text{عہ} & \text{لا} & \text{ب}_1 & \text{ب}_2 & 1 \\ \text{عہ} & \text{بہ} & \text{لا} & \text{ج}_1 & 1 \\ \text{عہ} & \text{بہ} & \text{جہ} & \text{لا} & 1 \\ \text{عہ} & \text{بہ} & \text{جہ} & \text{ضہ} & 1 \end{vmatrix} \equiv (\text{لا} - \text{عہ})(\text{لا} - \text{بہ})(\text{لا} - \text{جہ})(\text{لا} - \text{ضہ})$$

جہاں ا_1، ا_2، ا_3، ب_1، ب_2، ج_1 کوئی مقداریں ہیں۔

اگر ہم آخری ستون کا عہ گنا پہلے ستون میں سے آخری ستون کا بہ گنا دوسرے ستون میں سے، وغیرہ تفریق کریں تو یہ نتیجہ حاصل ہوگا۔ طالب علم کو (ن + ۱) ویں رتبہ کے متناظر مقطع کو لکھ لینے میں جو اس کثیر الارقام کے مساوی ہے جس کی اصلیں عہ_1، عہ_2، عہ_3، ... ، $\text{عہ}_\text{ن}$ ہیں کوئی دقت نہیں ہوگی ۔

۱۸ ۔ حسب ذیل مقطع کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرو :۔

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} (\text{عہ} - \text{عہ}')^2 & (\text{عہ} - \text{بہ}')^2 & (\text{عہ} - \text{جہ}')^2 \\ (\text{بہ} - \text{عہ}')^2 & (\text{بہ} - \text{بہ}')^2 & (\text{بہ} - \text{جہ}')^2 \\ (\text{جہ} - \text{عہ}')^2 & (\text{جہ} - \text{بہ}')^2 & (\text{جہ} - \text{جہ}')^2 \end{vmatrix}$$

یہاں $\Delta \equiv \begin{vmatrix} \text{عہ}^2 & \text{عہ} & 1 \\ \text{بہ}^2 & \text{بہ} & 1 \\ \text{جہ}^2 & \text{جہ} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2\,\text{عہ}' & \text{عہ}'^2 \\ 1 & -2\,\text{بہ}' & \text{بہ}'^2 \\ 1 & -2\,\text{جہ}' & \text{جہ}'^2 \end{vmatrix}$

اور اِن دو مقطعوں کو دفعہ ۱۳۲ مثال ۹ کی طرح اجزائے ضربی میں تحلیل کیا جا سکتا ہے۔

۱۹— مقطع (57)

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} (\text{ع}-\text{عَ})^{\text{۳}} & (\text{ع}-\text{بَ})^{\text{۳}} & (\text{ع}-\text{جَ})^{\text{۳}} \\ (\text{ب}-\text{عَ})^{\text{۳}} & (\text{ب}-\text{بَ})^{\text{۳}} & (\text{ب}-\text{جَ})^{\text{۳}} \\ (\text{ج}-\text{عَ})^{\text{۳}} & (\text{ج}-\text{بَ})^{\text{۳}} & (\text{ج}-\text{جَ})^{\text{۳}} \end{vmatrix}$$

کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

دو مستطیلی آراستوں

$$\left.\begin{matrix} \text{ع}^{\text{۳}} & \text{ع}^{\text{۲}} & \text{ع} & \text{۱} \\ \text{ب}^{\text{۳}} & \text{ب}^{\text{۲}} & \text{ب} & \text{۱} \\ \text{ج}^{\text{۳}} & \text{ج}^{\text{۲}} & \text{ج} & \text{۱} \end{matrix}\right\} (\text{۱}) \qquad \left.\begin{matrix} \text{۱} & -\text{۳عَ} & \text{۳عَ}^{\text{۲}} & -\text{عَ}^{\text{۳}} \\ \text{۱} & -\text{۳بَ} & \text{۳بَ}^{\text{۲}} & -\text{بَ}^{\text{۳}} \\ \text{۱} & -\text{۳جَ} & \text{۳جَ}^{\text{۲}} & -\text{جَ}^{\text{۳}} \end{matrix}\right\} (\text{۲})$$

کو ضرب دینے سے Δ چار رقموں کے مجموعہ کے مساوی ہو جاتا ہے جنمیں سے ہر ایک میں سے ہم دو مقطعوں

$$\begin{vmatrix} \text{۱} & \text{ع} & \text{ع}^{\text{۲}} \\ \text{۱} & \text{ب} & \text{ب}^{\text{۲}} \\ \text{۱} & \text{ج} & \text{ج}^{\text{۲}} \end{vmatrix} ، \begin{vmatrix} \text{۱} & \text{عَ} & \text{عَ}^{\text{۲}} \\ \text{۱} & \text{بَ} & \text{بَ}^{\text{۲}} \\ \text{۱} & \text{جَ} & \text{جَ}^{\text{۲}} \end{vmatrix}$$

کے حاصل ضرب کو ایک جزو ضربی کے طور پر نکال سکتے ہیں۔ بقیہ جزو ضربی ہو گا

$$\text{۳}\left\{\text{۳ ع ب ج} - \Sigma\, \text{ب ج}\, \Sigma\, \text{عَ} + \Sigma\, \text{بَ جَ}\, \Sigma\, \text{ع} - \text{۳ عَ بَ جَ}\right\}$$

جس کو شکل

$$\text{۳}\left\{(\text{ع}-\text{عَ})(\text{ب}-\text{بَ})(\text{ج}-\text{جَ}) + (\text{ع}-\text{بَ})(\text{ب}-\text{جَ})(\text{ج}-\text{عَ}) + (\text{ع}-\text{جَ})(\text{ب}-\text{عَ})(\text{ج}-\text{بَ})\right\}$$

میں بھی لکھا جا سکتا ہے۔

۲۰— ذیل کے پھیلاؤ کو ثابت کرو:—

$$\begin{vmatrix} ۱+\text{ا}_۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱+\text{ا}_۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱+\text{ا}_۳ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱+\text{ا}_۴ \end{vmatrix} = \text{ا}_۱\text{ا}_۲\text{ا}_۳\text{ا}_۴ \left\{ ۱ + \frac{۱}{\text{ا}_۱} + \frac{۱}{\text{ا}_۲} + \frac{۱}{\text{ا}_۳} + \frac{۱}{\text{ا}_۴} \right\}$$

پہلے ستون کو باقی دوسرے ہر ستون میں سے تفریق کرنے اور پھر مقطع کو پہلے ستون کے عناصر کے ایک خطی تفاعل کے طور پر بیان کرنے سے یہ پھیلاؤ آسانی کے ساتھ ثابت ہو جاتا ہے۔ ثبوت کی نوعیت سے یہ واضح ہو جائیگا کہ ن ویں رتبہ کے متناظر مقطع کی قیمت

$$\text{ا}_۱\,\text{ا}_۲\,\text{ا}_۳ \ldots \text{ا}_\text{ن} \left\{ ۱ + \Sigma \frac{۱}{\text{ا}_۱} \right\} \text{ ہے ۔}$$

۲۱ — ذیل کے ربط کو ثابت کرو :—

$$\begin{vmatrix} \text{عہ} & \text{لا} & \text{لا} & \text{لا} \\ \text{لا} & \text{بہ} & \text{لا} & \text{لا} \\ \text{لا} & \text{لا} & \text{جہ} & \text{لا} \\ \text{لا} & \text{لا} & \text{لا} & \text{ضہ} \end{vmatrix} = \text{ف}(\text{لا}) - \text{لا}\,\text{ف}'(\text{لا})$$

جہاں

$$\text{ف}(\text{لا}) \equiv (\text{لا} - \text{عہ})(\text{لا} - \text{بہ})(\text{لا} - \text{جہ})(\text{لا} - \text{ضہ})$$

اسکو پچھلی مثال سے اخذ کیا جا سکتا ہے یا بلا واسطہ اسی طریقہ (58)
پر ثابت کیا جا سکتا ہے ۔ پچھلی مثال کی طرح یہاں بھی ن ویں رتبہ کا اس شکل کا مقطع متناظر شکل میں بیان کیا جا سکتا ہے ۔

۲۲ — کسی مساوات کے سروں میں سے ہر ایک سر دو مقطعات کے خارج قسمت کے طور پر اصلوں کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے ۔ تیسرے درجہ کی مساوات کے لئے ذیل کا جو طریق عمل درج ہے اسکی توسیع کسی درجہ کی مساوات کے لئے آسانی سے کے ساتھ کیجا سکتی ہے

مثال ۱۰ دفعہ ۱۳۲ کی رو سے

$$\begin{vmatrix} \text{لا}^{3} & \text{لا}^{2} & \text{لا} & 1 \\ \text{عہ}^{3} & \text{عہ}^{2} & \text{عہ} & 1 \\ \text{بہ}^{3} & \text{بہ}^{2} & \text{بہ} & 1 \\ \text{جہ}^{3} & \text{جہ}^{2} & \text{جہ} & 1 \end{vmatrix} \equiv -(\text{بہ}-\text{جہ})(\text{جہ}-\text{عہ})(\text{عہ}-\text{بہ})(\text{لا}-\text{عہ})(\text{لا}-\text{بہ})(\text{لا}-\text{جہ})$$

مقطع کو پھیلانے سے یہ متماثلہ یوں لکھی جا سکتی ہے

$$\begin{vmatrix} \text{عہ}^{2} & \text{عہ} & 1 \\ \text{بہ}^{2} & \text{بہ} & 1 \\ \text{جہ}^{2} & \text{جہ} & 1 \end{vmatrix} \text{لا}^{3} - \begin{vmatrix} \text{عہ}^{3} & \text{عہ} & 1 \\ \text{بہ}^{3} & \text{بہ} & 1 \\ \text{جہ}^{3} & \text{جہ} & 1 \end{vmatrix} \text{لا}^{2} + \begin{vmatrix} \text{عہ}^{3} & \text{عہ}^{2} & 1 \\ \text{بہ}^{3} & \text{بہ}^{2} & 1 \\ \text{جہ}^{3} & \text{جہ}^{2} & 1 \end{vmatrix} \text{لا}$$

$$- \begin{vmatrix} \text{عہ}^{3} & \text{عہ}^{2} & \text{عہ} \\ \text{بہ}^{3} & \text{بہ}^{2} & \text{بہ} \\ \text{جہ}^{3} & \text{جہ}^{2} & \text{جہ} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \text{عہ}^{2} & \text{عہ} & 1 \\ \text{بہ}^{2} & \text{بہ} & 1 \\ \text{جہ}^{2} & \text{جہ} & 1 \end{vmatrix} \left\{ \text{لا}^{3} - \text{ب}_{1}\,\text{لا}^{2} + \text{ب}_{2}\,\text{لا} - \text{ب}_{3} \right\}$$

جس سے اوپر کا مسئلہ اخذ کیا جا سکتا ہے۔ ب_1، ب_2، ب_3 اس مساوات کے سر ہیں جس کی اصلیں عہ، بہ، جہ ہیں۔

۲۳ — چار درجی کے محول کعبی کو ایک مقطع کے طور پر بیان کرو

متماثلہ

$$\text{ا}_{0}\,\text{لا}^{4} + 4\,\text{ا}_{1}\,\text{لا}^{3} + 6\,\text{ا}_{2}\,\text{لا}^{2} + 4\,\text{ا}_{3}\,\text{لا} + \text{ا}_{4}$$

$$\equiv (\text{ا}\,\text{لا}^{2} + 2\,\text{ب}\,\text{لا} + \text{ج})(\text{اَ}\,\text{لا}^{2} + 2\,\text{بَ}\,\text{لا} + \text{جَ})$$

سے حاصل ہونیوالی مساواتوں کو لکھ لینے، $6\,\text{ا}_{0}\,\text{فہ} \equiv \text{ا}\,\text{جَ} + \text{اَ}\,\text{ج} - 2\,\text{ب}\,\text{بَ}$ مان لینے، اور متماثلہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{اَ} & 0 \\ \text{ب} & \text{بَ} & 0 \\ \text{ج} & \text{جَ} & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \text{اَ} & \text{ا} & 0 \\ \text{بَ} & \text{ب} & 0 \\ \text{جَ} & \text{ج} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} 2\,\text{ا}\,\text{اَ} & \text{ا}\,\text{بَ} + \text{اَ}\,\text{ب} & \text{ا}\,\text{جَ} + \text{اَ}\,\text{ج} \\ \text{ا}\,\text{بَ} + \text{اَ}\,\text{ب} & 2\,\text{ب}\,\text{بَ} & \text{ب}\,\text{جَ} + \text{بَ}\,\text{ج} \\ \text{ا}\,\text{جَ} + \text{اَ}\,\text{ج} & \text{ب}\,\text{جَ} + \text{بَ}\,\text{ج} & 2\,\text{ج}\,\text{جَ} \end{vmatrix}$$

میں اندراجات کرنے سے ہم آسانی کے ساتھ مساوات

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_۰ & \text{ا}_۱ & \text{ا}_۲ + ۲\,\text{ا}_۰\,\text{فہ} \\ \text{ا}_۱ & \text{ا}_۲ - \text{ا}_۰\,\text{فہ} & \text{ا}_۳ \\ \text{ا}_۲ + ۲\,\text{ا}_۰\,\text{فہ} & \text{ا}_۳ & \text{ا}_۴ \end{vmatrix} = ۰$$

حاصل کر لیتے ہیں جس کو پھیلا کر یہ معلوم کیا جا سکتا ہے کہ یہ مساوات معیاری محول کعبی کے مماثل ہے ۔

۲۴ ۔ وہ شرط معلوم کرو کہ ایک چار درجی جملہ دو چوتھی قوتوں کے (59)
مجموعہ کے طور پر بیان ہو سکے اور اسکو شکل

$$\text{ا}\,\text{لا}^۴ + ۴\,\text{ب}\,\text{لا}^۳ + ۶\,\text{ج}\,\text{لا}^۲ + ۴\,\text{د}\,\text{لا} + \text{ع} \equiv \text{ل}(\text{لا} + \text{طہ})^۴ + \text{م}(\text{لا} + \text{فہ})^۴$$

میں بیان کرکے وہ دو درجی معلوم کرو جسکی اصلیں طہ اور فہ ہیں ۔

اوپر کی متماثلہ سے ذیل کی مساواتیں ملتی ہیں :۔

$$\left.\begin{aligned} \text{ل} + \text{م} &= \text{ا} \\ \text{ل}\,\text{طہ} + \text{م}\,\text{فہ} &= \text{ب} \\ \text{ل}\,\text{طہ}^۲ + \text{م}\,\text{فہ}^۲ &= \text{ج} \\ \text{ل}\,\text{طہ}^۳ + \text{م}\,\text{فہ}^۳ &= \text{د} \\ \text{ل}\,\text{طہ}^۴ + \text{م}\,\text{فہ}^۴ &= \text{ع} \end{aligned}\right\} \quad (۱)$$

فرض کرو کہ $\text{لہ} + \text{مہ}\,\text{لا} + \text{نہ}\,\text{لا}^۲ = ۰$ وہ مساوات ہے جسکی اصلیں طہ اور فہ ہیں ۔ تب ہمیں ذیل کی تین مساواتیں حاصل ہونگی :۔

$$\text{لہ}\,\text{ا} + \text{مہ}\,\text{ب} + \text{نہ}\,\text{ج} = ۰$$
$$\text{لہ}\,\text{ب} + \text{مہ}\,\text{ج} + \text{نہ}\,\text{د} = ۰$$
$$\text{لہ}\,\text{ج} + \text{مہ}\,\text{د} + \text{نہ}\,\text{ع} = ۰$$

اور ان سے مطلوبہ شرط $\text{ج} = ۰$ فوراً مل جائیگی ۔ پھر پہلی دو مساواتوں اور مفروضہ مساوات کو ایک ساتھ لینے سے ذیل کا دو درجی حاصل ہوگا جسکی اصلیں طہ اور فہ ہیں :۔

$$\begin{vmatrix} ۱ & \text{لا} & \text{لا}^۲ \\ \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \end{vmatrix} = ۰$$

اگر کعبی کو دو مکعبوں کے مجموعہ کے طور پر بیان کرنا مقصود ہو یعنی شکل ل $(لا + طہ)^{۳}$ + م $(لا + فہ)^{۳}$ میں تو اوپر کی مساواتوں (۱) میں سے پہلی چار مساواتوں سے طہ اور فہ کے لئے وہی دو درجی حاصل ہوگا۔

۲۵ — چار درجی

$$ا\,(لا + عہ)^{۴} + ب\,(لا + بہ)^{۴} + ج\,(لا + جہ)^{۴} + د\,(لا + ضہ)^{۴} = ۰$$

کے لئے ثابت کرو

$$ھ = \sum اب\,(عہ - بہ)^{۲}$$

$$ع = \sum اب\,(عہ - بہ)^{۴}$$

$$جے = \sum ا ب ج\,(عہ - بہ)^{۲}(عہ - جہ)^{۲}(بہ - جہ)^{۲}$$

یہ جملے اس چار درجی کے لئے درست ہیں جو چوتھی قوتوں کی کسی تعداد کے مجموعہ کے طور پر لکھا گیا ہو۔ اگر اسکو صرف دو کے مجموعہ کے طور پر لکھا جائے تو جے = ۰۔ کیونکہ صرف ا اور ب باقی رہتے ہیں اور اگر وہ صرف ایک چوتھی قوت پر تحویل ہو جائے تو ھ، ع، جے سب کے سب معدوم ہو جاتے ہیں جسکو ہم پہلے ہی دوسرے طریقوں سے حاصل کر چکے ہیں۔

۲۶ — اس چوتھے رتبہ کے مقطع پر بحث کرو جسکے عناصر $(عہ - عہَ)^{۴}$ $(عہ - بہَ)^{۴}$ وغیرہ مثال ۱۹ صفحہ ۸۸ کی طرح ترتیب دئے گئے ہیں۔ اور اگر دو دی ہوئی چار درجی مساواتوں کی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ، عہَ، بہَ، جہَ، ضہَ ہوں تو ثابت کرو کہ اگر مقطع کی قیمت کو سروں کی رقوم میں بیان کیا جائے تو اس میں جملہ

$$ا\,یَ + اَ\,ی + ۶\,ج\,جَ - ۴\,(ب\,دَ + بَ\,د)$$

جزو ضربی کے طور پر شامل ہوتا ہے۔ جب دونوں چار درجی مماثل ہوں تو یہ جزو ضربی ۲ ع ہو جاتا ہے۔

۲۷ — وہ شرط معلوم کرو کہ تین متغیروں کا متجانس دو درجی تفاعل (60)

ا لا^۲ + ب ما^۲ + ج ی^۲ + ۲ ف ما ی + ۲ گ ی لا + ۲ ھ لا ما
دو اجزائے ضربی میں تحلیل ہو سکے۔

دئے ہوئے تفاعل کو دو اجزائے حاصل ضرب

(عہ لا + بہ ما + جہ ی)(عہَ لا + بہَ ما + جہَ ی)

کے مساوی رکھنے سے ہم آسانی کے ساتھ معلوم کر لیتے ہیں کہ

عہ عہَ ۰		عہَ عہ ۰	= ۸	ا ھ گ
بہ بہَ ۰		بہَ بہ ۰		ھ ب ف
جہ جہَ ۰		جہَ جہ ۰		گ ف ج

اس لئے مطلوبہ شرط یہ ہے کہ یہ آخری مقطع معدوم ہو جائے۔

۲۸ — ثابت کرو کہ لا، ما، ی، و کی عام سے عام قیمتیں جو دو متجانس مساواتوں

ا لا + ب ما + ج ی + د و = ۰، اَ لا + بَ ما + جَ ی + دَ و = ۰

کو پورا کرتی ہیں دو نامعلوم لا، ما کی رقوم میں حسب ذیل طریقہ پر

(ا بَ)(ا جَ)(ا دَ) لا = ا لا + اَ ما،

(ب اَ)(ب جَ)(ب دَ) ما = ب لا + بَ ما، وغیرہ

متشاکلاً بیان کیجا سکتی ہیں۔

اسکو ثابت کرنے کے لئے دی ہوئی مساواتوں کے ساتھ حسب ذیل دو مساواتیں اضافہ کرو:-

(ا^۲ / اَ) لا + (ب^۲ / بَ) ما + (ج^۲ / جَ) ی + (د^۲ / دَ) و = لہ،

(اَ^۲ / ا) لا + (بَ^۲ / ب) ما + (جَ^۲ / ج) ی + (دَ^۲ / د) و = مہ،

جہاں لہ اور مہ غیر معین مقداریں ہیں۔ ان چار مساواتوں کے ذریعہ لا، ما، ی، و کی قیمتیں دفعہ ۱۴۴ کی طرح معلوم کرو اور مقطعوں کو مثال ۱۲ صفحہ ۸۵ کی طرح تحویل کرو اور بالآخر لا = اَ بَ جَ دَ لہ، ما = ا ب ج د مہ رکھو۔

۲۹ ۔ اگر کسی مقطع میں لا = ا رکھنے سے ر ستون (یا صف) مماثل ہو جائیں تو مقطع میں ایک جزو ضربی $(\text{لا} - \text{ا})^{\text{ر}-1}$ ہے ۔

دئے ہوئے مقطع میں ان ر ستونوں میں سے ایک ستون کو باقی دوسرے ستونوں میں سے تفریق کرنے سے یہ نتیجہ حاصل ہو جاتا ہے ۔ حاصل ہونیوالے (ر − ۱) ستونوں میں سے ہر ایک میں لا − ا جزو ضربی کے طور پر شریک ہونا چاہیئے کیونکہ بموجب فرض اس کا ہر عنصر لا = ا رکھنے سے معدوم ہو جاتا ہے ۔

۳۰ ۔ ن ویں رتبہ کے مقطع

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \text{لا} & \text{ا} & \text{ا} & \cdot & \cdot & \text{ا} \\ \text{ا} & \text{لا} & \text{ا} & \cdot & \cdot & \text{ا} \\ \text{ا} & \text{ا} & \text{لا} & \cdot & \cdot & \text{ا} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{ا} & \text{ا} & \text{ا} & \cdot & \cdot & \text{لا} \end{vmatrix}$$

کی قیمت معلوم کرو جس کے صدر عناصر سب کے سب لا کے مساوی ہیں اور باقی سب عناصر ا کے ۔

پچھلی مثال کی رو سے Δ میں $(\text{لا} - \text{ا})^{\text{ن}-1}$ جزو ضربی کے طور پر (61)
شامل ہونا چاہیئے اور تمام ستونوں کو جمع کرنے سے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ لا + (ن − ۱) ا بھی اس مقطع کا ایک جزو ضربی ہونا چاہیئے ۔ پس ان دونو اجزاء کے حاصل ضرب اور Δ میں صرف ایک عددی جزو ضربی کا فرق ہو سکتا ہے چنانچہ حاصل ضرب کا صدر رقم کے ساتھ مقابلہ کیا جائے تو ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ

$$\Delta = (\text{لا} - \text{ا})^{\text{ن}-1} \left\{ \text{لا} + (\text{ن} - 1)\,\text{ا} \right\}$$

اس نتیجہ کو مثال ۲۹ کی مدد کے بغیر بالراست ثابت کیا جا سکتا ہے ۔

۳۱ ۔ مقطع

$$\begin{vmatrix} \text{ف}_1(\text{عہ}) & \text{ف}_2(\text{عہ}) & \text{ف}_3(\text{عہ}) \\ \text{ف}_1(\text{بہ}) & \text{ف}_2(\text{بہ}) & \text{ف}_3(\text{بہ}) \\ \text{ف}_1(\text{جہ}) & \text{ف}_2(\text{جہ}) & \text{ف}_3(\text{جہ}) \end{vmatrix}$$

میں جس میں ف_1، ف_2، ف_3 کوئی منطق صحیح تفاعل ہیں ایک جزو ضربی (بہ - جہ)(جہ - عہ)(عہ - بہ) شامل ہے۔

یہ اسی طرح کے استدلال سے حاصل ہو جاتا ہے جو مثال ۲۹ میں کیا گیا ہے۔ اس نوعیت کے مقطعے جن میں کسی ستون (یا صف) کے عناصر ایک ہی شکل کے تفاعل ہوتے ہیں اور کسی صف (ستون) کے عناصر میں ایک ہی مقدار شامل ہوتی ہے متبادلات (Alternants) کہلاتے ہیں

ظاہر ہے کہ یہ نتیجہ عام ہے اور کسی رتبہ کے متبادلہ میں شامل ہونیوالی سب مقداروں کے فرقوں کا حاصل ضرب ایک جزو ضربی کے طور پر شامل ہوتا ہے۔ دفعہ ۱۳۲ کے امثلہ ۹، ۱۰ اور دفعہ ۱۴۰ کے امثلہ ۱۱، ۱۲ سادہ ترین شکل کے متبادلات ہیں۔

۳۲۔ پہلی مثال کے متبادلہ کو فرقوں کے حاصل ضرب سے تقسیم کر کے خارج قسمت کو ایک مقطع کی شکل میں بیان کرو۔

توجہ کو قایم کرنے کی خاطر مان لو کہ شامل ہونیوالے تفاعلوں میں سے ہر ایک تفاعل پانچویں درجہ کا ہے تو ہم لکھ سکتے ہیں

$$\text{ف}_1(\text{عہ}) \equiv \text{ا}_1\text{عہ}^5 + \text{ب}_1\text{عہ}^4 + \text{ج}_1\text{عہ}^3 + \text{د}_1\text{عہ}^2 + \text{ع}_1\text{عہ} + \text{ک}_1\text{،}$$

$$\text{ف}_2(\text{عہ}) \equiv \text{ا}_2\text{عہ}^5 + \text{ب}_2\text{عہ}^4 + \text{ج}_2\text{عہ}^3 + \text{د}_2\text{عہ}^2 + \text{ع}_2\text{عہ} + \text{ک}_2\text{،}$$

$$\text{ف}_3(\text{عہ}) \equiv \text{ا}_3\text{عہ}^5 + \text{ب}_3\text{عہ}^4 + \text{ج}_3\text{عہ}^3 + \text{د}_3\text{عہ}^2 + \text{ع}_3\text{عہ} + \text{ک}_3\text{،}$$

اب مساوات

$$\text{لا}^3 + \text{ف لا}^2 + \text{ق لا} + \text{ر} = ۰$$

کی اصلوں کو عہ، بہ، جہ لینے اور مقطعوں

$ع^5$	$ع^4$	$ع^3$	$ع^2$	ع	۱
$ب^5$	$ب^4$	$ب^3$	$ب^2$	ب	۱
$ج^5$	$ج^4$	$ج^3$	$ج^2$	ج	۱
.	.	۱	.	.	.
.	۱	.	.	.	.
۱	.	.	.	.	.

$ا_1$	$ب_1$	$ج_1$	$د_1$	$ع_1$	$ک_1$
$ا_2$	$ب_2$	$ج_2$	$د_2$	$ع_2$	$ک_2$
$ا_3$	$ب_3$	$ج_3$	$د_3$	$ع_3$	$ک_3$
.	.	۱	ف	ق	ر
.	۱	ف	ق	ر	.
۱	ف	ق	ر	.	.

کا حاصل ضرب بنانے سے یہ فوراً معلوم ہو جاتا ہے کہ یہ آخری مقطع مطلوبہ خارج قسمت ہے۔

جب متبادلہ کسی رتبہ کا ہو اور $ف_1$، $ف_2$، $ف_3$ وغیرہ کسی درجہ کے منطق صحیح تفاعل ہوں تو بالکل ایسا ہی طریقہ خارج قسمت کے معلوم کرنے میں استعمال کیا جا سکتا ہے۔

۲۳۔ حسب ذیل مقطع کو خطی اجزائے ضربی میں تحلیل کرو:۔ (62)

$ا_1$	$ا_2$	$ا_3$	$ا_4$	$ا_5$
$ا_5$	$ا_1$	$ا_2$	$ا_3$	$ا_4$
$ا_4$	$ا_5$	$ا_1$	$ا_2$	$ا_3$
$ا_3$	$ا_4$	$ا_5$	$ا_1$	$ا_2$
$ا_2$	$ا_3$	$ا_4$	$ا_5$	$ا_1$

سب صفوں میں عناصر وہی پانچ مقداریں ہیں جو دائری ترتیب میں لی گئی ہیں، ہر صف میں پہلا عنصر مختلف ہے۔ اس قسم کے مقطع کو ہم

مستدیرہ کہینگے۔ مندرجۂ بالا شکل میں مستدیرہ کا لکھنا آسان ہے یعنی اس طور پر کہ ایک ہی عنصر وتری محل میں ہر جگہ واقع ہو چنانچہ مقطع بالا میں $ا_۱$ ـ مساوات $لا^۵ - ۱ = ۰$ کی کسی اصل کو ط سے تعبیر کرو اور پہلے ستون کو چھوڑکر باقی دوسرے ستونوں کو علی الترتیب ط، $ط^۲$، $ط^۳$، $ط^۴$ سے ضرب دو۔ پھر پہلے ستون میں باقی دوسرے ستونوں کے عناصر کا مجموعہ جمع کرو تو معلوم ہوگا کہ مقطع کے اجزائے ضربی حسب ذیل ہیں :-

$$ا_۱ + ا_۲ + ا_۳ + ا_۴ + ا_۵$$

$$ا_۱ + ط\,ا_۲ + ط^۲ ا_۳ + ط^۳ ا_۴ + ط^۴ ا_۵$$

$$ا_۱ + ط^۲ ا_۲ + ط^۴ ا_۳ + ط\,ا_۴ + ط^۳ ا_۵$$

$$ا_۱ + ط^۳ ا_۲ + ط\,ا_۳ + ط^۴ ا_۴ + ط^۲ ا_۵$$

$$ا_۱ + ط^۴ ا_۲ + ط^۳ ا_۳ + ط^۲ ا_۴ + ط\,ا_۵$$

جہاں مساوات $لا^۵ - ۱ = ۰$ کی پانچ اصلیں ۱، ط، $ط^۲$، $ط^۳$، $ط^۴$ ہیں۔ دونوں جملوں میں $ا_۱^۵$ کے سر کا مقابلہ کرنے سے یہ معلوم ہوگا کہ عددی جزو ضربی اکائی ہے (دیکھو مثال ۱۳ دفعہ ۱۴)۔ کسی رتبہ کے مستدیرہ پر اسی طرح کا طریق عمل جاری کیا جاسکتا ہے۔

۳۴ — ایک ہی رتبہ کے دو مستدیرات کا حاصل ضرب ایک مستدیرہ ہوتا ہے۔

۳۵ — ن ویں رتبہ کا مقطع

$$\Delta_ن \equiv \begin{vmatrix} ا_ن & ب_ن & . & . & . & . \\ -۱ & ا_{ن-۱} & ب_{ن-۱} & . & . & . \\ . & -۱ & ا_{ن-۲} & ب_{ن-۲} & . & . \\ . & . & -۱ & ا_{ن-۳} & ب_{ن-۳} & . \\ . & . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

محسوب کرو جس میں تمام عناصر صفر ہیں سوائے اُن کے جو وتر اور اُن خطوط
میں واقع ہیں جو وتر کے دونوں طرف اس کے متوازی اور اس کے متصل
ہیں ۔ انمیں سے ایک خط ایسے عناصر پر مشتمل ہے جنمیں سے ہر ایک
۱- کے مساوی ہے ۔

پہلے ستون کی رقوم میں پھیلانے سے ہم دیکھتے ہیں کہ زیر بحث
مقطع کی قسم کے تین مقطعوں میں جنکے رتبے ن، ن-۱، ن-۲ ہیں ذیل کا
رشتہ ہے :-

$$\Delta_{\text{ن}} = \text{ا}_{\text{ن}} \Delta_{\text{ن-۱}} + \text{ب}_{\text{ن}} \Delta_{\text{ن-۲}}$$

اس رشتہ کی مدد سے سلسلہ $\Delta_{\text{ن}}$، $\Delta_{\text{ن-۱}}$، $\Delta_{\text{ن-۲}}$، ....، $\Delta_{۲}$، $\Delta_{۱}$ میں (63)
کسی مقطع کو اس سے نچلے رتبہ کے دو مقطعوں میں تحویل کیا جا سکتا ہے
اور ظاہر ہے کہ $\Delta_{۱}$ اور $\Delta_{۲}$ کی قیمتیں صریحاً $\text{ا}_{۱}$ اور $\text{ا}_{۲}\text{ا}_{۱} + \text{ب}_{۲}$ ہیں ۔
اوپر کی مساوات کو $\Delta_{\text{ن-۱}}$ سے تقسیم کیا جائے تو

$$\frac{\Delta_{\text{ن}}}{\Delta_{\text{ن-۱}}} = \text{ا}_{\text{ن}} + \frac{\text{ب}_{\text{ن}}}{\dfrac{\Delta_{\text{ن-۱}}}{\Delta_{\text{ن-۲}}}}$$

پھر $\Delta_{\text{ن-۱}}$ کو $\Delta_{\text{ن-۲}}$ سے تقسیم کرنے پر جو خارج قسمت ملتا ہے اسکی بجائے
اسی طرح کی قیمت درج کیجائے اور اس عمل کو جاری رکھا جائے تو
یہ معلوم ہوگا کہ کسی مقطع کو اس سے عین نچلے رتبہ کے مقطع سے تقسیم کرنے پر
جو خارج قسمت ملتا ہے وہ دئے ہوئے عناصر کی رقوم میں ایک مسلسل
کسر کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے ۔ اس خاصیت کی بناء پر زیر بحث
شکل کے مقطعوں کو ہم **مسلسلات** کہینگے ۔ جب عناصر
$\text{ب}_{\text{ن}}$، $\text{ب}_{\text{ن-۱}}$، $\text{ب}_{\text{ن-۲}}$، ....، $\text{ب}_{۳}$، $\text{ب}_{۲}$ (جو وتر کے اوپر والے خط میں واقع ہیں)

میں سے ہر ایک + ۱ کے مساوی ہو تو حاصل ہونیوالا مقطع سادہ مسلسلہ ہے۔

۳۶ — ن ویں رتبہ کے مقطع

$$\Delta_{\text{ن}} \equiv \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \text{ا} & \text{عہ} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \text{ا} & \text{عہ} & \text{بہ} \\ \cdot & \cdot & \text{ا} & \text{عہ} & \text{بہ} & \cdot \\ \cdot & \text{ا} & \text{عہ} & \text{بہ} & \cdot & \cdot \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

کو محسوب کرو جبکہ وہ عناصر جو صفر نہیں ہوتے صرف عہ، بہ، ا ہیں جو وتر اور اسکے متصل اور متوازی خطوط میں واقع ہوتے ہیں جیسا کہ اوپر بتایا گیا ہے۔

ن کی کسی مخصوص قیمت کے لئے مقطع کو پچھلی مثال کے طریقہ کی بموجب مساوات

$$\Delta_{\text{ن}} = \text{عہ}\,\Delta_{\text{ن}-۱} - \text{بہ}\,\Delta_{\text{ن}-۲}$$

کی مدد سے فوراً محسوب کیا جا سکتا ہے۔ یہاں $\Delta_{۱}$ اور $\Delta_{۲}$ کی قیمتیں علی الترتیب عہ اور $\text{عہ}^{۲} - \text{بہ}$ ہیں۔

Δ کی متواتر قیمتوں کی ساخت پر غور کرنے سے طالب علم کو فوراً معلوم ہو جائیگا کہ نتیجہ میں شامل ہونیوالی ارقام جبکہ ن جفت اور ۲ر کے مساوی ہو یہ ہیں

$$\text{عہ}^{۲\text{ر}},\ \text{عہ}^{۲\text{ر}-۲}\,\text{بہ},\ \text{عہ}^{۲\text{ر}-۴}\,\text{بہ}^{۲},\ \ldots\ldots,\ \text{عہ}^{۲}\,\text{بہ}^{\text{ر}-۱},\ \text{بہ}^{\text{ر}}$$

اگر ن طاق اور ۲ر + ۱ کے مساوی ہے تو ارقام ہیں

$$\text{عہ}^{۲\text{ر}+۱},\ \text{عہ}^{۲\text{ر}-۱}\,\text{بہ},\ \text{عہ}^{۲\text{ر}-۳}\,\text{بہ}^{۲},\ \ldots\ldots,\ \text{عہ}^{۳}\,\text{بہ}^{\text{ر}-۱},\ \text{عہ}\,\text{بہ}^{\text{ر}}$$

آیندہ تحقیقات کے لئے جنمیں متذکرہ صدر نتائج سے فائدہ اٹھایا جائیگا یہ ضروری نہیں ہے کہ ان جملوں میں داخل ہونیوالے عددی سروں کی عام شکلوں سے واقفیت حاصل کیجائے۔ لیکن ایسی اشکال بغیر دقت کے

معلوم کیجا سکتی ہیں اور $\Delta_ن$ کے لئے حسب ذیل عام جملہ حاصل کیا جا سکتا ہے:-

$$\Delta_ن = عہ^ن - (ن-۱) عہ^{ن-۲} بہ + \frac{(ن-۳)(ن-۲)}{۱\times۲} عہ^{ن-۴} بہ^۲ - \frac{(ن-۵)(ن-۴)(ن-۳)}{۱\times۲\times۳} عہ^{ن-۶} بہ^۳ + \dots\dots\dots$$

۳۷ - اگر ایک کثیر الارقام ع کو کمتر ابعاد کے دوسرے کثیر الارقام عَ سے تقسیم کیا جائے تو خارج قسمت کے اور باقی کے سروں کو ع اور عَ کے سروں کی رقوم میں مقطعات کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے۔ (64)

ذیل کی مخصوص صورت میں جو طریقہ استعمال کیا گیا ہے وہ عام صورت میں بھی آسانی کے ساتھ اطلاق پذیر ہے۔ فرض کرو کہ ع پانچویں درجہ کا ہے اور عَ تیسرے درجہ کا۔ خارج قسمت اور باقی کو حسب ذیل شکل میں بیان کیا جا سکتا ہے:-

$$ف \equiv ق_0 لا^2 + ق_1 لا + ق_2 ، \quad ر \equiv ر_0 لا^2 + ر_1 لا + ر_2$$

نیز فرض کرو کہ

$$ع \equiv ا_0 لا^5 + ا_1 لا^4 + ا_2 لا^3 + ا_3 لا^2 + ا_4 لا + ا_5 ، \quad عَ \equiv اَ_0 لا^3 + اَ_1 لا^2 + اَ_2 لا + اَ_3$$

متماثلہ $ع \equiv ف عَ + ر$

سے ہمیں حسب ذیل مساواتیں ملتی ہیں:-

$$ا_0 = ق_0 اَ_0$$
$$ا_1 = ق_0 اَ_1 + ق_1 اَ_0$$
$$ا_2 = ق_0 اَ_2 + ق_1 اَ_1 + ق_2 اَ_0$$
$$ا_3 = ق_0 اَ_3 + ق_1 اَ_2 + ق_2 اَ_1 + ر_0$$
$$ا_4 = ق_1 اَ_3 + ق_2 اَ_2 + ر_1$$
$$ا_5 = ق_2 اَ_3 + ر_2$$

دفعہ ۱۴۴ کی بموجب حل کرنے سے ق_0، ق_1، ق_2 کو پہلی تین مساواتوں کے ذریعہ مقطعات کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے۔ اور پہلی تین مساواتوں کے ساتھ باری باری سے باقی ہر ایک مساوات کو لینے سے ر_0، ر_1، ر_2 متعین ہو سکتے ہیں۔ مثلاً ر_0 معلوم کرنیکے لئے پہلی چار مساواتوں سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$\begin{vmatrix} \text{اَ}_0 & 0 & 0 & -\text{ا}_0 \\ \text{اَ}_1 & \text{اَ}_0 & 0 & -\text{ا}_1 \\ \text{اَ}_2 & \text{اَ}_1 & \text{اَ}_0 & -\text{ا}_2 \\ \text{اَ}_3 & \text{اَ}_2 & \text{اَ}_1 & -\text{ا}_3+\text{ر}_0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{یعنی} \quad \text{اَ}_0^{3}\,\text{ر}_0 = \begin{vmatrix} \text{اَ}_0 & 0 & 0 & \text{ا}_0 \\ \text{اَ}_1 & \text{اَ}_0 & 0 & \text{ا}_1 \\ \text{اَ}_2 & \text{اَ}_1 & \text{اَ}_0 & \text{ا}_2 \\ \text{اَ}_3 & \text{اَ}_2 & \text{اَ}_1 & \text{ا}_3 \end{vmatrix}$$

۳۸ — اگر جفت درجہ ۲م کے ایک کثیر الارقام کو ایک دو درجی سے تقسیم کیا جائے تو خارج قسمت کے اور باقی کے سروں کی عام اشکال معلوم کرو۔ دئے ہوئے دو درجی کو $\text{لا}^2 + \text{عہ}\,\text{لا} + \text{بہ}$ لینے سے ہمیں متماثلہ ملتی ہے

$$\text{ا}_0\text{لا}^{2\text{م}} + \text{ا}_1\text{لا}^{2\text{م}-1} + \text{ا}_2\text{لا}^{2\text{م}-2} + \cdots + \text{ا}_{2\text{م}-2}\text{لا}^2 + \text{ا}_{2\text{م}-1}\text{لا} + \text{ا}_{2\text{م}}$$

$$\equiv (\text{ق}_0\text{لا}^{2\text{م}-2} + \text{ق}_1\text{لا}^{2\text{م}-3} + \cdots + \text{ق}_{2\text{م}-3}\text{لا} + \text{ق}_{2\text{م}-2})(\text{لا}^2 + \text{عہ}\,\text{لا} + \text{بہ})$$

$$+ \text{ر}_0\text{لا} + \text{ر}_1$$

اب ق_0، ق_1، ق_2، ....، $\text{ق}_\text{ر}$ کو حاصل کرنیکے لئے پچھلی مثال کی طرح پہلی (ر + ۱) مساواتوں کو لکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ان مساواتوں سے اخذ کردہ $\text{ق}_\text{ر}$ کی قیمت، ر ویں رتبہ کا ایک مقطع ہے جسکی شکل مثال ۳۶ کے مقطع جیسی ہے اور اسکا اوپر کا حاشیہ عناصر ا_1، ....، $\text{ا}_\text{ر}$ پر مشتمل ہے اور بائیں طرف کا حاشیہ عناصر ا_0، ا_1، ....، $\text{ا}_\text{ر}$ پر۔ اس مقطع کو آخری ستون کی رقوم میں پھیلانے سے یہ فوراً معلوم ہوتا ہے کہ کوئی خارج قسمت مثال ۳۶ کے مقطعات کے ایک سلسلہ کے ذریعہ شکل ذیل میں بیان ہوتا ہے:-

$$ق_{ر} = ا_{ر} - ا_{ر-١}\,\Delta_{١} + ا_{ر-٢}\,\Delta_{٢} - \dots \mp ا_{١}\,\Delta_{ر-١} \pm \Delta_{ر}$$ (64)

جہاں اوپر کی یا نیچے کی علامت لینی چاہئے بموجب اسکے کہ ر جفت یا طاق ہو ۔ باقی کے سروں کو حاصل کرنے کے لئے مساواتیں ہیں

$$بہ\,ق_{م-٣} + عہ\,ق_{م-٢} + ر_{\cdot} = ا_{م-١}$$

$$بہ\,ق_{م-٢} + ر_{١} = ا_{م}$$

$ق_{م-٣}$، $ق_{م-٢}$ کی قیمتوں کو اوپر کے ثابت شدہ ضابطہ سے بیان کرنے اور مثال ۳۶ کے نتیجوں کو پیش نظر رکھنے سے ہمیں $ر_{\cdot}$ اور $ر_{١}$ کے لئے حسب ذیل عام اشکال حاصل ہوتی ہیں :-

$$ر_{\cdot} = ا_{م-١} + ا_{م-٣}\,بہ + ا_{م-٥}\,بہ^{٢} + \dots + ا_{٢}\,بہ^{م-٢} + ا_{١}\,بہ^{م-١}$$

$$ر_{١} = ا_{م} + ب_{م-٢}\,بہ + ب_{م-٤}\,بہ^{٢} + \dots + ب_{٢}\,بہ^{م-١} + ب\,بہ^{م}$$

جنمیں سر ا، ب سب کے سب عہ کے تفاعل ہیں اور کسی سر ا یا ب میں عہ کی بڑی سی بڑی قوت اُس لاحقہ سے تعبیر کیگئی ہے جو اسکے سر کے ساتھ لگایا گیا ہے ۔

۳۹ — اگر ایک متشاکل مقطع کے صدر عناصر میں سے ہر ایک میں ایک ہی مقدار لا کا اضافہ کیا جائے تو اس طور پر حاصل شدہ مقطع کو صفر کے مساوی رکھنے سے لا میں جو مساوات ملتی ہے اسکی سب اصلیں حقیقی ہوتی ہیں ۔

فرض کرو کہ زیر بحث ن ویں رتبہ کا متشاکل مقطع $\Delta_{ن}$ سے تعبیر ہوتا ہے

$$\Delta_{\text{ن}} = \begin{vmatrix} \text{ا} + \text{لا} & \text{ھ} & \text{گ} & . & . \\ \text{ھ} & \text{ب} + \text{لا} & \text{ف} & . & . \\ \text{گ} & \text{ف} & \text{ج} + \text{لا} & . & . \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

میں لکھا گیا ہے۔

فرض کرو کہ پہلی صف اور پہلے ستون کو خارج کر دینے سے جو مقطع حاصل ہوتا ہے اسکو یعنے $\Delta_{\text{ن}}$ کے پہلے صدر صغیر کو $\Delta_{\text{ن-۱}}$ سے تعبیر کیا گیا ہے۔ اسی طرح $\Delta_{\text{ن-۱}}$ کا پہلا صدر صغیر $\Delta_{\text{ن-۲}}$ سے تعبیر ہوتا ہے اور $\Delta_{\text{ن-۲}}$ کا پہلا صدر صغیر $\Delta_{\text{ن-۳}}$ سے اور علیٰ ہذا القیاس۔ اس طور پر حاصل کردہ آخری تفاعل $\Delta_{\text{۱}}$، ل + لا شکل کا ہوگا۔ ان مقطعوں کے ساتھ ہم ایک اور مقطع $\Delta_{\text{۰}} = \text{۱}$ لیتے ہیں جسکے متعلق یہ تصور کیا جا سکتا ہے کہ وہ صغیروں کے سلسلہ کو مکمل کرتا ہے اور اسی طرح کے عمل سے حاصل ہوا ہے کیونکہ $\Delta_{\text{ن}}$ کی قیمت میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی اگر ہم ایک صف اور ایک ستون کا ایسا حاشیہ لگا دیں جو بالکلیہ صفر عنصروں پر مشتمل ہو سوا ایک عنصر +۱ کے جو صدر وتر میں واقع ہوتا ہے۔ اب ہمیں ن + ۱ تفاعلوں کا یہ سلسلہ ملیگا

$$\Delta_{\text{ن}}،\ \Delta_{\text{ن-۱}}،\ \Delta_{\text{ن-۲}}،\ \dots،\ \Delta_{\text{۲}}،\ \Delta_{\text{۱}}،\ \Delta_{\text{۰}}$$

جنکے درجے (لا میں) لاحقوں سے تعبیر ہوتے ہیں۔ جب اس سلسلہ میں لا کی بجائے $+\infty$ درج کیا جاتا ہے تو علامتیں سب کی سب مثبت ملتی ہیں اور جب $-\infty$ درج کیا جاتا ہے تو علامتیں ($\Delta_{\text{۰}}$ سے شروع کرکے) متبادلاً مثبت اور منفی ہیں۔ پس اگر لا کو مسلسل بڑھتا ہوا تصور کیا جائے تو لا کے $-\infty$ سے $+\infty$ تک جانے میں اس سلسلہ میں علامت کی

ن تبدیلیاں کم ہو جاتی ہیں ۔ اب دفعہ ۱۴۹ کے مسئلہ سے یہ معلوم ہوتا ہے
کہ لا کی وہ قیمت جو اس سلسلہ کے کسی تفاعل کو ($\Delta_{ن}$، Δ. کو چھوڑ کر) صفر
بناتی ہے اس تفاعل کے دونوں طرف کے متصل تفاعلوں کو مختلف العلامت
کر دیتی ہے ۔ Δ. اپنی علامت برقرار رکھتا ہے ۔ پس دفعہ ۹۶، (۲) کی طرح
یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ علامت کی کوئی تبدیلی کم نہیں ہو سکتی سوائے اس صورت
کے جب، لا، $\Delta_{ن} = ۰$ کی ایک حقیقی اصل میں سے گذرے ۔ اسلئے اس
مساوات کی ن حقیقی اصلیں موجود ہونی چاہئیں تاکہ $-\infty$ سے $+\infty$ تک
گذرنے میں علامت کی ن تبدیلیاں کم ہو سکیں ۔

اس سلسلہ کی کوئی مساوات چونکہ اسی شکل کی ہے جو شکل کہ $\Delta_{ن} = ۰$ (66)
کی ہے اس لئے اسکی تمام اصلیں حقیقی ہیں ۔ نیز یہ بھی ظاہر ہے کہ ان میں سے
ہر مساوات (سلسلہ میں) اپنے سے اوپر کی مساوات کے حوالے سے ایک
انتہائی مساوات ہے ۔ کیونکہ $\Delta_{ن}$ کی ہر دو متصلہ اصلوں میں سے
گزرنے میں $\Delta_{ن}$ اور $\Delta_{ن-۱}$ کے درمیان علامت کی ایک تبدیلی کم ہونیکے لئے
$\Delta_{ن-۱}$ کی قیمت کو لا کی ان قیمتوں کے درمیان علامت بدلنی چاہیئے ۔

مساوات $\Delta_{ن} = ۰$ میں مساوی اصلیں ہو سکتی ہیں اور جو کچھ اوپر ثابت ہوا
اُس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ جب اس مساوات کی ر اصلیں ع کے مساوی
ہوں تو مساوات $\Delta_{ن-۱} = ۰$ کی (ر - ۱) اصلیں ع کے مساوی ہیں،
مساوات $\Delta_{ن-۲} = ۰$ کی (ر - ۲) اصلیں ع کے مساوی ہیں اور علیٰ ہذا القیاس ۔

یہ مقطع جس پر یہاں بحث کیگئی ہے نظری اور عملی ریاضیات کی متعدد تحقیقاتوں
میں واقع ہوتا ہے ۔ زیر بحث اہم خاصیت کا جو ثبوت یہاں دیا گیا ہے
وہ سامن (Salmon) کی *Higher Algebra* (دفعہ ۴۶) سے لیا گیا ہے

اور طالب علم کو اس مسئلہ کے دیگر ثبوتوں کے لئے اسکا حوالہ دیا جاتا ہے۔

۴۰ ـ اگر پچھلی مثال کے مقطع میں ر اصلیں عہ کے مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ ہر پہلے صغیر میں (ر ـ ۱) اصلیں عہ کے مساوی ہیں، ہر دوسرے صغیر میں (ر ـ ۲) اصلیں عہ کے مساوی ہیں، اور علیٰ ہذا۔

متکافی مقطع کے عناصر کے لئے ترقیم ا، ھ، گ، ..... استعمال کرنے سے ہمیں مساوات ملتی ہے

$$\text{ا ب} - \text{ھ}^{2} = \Delta_{\text{ن}-2}\,\Delta_{\text{ن}}$$

اب صفوں اور ستونوں کے مناسب انتقال کے ذریعہ یہ آسانی دیکھ لیا جا سکتا ہے کہ ہر صدر پہلے صغیر میں ضعفی اصل عہ، ر ـ ۱ مرتبہ شامل ہوتی ہے۔ اوپر لکھی ہوئی مساوات سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ صغیر ھ میں یہ اصل ر ـ ۱ مرتبہ شامل ہونی چاہیئے اور یہ ظاہر ہے کہ کسی پہلے صغیر کو تعبیر کرنے کے لئے ھ استعمال کیا جا سکتا ہے۔

۴۱ ـ وہ شرطیں معلوم کرو کہ مساوات

$$\begin{vmatrix} \text{ا} + \text{لا} & \text{ھ} & \text{گ} \\ \text{ھ} & \text{ب} + \text{لا} & \text{ف} \\ \text{گ} & \text{ف} & \text{ج} + \text{لا} \end{vmatrix} = 0$$

میں مساوی اصلیں ہوں۔

چونکہ ہر پہلے صغیر میں دوہری اصل شامل ہونی چاہیئے ہم فوراً مطلوبہ شرطیں شکل ذیل میں اخذ کرتے ہیں:ـ

$$\text{ا} - \frac{\text{گ ھ}}{\text{ف}} = \text{ب} - \frac{\text{ھ ف}}{\text{گ}} = \text{ج} - \frac{\text{ف گ}}{\text{ھ}}$$

[یہ اور اس سے پہلے کی مثال راؤتھ کی "Dynumies of a system of Rigid Bodies" حصہ دوم دفعہ ۶۱ سے لی گئی ہیں۔]

۴۲ ـ کسی متشاکل مقطع کو اس طور پر بدلا جا سکتا ہے کہ مزدوج

عنصروں کے کسی منتخبہ زوج میں سے ہر ایک عنصر صفر کے مساوی ہو اور مقطع متشاکل ہی رہے۔

مثلاً اس مقطع پر غور کرو جو پچھلی مثال میں لا = ۰ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے اور فرض کرو کہ عنصر گ کا علیحدہ کرنا یعنے اسکو صفر کے مساوی بنانا مطلوب ہے۔ تیسرے ستون کے ہر عنصر کو ا سے ضرب دو (اور اسکے ساتھ ہی پورے مقطع کو ا سے تقسیم کرو) اور اس طور پر تبدیل شدہ عناصر میں سے پہلے ستون کے عناصر کو گ سے ضرب دینے کے بعد تفریق کرو۔ اب متناظر صفوں کے ساتھ بھی یہی عمل کرو تو حاصل مقطع متشاکل ہوگا اور اسمیں گ کی بجائے صفر ہوگا۔ یہ عمل کسی رتبہ کے مقطع پر جاری ہو سکتا ہے اور پہلی صف اور پہلے ستون کے ہر زوج عناصر سب کے سب یکے بعد دیگرے علیحدہ کئے جا سکتے ہیں اور من بعد بقیہ صفوں اور ستونوں کے عناصر بھی۔ بالآخر مقطع ایک ایسے مقطع میں تحویل کیا جا سکتا ہے جسکے سب عناصر سوائے صدر عنصروں کے معدوم ہوں۔ (67)

۴۳۔ ذیل کے کسی رتبہ کے مقطع کو ایسی شکل میں تحویل کرو کہ لا صرف صدر عناصر میں شامل ہو:۔

$$\begin{vmatrix} ا_1 لا + اَ_1 & ب_1 لا + بَ_1 & ج_1 لا + جَ_1 & \cdots \\ ا_2 لا + اَ_2 & ب_2 لا + بَ_2 & ج_2 لا + جَ_2 & \cdots \\ ا_3 لا + اَ_3 & ب_3 لا + بَ_3 & ج_3 لا + جَ_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

اسکو مقطع $(ا_1\ ب_2\ ج_3 \ldots ل_ن)$ کے متکافی مقطع سے ضرب دو۔

اگر دیا ہوا مقطع متشاکل ہے تو اس سے اس طور پر اخذ کیا ہوا مقطع متشاکل نہیں ہوگا لیکن ایسی صورت میں ایک دوسرا مختلف عمل اختیار کیا جا سکتا ہے تا کہ دیا ہوا مقطع ایک متشاکل مقطع میں تحویل ہو اور لا صرف صدر

عناصر میں موجود ہو چنانچہ پچھلی مثال کے طریق عمل کے بالکل مشابہ طریقہ سے یکے بعد دیگرے مزدوج عناصر کے تمام زوجوں میں سے لا کے سروں کو علٰحدہ کیا جا سکتا ہے۔ اگر تحویل شدہ مقطع کے صدر عنصروں میں لا کے سروں کی علامتیں سب کی سب وہی ہوں تو مثال ۳۹ کی طرح یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ متناظر مساوات کی اصلیں سب کی سب حقیقی ہونگی۔

۴۴ — فرض کرو کہ ن ویں رتبہ کے ایک مقطع کو دو مستطیلی آراستوں میں تقسیم کیا گیا ہے ایک میں صفوں کی تعداد مہ ہے اور دوسرے میں نہ (جہاں مہ + نہ = ن) اور فرض کرو کہ مقطعات کو ضرب دینے میں جو عمل اختیار کیا جاتا ہے اسی عمل سے ان دو آراستوں سے حاصل ضربوں کے مہ نہ مجموعے بنائے گئے ہیں۔ تب اگر عناصر کے درمیان ایسے رشتے موجود ہوں کہ حاصل ضربوں کے یہ مجموعے علٰحدہ علٰحدہ معدوم ہوتے ہیں تو پہلے آراستے سے بننے والے مہ رتبے کے مقطعات دوسرے آراستے کے متمم عناصر سے بننے والے نہ رتبے کے مقطعات کے متناسب ہونگے۔

تفہیم کی خاطر ہم پانچویں رتبہ کا ایک مقطع لیتے ہیں لیکن ثبوت کا طرز بالکلیہ عام ہے۔ فرض کرو کہ مقطع

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 & \text{ا}_4 & \text{ا}_5 \\ \text{ب}_1 & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 & \text{ب}_4 & \text{ب}_5 \\ \text{ج}_1 & \text{ج}_2 & \text{ج}_3 & \text{ج}_4 & \text{ج}_5 \\ \text{لا}_1 & \text{لا}_2 & \text{لا}_3 & \text{لا}_4 & \text{لا}_5 \\ \text{ما}_1 & \text{ما}_2 & \text{ما}_3 & \text{ما}_4 & \text{ما}_5 \end{vmatrix}$$

کو دو آراستوں میں افقاً توڑ دیا گیا ہے ایک میں تین صفیں ہیں اور (68)
دوسرے میں دو۔ فرض کرو کہ حسب ذیل چھ رشتے موجود ہیں:—

$\Sigma\,\text{ا}_1\text{لا}_1 = 0$، $\Sigma\,\text{ا}_1\text{ما}_1 = 0$، $\Sigma\,\text{ب}_1\text{لا}_1 = 0$، $\Sigma\,\text{ب}_1\text{ما}_1 = 0$، $\Sigma\,\text{ج}_1\text{لا}_1 = 0$، $\Sigma\,\text{ج}_1\text{ما}_1 = 0$

اب اگر Δ کو لاپلاس کے مسئلہ سے پھیلایا جائے اور صغیر مقطعات اس طور پر لئے جائیں کہ پھیلاؤ میں داخل ہونیوالی علامتیں سب کی سب مثبت ہوں (اور یہ آسانی کے ساتھ کیا جا سکتا ہے) یعنی اگر پھیلاؤ

Δ ≡ (ا۱ ب۲ ج۳)(لا۴ م۵) + (ا۱ ب۳ ج۴)(لا۲ م۵) + (ا۱ ب۲ ج۴)(لا۵ م۳) + ...

ہو تو یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ تیسرے رتبہ کا ہر صغیر مقطع جو پہلے آرا ستے سے بنتا ہے اُس مقطع کے متناسب ہے جو مندرجۂ بالا Δ کے پھیلاؤ میں اسکے ساتھ جزو ضربی کے طور پر شریک ہے۔

سہولت کے مدنظر Δ کے مندرجہ بالا پھیلاؤ کے لئے ہم ذیل کی ترقیم استعمال کرتے ہیں:-

Δ ≡ ل لَ + م مَ + ن نَ + پ پَ + ...

مقطع Δ کا مربع لینے، اوپر کے رشتوں کو استعمال کرنے اور رہر ترکیبی آرا ستے کا جداگانہ طور پر مربع لینے سے جو مقطعات حاصل ہوں انکی بجائے اُنکی قیمتیں رکھنے، اور اس طور پر حاصل کردہ Δ۲ کی دو قیمتوں کو مساوی رکھنے سے ہم حاصل کرتے ہیں

(ل لَ + م مَ + ن نَ + ...)۲ = (ل۲ + م۲ + ن۲ + ...)(لَ۲ + مَ۲ + ...)

اور اس سے

(ل مَ - لَ م)۲ + (ل نَ - لَ ن)۲ + (م نَ - مَ ن)۲ + ... = ۰

اور اس سے ہم فوراً حاصل کر لیتے ہیں

ل/لَ = م/مَ = ن/نَ = پ/پَ = ...

۴۵ — چوتھے رتبہ کے ایک مقطع کو مساوی طور پر پچھلی مثال کی طرح دو مستطیلی آرا ستوں میں تقسیم کیا گیا ہے اور وہی شرطیں پوری ہوتی ہیں اس مقطع سے بننے والے دوسرے رتبہ کے صغیروں کے درمیان

جو رشتے موجود ہیں انکو معلوم کرو۔

ہم چوتھے رتبہ کا عام مقطع

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 & \text{د}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 & \text{د}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 & \text{د}_3 \\ \text{ا}_4 & \text{ب}_4 & \text{ج}_4 & \text{د}_4 \end{vmatrix}$$

لیتے ہیں اور اسکو پہلے لاپلاس کے مسئلہ سے پھیلاتے ہیں۔ یہاں یہ جتانا ضروری ہے کہ ایسے مقطع کو دوسرے رتبہ کے صغیروں کی رقوم میں پھیلانے کی ضرورت اکثر واقع ہوگی اسلئے طالب علم کو اسکا پھیلاؤ مثبت علامتوں کے ساتھ اچھی طرح ذہن نشین کرلینا چاہیئے پھیلائیے ہے

$$(\text{ب}_1\,\text{ج}_2)(\text{ا}_3\,\text{د}_4) + (\text{ج}_1\,\text{ا}_2)(\text{ب}_3\,\text{د}_4) + (\text{ا}_1\,\text{ب}_2)(\text{ج}_3\,\text{د}_4)$$

$$+ (\text{ا}_1\,\text{د}_2)(\text{ب}_3\,\text{ج}_4) + (\text{ب}_1\,\text{د}_2)(\text{ج}_3\,\text{ا}_4) + (\text{ج}_1\,\text{د}_2)(\text{ا}_3\,\text{ب}_4)$$

اسکو لکھنے کا طریقہ واضح ہے۔ جب چار حروف شامل ہوں تو اسی ترتیب کا لحاظ رکھا جائے جیسا کہ ہم نے پچھلے موقعوں پر کیا ہے۔

(69) مثال ماسبق کی رو سے ہمیں ذیل کے رشتے حاصل ہوتے ہیں:۔

$$\frac{(\text{ب}_1\,\text{ج}_2)}{(\text{ا}_3\,\text{د}_4)} = \frac{(\text{ج}_1\,\text{ا}_2)}{(\text{ب}_3\,\text{د}_4)} = \frac{(\text{ا}_1\,\text{ب}_2)}{(\text{ج}_3\,\text{د}_4)} = \frac{(\text{ا}_1\,\text{د}_2)}{(\text{ب}_3\,\text{ج}_4)} = \frac{(\text{ب}_1\,\text{د}_2)}{(\text{ج}_3\,\text{ا}_4)} = \frac{(\text{ج}_1\,\text{د}_2)}{(\text{ا}_3\,\text{ب}_4)}$$

بشرطیکہ حسب ذیل چار مساواتیں درست ہوں:۔

$$\Sigma\, \text{ا}_1\,\text{ا}_2' = 0\text{،}\quad \Sigma\, \text{ا}_1\,\text{ا}_3' = 0\text{،}\quad \Sigma\, \text{ا}_1\,\text{ا}_4' = 0\text{،}$$

ہم نے جو کچھ اوپر ثابت کیا ہے اسکا ایک اہم استعمال ہمیں تجسمات میں خط مستقیم کے چھہ محددوں کی بحث میں ملیگا۔ (دیکھو سامن کا ابعاد ثلاثہ ہندسہ تحلیلی طبع چہارم دفعہ ۵۷ ب)۔

یہاں یہ بتا دینا بھی ضروری معلوم ہوتا ہے کہ تیسرے رتبہ کے مقطع کے پھیلاؤ کو یکساں طور پر مثبت علامتوں کے ساتھ لکھ لینا سہولت کا باعث ہوتا ہے کیونکہ وہ کثرت سے عملی سوالات میں واقع ہوتا ہے۔ مثلاً مثال ماسبق کے مقطع ۵ میں آخری صف اور آخری ستون کو خارج کر دینے سے تیسرے رتبہ کا ایک مقطع حاصل ہوتا ہے۔ ہم اسکے پھیلاؤ کو ذیل میں لکھتے ہیں جسمیں شامل ہونیوالے تین حرفوں کو دائری ترتیب میں لیا گیا ہے:۔

$$(\text{ا}_1\,\text{ب}_2\,\text{ج}_3) \equiv \text{ا}_1(\text{ب}_2\,\text{ج}_3) + \text{ب}_1(\text{ج}_2\,\text{ا}_3) + \text{ج}_1(\text{ا}_2\,\text{ب}_3)$$

۴۶ — (ن-۱) خطی متجانس مساواتوں سے ن متغیروں کی نسبتیں حاصل کرنیکے لئے دفعہ ۴۵ میں جو مساواتیں (۳) حاصل ہوئی تھیں انکو مثال ۴۴ کے مسئلہ کی مدد سے اخذ کرو۔

۴۷ — دی ہوئی خطی مساواتوں کے ایک حیث سے اقل مربعوں کے طریقہ کی رو سے مجہول مقداروں کی جو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں ان کو مقطعات کی شکل میں بیان کرو۔

دی ہوئی مساواتوں کے متعلق جو تعداد میں مجہول مقداروں کی تعداد سے زیادہ ہیں یہ مان لیا جاتا ہے کہ وہ مشاہدے یا تجربہ کے نتیجہ کے طور پر حاصل ہوئی ہیں اور عددی سر جو انمیں داخل ہوتے ہیں مشاہدے کی خطاؤں کی وجہ سے پوری صحت کے ساتھ معلوم نہیں ہوتے۔ ایسی صورتوں میں مجہول مقداروں کی سب سے زیادہ قابل اعتماد قیمتیں اس طریقہ سے حاصل ہوتی ہیں جسکو اب ہم بیان کرینگے۔ اس طریقہ کو ہم "اقل مربعوں کا طریقہ" کہینگے۔ مثلاً تین مجہول مقداروں لا، ما، ی کے درمیان شکل

$\text{ا}_1\,\text{لا} + \text{ب}_1\,\text{ما} + \text{ج}_1\,\text{ی} = \text{م}_1$، $\text{ا}_2\,\text{لا} + \text{ب}_2\,\text{ما} + \text{ج}_2\,\text{ی} = \text{م}_2$، وغیرہ کی پانچ مساواتیں لو۔ انکو علی الترتیب ا_1، ا_2، ا_3، ا_4، ا_5 سے ضرب دو اور جمع کرو۔ پھر ب_1، ب_2، ب_3، ب_4، ب_5 سے ضرب دو اور جمع کرو۔ اور پھر

ج_1، ج_2، ج_3، ج_4، ج_5 سے ضرب دو اور جمع کرو — اس طرح حسب ذیل تین مساواتیں حاصل ہوتی ہیں :—

$$\text{لا}\ \Sigma\ \text{ا}_1^2 + \text{ما}\ \Sigma\ \text{ا}_1\text{ب}_1 + \text{ی}\ \Sigma\ \text{ا}_1\text{ج}_1 = \Sigma\ \text{ا}_1\text{م}_1$$

$$\text{لا}\ \Sigma\ \text{ا}_1\text{ب}_1 + \text{ما}\ \Sigma\ \text{ب}_1^2 + \text{ی}\ \Sigma\ \text{ب}_1\text{ج}_1 = \Sigma\ \text{ب}_1\text{م}_1$$

$$\text{لا}\ \Sigma\ \text{ا}_1\text{ج}_1 + \text{ما}\ \Sigma\ \text{ب}_1\text{ج}_1 + \text{ی}\ \Sigma\ \text{ج}_1^2 = \Sigma\ \text{ج}_1\text{م}_1$$

اور ان سے بغیر کسی دقت کے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا} = \frac{(\text{ا}_1\text{ب}_2\text{ج}_3)(\text{م}_1\text{ب}_2\text{ج}_3) + (\text{ا}_1\text{ب}_2\text{ج}_4)(\text{م}_1\text{ب}_2\text{ج}_4) + \cdots + (\text{ا}_3\text{ب}_4\text{ج}_5)(\text{م}_3\text{ب}_4\text{ج}_5)}{(\text{ا}_1\text{ب}_2\text{ج}_3)^2 + (\text{ا}_1\text{ب}_2\text{ج}_4)^2 + \cdots + (\text{ا}_3\text{ب}_4\text{ج}_5)^2}$$

اور اسی طرح ما اور ی کیلئے متناظر قیمتیں ملجاتی ہیں۔ ان میں سے ہر قیمت میں شمار کنندہ میں دس اور نسب نما میں دس رقمیں شامل ہوتی ہیں۔

۴۸ — بتاؤ کہ لا کی وہ قیمت جو پچھلی مثال میں دی گئی ہے اس طور پر حاصل ہو سکتی ہے کہ پہلی پانچ مساواتوں میں سے ہر تین کے جٹ سے ما اور ی کو ساقط کیا جائے اور پھر عمل اسقاط سے صرف لا میں جو دس مساواتیں حاصل ہوتی ہیں ان پر اقل مربعوں کا طریقہ استعمال کیا جائے۔

چودھواں باب (70)

اسقاط

۱۵۰ — تعریفات۔ اگر ن مساواتوں کا ایک نظام ن متغیروں کے درمیان متجانس یا (ن - ۱) متغیروں کے درمیان غیر متجانس دیا جائے اور اگر ہم ان مساواتوں کو اس طور پر ترکیب دیں کہ تمام متغیر ساقط ہو جائیں اور ایک مساوات ر = ۰ ایسی حاصل ہو کہ اس میں صرف دی ہوئی مساواتوں کے سر شامل ہوں تو ہم ر کو جب اسے منطق صحیح شکل میں بیان کیا جائے **حاصل سقاط** کہینگے۔

آیندہ کی بحث میں ہم خاص طور پر ان دو مساواتوں پر زور دینگے جنمیں صرف ایک مجہول مقدار لا شامل ہوتی ہے۔ اس صورت میں مساوات ر = ۰ اس بات کی تصدیق کرتی ہے کہ یہ دو مساواتیں ہم آہنگ ہیں یعنی یہ دونوں مساواتیں لا کی ایک مشترک قیمت سے پوری ہوتی ہیں۔ اب ہم یہ بتائینگے کہ عمل اسقاط کس طرح کیا جا سکتا ہے تاکہ مقدار ر حاصل ہو جائے اور اس کے ساتھ ہی مثالوں کے ذریعہ ہم مختلف طریقوں کی توضیح کرینگے۔ یہ دیکھنا ضروری ہے کہ اسقاط کے بعض اعمال سے ر کی جس قیمت پر ہم پہنچتے ہیں اس میں ایک ضرورت سے زیادہ جزو ضربی شامل ہوتا ہے۔

اسقاط کا وہ طریقہ جسمیں متشاکل تفاعلوں سے مدد لیجاتی ہے

ہما کی ایک ایسی قیمت کی طرف رہبری کرتا ہے جسمیں اس قسم کا جزوضربی شامل نہیں ہوتا اور اسلئے حاصل اسقاط کی ٹھیک تعریف کے لئے دفعہ آیندہ کی بحث کے آخری حصہ کا مطالعہ کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ مساواتوں

$$\text{ا}\,\text{لا}^{2} + ۲\,\text{ب}\,\text{لا} + \text{ج} = ۰ ،$$

$$\text{اَ}\,\text{لا}^{2} + ۲\,\text{بَ}\,\text{لا} + \text{جَ} = ۰$$

سے لا کو ساقط کرنا مطلوب ہے۔

ان مساواتوں کو حل کرنے اور اس طور پر حاصل کردہ لا کی قیمتوں کو مساوی رکھنے سے حاصل اسقاط غیر منطق شکل

$$-\frac{\text{ب}}{\text{ا}} + \frac{\sqrt{\text{ب}^{2} - \text{ا}\,\text{ج}}}{\text{ا}} = -\frac{\text{بَ}}{\text{اَ}} + \frac{\sqrt{\text{بَ}^{2} - \text{اَ}\,\text{جَ}}}{\text{اَ}}$$

میں معلوم ہوتا ہے۔ اسکو ا اَ سے ضرب دینے سے ہم حاصل کرتے ہیں (۲۱)

$$\text{ا}\,\text{بَ} - \text{اَ}\,\text{ب} = \text{ا}\sqrt{\text{بَ}^{2} - \text{اَ}\,\text{جَ}} - \text{اَ}\sqrt{\text{ب}^{2} - \text{ا}\,\text{ج}}$$

طرفین کا مربع لینے اور غیر ضروری جزو ضربی ا اَ سے تقسیم کرنے اور پھر مربع لینے سے ہم معلوم کرتے ہیں

$$\text{ر} = ۴\,(\text{ا}\,\text{ج} - \text{ب}^{2})(\text{اَ}\,\text{جَ} - \text{بَ}^{2}) - (\text{ا}\,\text{جَ} + \text{اَ}\,\text{ج} - ۲\,\text{ب}\,\text{بَ})^{2}$$

حاصل اسقاط کو اخذ کرنے کا یہ طریقہ عملاً بہت محدود ہے کیونکہ عام طور پر یہ ممکن نہیں کہ چوتھے درجہ سے اعلیٰ تر درجہ والی مساوات کی اصل کو ایک جبریہ ضابطہ سے بیان کیا جائے۔ اسلئے مساواتوں کو پہلے حل کرنیکے بغیر حاصل اسقاط کو متعین کرنیکے لئے دوسرے طریقے تجویز کئے گئے ہیں۔ اب ہم اسقاط کا وہ طریقہ بیان کرتے ہیں جسمیں مساواتوں کی اصلوں کے متشاکل تفاعلوں سے مدد لیجاتی ہے۔

۱۵۱۔ متشاکل تفاعلوں کی مدد سے اسقاط۔ فرض کرو کہ م ویں اور ن ویں درجوں کی دو جبریہ مساواتیں ہیں

$$\text{فہ}(\text{لا}) \equiv \text{ا}_{0}\,\text{لا}^{\text{م}} + \text{ا}_{1}\,\text{لا}^{\text{م}-1} + \text{ا}_{2}\,\text{لا}^{\text{م}-2} + \cdots + \text{ا}_{\text{م}} = 0$$

$$\text{پہ}(\text{لا}) \equiv \text{ب}_{0}\,\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ب}_{1}\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ب}_{2}\,\text{لا}^{\text{ن}-2} + \cdots + \text{ب}_{\text{ن}} = 0$$

اور فرض کرو کہ وہ شرط معلوم کرنا مطلوب ہے کہ ان مساواتوں کی ایک مشترک اصل ہو۔ اس مقصد کے لئے فرض کرو کہ مساوات فہ (لا) = ۰ کی اصلیں عہ_1، عہ_2، .....، $\text{عہ}_{\text{م}}$ ہیں۔ اگر دی ہوئی مساواتوں میں ایک مشترک اصل ہو تو یہ ضروری اور کافی ہے کہ مقداروں

$$\text{پہ}(\text{عہ}_1)،\ \text{پہ}(\text{عہ}_2)،\ \ldots،\ \text{پہ}(\text{عہ}_{\text{م}})$$

میں سے ایک صفر ہونی چاہئے یا دوسرے الفاظ میں حاصل ضرب

$$\text{پہ}(\text{عہ}_1)\,\text{پہ}(\text{عہ}_2)\,\text{پہ}(\text{عہ}_3)\cdots\text{پہ}(\text{عہ}_{\text{م}})$$

معدوم ہونا چاہئے۔ اس حاصل ضرب کو سروں کے ایک منطق اور صحیح تفاعل میں تحویل کرو جو ہمیشہ ممکن ہے کیونکہ وہ، مساوات فہ (لا) = ۰ کی اصلوں کا ایک متشاکل تفاعل ہے۔ اس طرح مطلوبہ حاصل اسقاط مل جائیگا۔ نیز اگر مساوات پہ (لا) = ۰ کی اصلیں بہ_1، بہ_2، بہ_3، .... $\text{بہ}_{\text{ن}}$ ہوں تو

$$\text{پہ}(\text{عہ}_1) = \text{ب}_0(\text{عہ}_1 - \text{بہ}_1)(\text{عہ}_1 - \text{بہ}_2)\cdots(\text{عہ}_1 - \text{بہ}_{\text{ن}})$$

$$\text{پہ}(\text{عہ}_2) = \text{ب}_0(\text{عہ}_2 - \text{بہ}_1)(\text{عہ}_2 - \text{بہ}_2)\cdots(\text{عہ}_2 - \text{بہ}_{\text{ن}})$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{پہ}(\text{عہ}_{\text{م}}) = \text{ب}_0(\text{عہ}_{\text{م}} - \text{بہ}_1)(\text{عہ}_{\text{م}} - \text{بہ}_2)\cdots(\text{عہ}_{\text{م}} - \text{بہ}_{\text{ن}})$$

(72) اگر ہم بائیں طرف کے م ن اجزائے ضربی کی علامتیں بدل دیں اور

اِن مساواتوں کی متناظر نوں کو باہم ضرب دیں اور ایک ہی ستون میں واقع ہونیوالے اجزائے ضربی کو ایکساتھ رکھیں تو ہمیں معلوم ہوگا کہ

$$\text{ا}^{\text{ن}}\,\text{پہ}(\text{ع}_1)\,\text{پہ}(\text{ع}_2)\dots\text{پہ}(\text{ع}_{\text{م}}) = (-1)^{\text{م ن}}\,\text{ب}^{\text{م}}\,\text{فہ}(\text{ب}_1)\,\text{فہ}(\text{ب}_2)\dots\text{فہ}(\text{ب}_{\text{ن}})$$

اس لئے ہم لے سکتے ہیں

$$\text{ر} = (-1)^{\text{م ن}}\,\text{ب}^{\text{م}}\,\text{فہ}(\text{ب}_1)\,\text{فہ}(\text{ب}_2)\dots\text{فہ}(\text{ب}_{\text{ن}}) = \text{ا}^{\text{ن}}\,\text{پہ}(\text{ع}_1)\,\text{پہ}(\text{ع}_2)\dots\text{پہ}(\text{ع}_{\text{م}})$$

کیونکہ ر کی یہ دونوں قیمتیں فہ (لا) اور پہ (لا) کے سروں کے صحیح تفاعل ہیں جو صرف اسوقت صفر ہوتے ہیں جبکہ فہ (لا) اور پہ (لا) میں ایک مشترک جزو ضربی ہو اور وہ متماثل ہوتے ہیں جب اِن کو سروں کی رقوم میں بیان کیا جاتا ہے۔

۱۵۲ — حاصل اسقاط کی خاصیتیں۔ (۱) دو مساواتوں کے سروں میں اِن مساواتوں کے حاصل اسقاط ر کا رتبہ مساواتوں کے درجوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے اور اِس میں پہلی مساوات کے سر دوسری مساوات کے درجہ میں اور دوسری مساوات کے سر پہلی مساوات کے درجہ میں داخل ہوتے ہیں۔

یہ ہم دفعہ ۱۵۱ (۱) میں ر کی دونوں شکلوں کی نظرثانی کرنے سے دیکھ سکتے ہیں کیونکہ اسکی پہلی شکل میں $\text{ا}_1, \text{ا}_2, \dots, \text{ا}_{\text{م}}$ ن ویں درجہ میں داخل ہوتے ہیں اور اسکی دوسری شکل میں $\text{ب}, \text{ب}_1, \text{ب}_2 \dots \text{ب}_{\text{ن}}$ م ویں درجہ میں داخل ہوتے ہیں۔ نیز یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ دو ارقام جبکہ ہر جملہ میں سے ایک کا انتخاب کیا جائے $(-1)^{\text{م ن}}\,\text{ب}^{\text{م}}\,\text{ا}^{\text{ن}}_{\text{م}}$ اور $\text{ا}^{\text{ن}}\,\text{ب}^{\text{م}}_{\text{ن}}$ ہیں

(۲) اگر دونوں مساواتوں کی اصلوں کو ایک ہی مقدار غہ سے ضرب دیا جائے تو حاصل اسقاط $غہ^{م ن}$ سے ضرب کھا جاتا ہے۔

یہ نتیجہ ظاہر ہے کیونکہ $ع_{ی} - ب_{ق}$ شکل کے م ن اجزائے ضربی میں سے کوئی ایک غہ ($ع_{ی} - ب_{ق}$) ہے اور اسلئے $غہ^{م ن}$ حاصل اسقاط کو تقسیم کرتا ہے۔ اس سے ہم یہ نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ حاصل اسقاط کا وزن م ن ہے اور اسی شکل میں اس مسئلہ کو اکثر بیان کیا جاتا ہے

(۳) اگر دونوں مساواتوں کی اصلوں میں ایک ہی مقدار کا اضافہ کیا جائے تو اس طور پر تحویل شدہ مساواتوں کا حاصل اسقاط اصلی مساواتوں کے حاصل اسقاط کے مساوی ہوتا ہے۔

کیونکہ

$$\pm ر = ا^{ن} ب^{م} \Pi (ع_{ی} - ب_{ق})$$

جہاں Π سے مراد $ع_{ی} - ب_{ق}$ شکل کے م ن ارقام کا مسلسل حاصل ضرب ہے اور یہ حاصل ضرب نہیں بدلتا اگر $ع_{ی}$ اور $ب_{ق}$ میں ایک ہی مقدار کا اضافہ کیا جائے۔

(۴) اگر اصلوں کو انکے متکافیون میں بدل دیا جائے تو تحویل شدہ (73)
مساواتوں سے ر کی جو قیمت حاصل ہوتی ہے وہ غیر متغیر رہتی ہے لیکن اگر م ن ایک طاق عدد ہو تو صرف علامت بدل جاتی ہے۔

$$ر = ا^{ن} ب^{م} \Pi (ع_{ی} - ب_{ق})$$

میں اس استحالہ کا عمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ر} = \text{اُ}_{\text{م}}^{\text{ن}}\,\text{ب}_{\text{ن}}^{\text{م}}\,(-1)^{\text{من}} \frac{\prod(\text{عمی} - \text{بہق})}{(\text{عم}_1\text{عم}_2\cdots\text{عمم})^{\text{ن}}(\text{بہ}_1\text{بہ}_2\cdots\text{بہن})^{\text{م}}}$$

لیکن $\text{عم}_1\text{عم}_2\cdots\text{عمم} = (-1)^{\text{م}}\dfrac{\text{اُم}}{\text{اُ.}}$ ، $\text{بہ}_1\text{بہ}_2\cdots\text{بہن} = (-1)^{\text{ن}}\dfrac{\text{بن}}{\text{ب.}}$

اسلئے

$$\text{رَ} = \text{اُ.}^{\text{ن}}\,\text{ب.}^{\text{م}}\,(-1)^{\text{من}} \prod(\text{عمی} - \text{بہق}) = (-1)^{\text{من}}\,\text{ر}$$

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ دو مساواتوں کے حاصل اسقاط میں ایسے تمام سروں کو جنکے لاحقے ایک دوسرے کے متمم ہیں مثلاً (اُ.، اُم)، (اُ_1، $\text{اُ}_{\text{م}-1}$)، وغیرہ کو حاصل اسقاط کی قیمت بدلے بغیر ایک دوسرے کی جگہ تبدیل کیا جا سکتا ہے۔

(۵) اگر دونوں مساواتوں کو ہم رسم استحالہ سے مستحیل کیا جائے یعنی اگر لا کی بجائے

$$\frac{\text{لہ لا} + \text{مہ}}{\text{لہَ لا} + \text{مہَ}}$$

درج کیا جائے اور ہر مفرد جزو ضربی کو $\text{لہَ لا} + \text{مہَ}$ سے ضرب دیا جائے تا کہ نئی مساواتیں صحیح (Integral) ہو جائیں تو نیا حاصل اسقاط $\text{رَ} = (\text{لہ مہَ} - \text{لہَ مہ})^{\text{من}}\,\text{ر}$ ۔

اسکو ثابت کرنیکے لئے ہم جانتے ہیں کہ

$$\text{فہ(لا)} = \text{اُ.}(\text{لا} - \text{عم}_1)(\text{لا} - \text{عم}_2)\cdots\cdots(\text{لا} - \text{عمم})$$

$$\text{بہ(لا)} = \text{ب.}(\text{لا} - \text{بہ}_1)(\text{لا} - \text{بہ}_2)\cdots\cdots(\text{لا} - \text{بہن})$$

نیز لا − عر ہو جاتا ہے (لہ − لہَ عر) (لا − $\frac{\text{مہَ عر − مہ}}{\text{لہ − لہَ عر}}$)

لا − بر ہو جاتا ہے (لہ − لہَ بر) (لا − $\frac{\text{مہَ بر − مہ}}{\text{لہ − لہَ بر}}$)

اب ہر مساوات کے تمام اجزائے ضربی کو باہم ضرب دینے سے
ا ہو جاتا ہے ا (لہ − لہَ عر) (لہ − لہَ عر) ..... (لہ − لہَ عم)

ب ہو جاتا ہے ب (لہ − لہَ بر) (لہ − لہَ بر) ..... (لہ − لہَ بن)

نیز چونکہ عر اور بر، $\frac{\text{مہَ عر − مہ}}{\text{لہ − لہَ عر}}$ اور $\frac{\text{مہَ بر − مہ}}{\text{لہ − لہَ بر}}$ میں تحویل ہو جاتے ہیں (74.)

اسلئے عر − بر ہو جاتا ہے $\frac{\text{(لہ مہَ − لہَ مہ) (عر − بر)}}{\text{(لہ − لہَ عر) (لہ − لہَ بر)}}$

اسلئے $\text{ا}^{\text{ن}}\,\text{ب}^{\text{م}}\prod$ (عر − بر) ہو جاتا ہے $\text{ا}^{\text{ن}}\,\text{ب}^{\text{م}}$ (لہ مہَ − لہَ مہ)$^{\text{م ن}}\prod$ (عر − بر)

یعنے فہ (لا) اور پہ (لا) کی نئی شکلوں سے جو حاصل اسقاط محسوب ہوا ہے وہ

(لہ مہَ − لہَ مہ)$^{\text{م ن}}$ ر

ہے۔

اس مسئلہ میں پچھلے تین مسئلے شامل ہیں اور وہ مجموعی طور پر اس مسئلہ کے معادل ہیں۔

۱۵۳ — یولر کا اسقاط کا طریقہ — اگر م ویں اور ن ویں درجوں کی دو مساواتوں فہ (لا) = ۰ اور پہ (لا) = ۰ میں کوئی مشترک اصل طہ ہو تو ہم مان سکتے ہیں

فہ (لا) ≡ (لا − طہ) فہ۱ (لا)

پہ (لا) ≡ (لا − طہ) پہ۱ (لا)

جہاں فہ۱(لا) ≡ ف۱ لا$^{م-۱}$ + ف۲ لا$^{م-۲}$ + ... + فم

پہ۱(لا) ≡ ق۱ لا$^{ن-۱}$ + ق۲ لا$^{ن-۲}$ + ... + قن

اور سر طہ پر منحصر ہونیکی وجہ سے غیر معین ہیں۔

اوپر کی دو متماثلہ مساواتوں سے

فہ (لا) پہ۱ (لا) ≡ فہ۱ (لا) پہ (لا)

جو (م + ن − ۱) ویں درجہ کی ایک متماثلہ مساوات ہے۔ اب اس مساوات کی طرفین میں لا کی مختلف قوتوں کے سروں کو مساوی رکھنے سے (م + ن) مقداروں ف۱، ف۲ ..... فم، ق۱، ق۲ ..... قن میں پہلے درجہ کی (م + ن) متجانس مساواتیں ملتی ہیں اور ان مقداروں کو دفعہ ۱۴۵ کے طریقہ سے ساقط کیا جائے تو دی ہوئی دو مساواتوں کا حاصل اسقاط ایک مقطع کی شکل میں حاصل ہوتا ہے۔

(75)

مثال

فرض کرو کہ دو مساواتوں

ا لا^{۲} + ب لا + ج = ۰، ا۱ لا^{۲} + ب۱ لا + ج۱ = ۰

میں ایک اصل مشترک ہے۔ تب متماثلاً

(ق۱ لا + ق۲) (ا لا^{۲} + ب لا + ج) ≡ (ف۱ لا + ف۲) (ا۱ لا^{۲} + ب۱ لا + ج۱)

یا (ق۱ ا − ف۱ ا۱) لا^{۳} + (ق۱ ب + ق۲ ا − ف۱ ب۱ − ف۲ ا۱) لا^{۲}

+ (ق۱ ج + ق۲ ب − ف۱ ج۱ − ف۲ ب۱) لا + ق۲ ج − ف۲ ج۱ ≡ ۰

اس مساوات کے تمام سروں کو صفر کے مساوی رکھنے سے حسب ذیل چار متجانس مساواتیں ملتی ہیں

$$\text{ق}_1\,\text{ا} - \text{ف}_1\,\text{ا}_1 = 0$$
$$\text{ق}_1\,\text{ب} + \text{ق}_2\,\text{ا} - \text{ف}_1\,\text{ب}_1 - \text{ف}_2\,\text{ا}_1 = 0$$
$$\text{ق}_1\,\text{ج} + \text{ق}_2\,\text{ب} - \text{ف}_1\,\text{ج}_1 - \text{ف}_2\,\text{ب}_1 = 0$$
$$\text{ق}_2\,\text{ج} - \text{ف}_2\,\text{ج}_1 = 0$$

اور ف_1، ف_2، ق_1، ق_2 کو ساقط کرنے سے مشترک اصل کے لئے ہمیں شرط ملتی ہے

$$\begin{vmatrix} \text{ا} & 0 & \text{ا}_1 & 0 \\ \text{ب} & \text{ا} & \text{ب}_1 & \text{ا}_1 \\ \text{ج} & \text{ب} & \text{ج}_1 & \text{ب}_1 \\ 0 & \text{ج} & 0 & \text{ج}_1 \end{vmatrix} = 0$$

طالب علم آسانی کے ساتھ اس بات کی تصدیق کر سکتا ہے کہ یہ نتیجہ دفعہ ۱۵۰ کے نتیجہ کے مطابق ہے۔

۱۵۴ — سلوسٹر (sylvester) کا اسقاط کا طریقہ — اس طریقہ سے حواصل اسقاط کے لئے وہی مقطعات حاصل ہوتے ہیں جو یولر کے طریقہ سے ملتے ہیں۔ لیکن عمومیت کے نقطہ نظر سے اس طریقہ کو یولر کے طریقہ پر ترجیح حاصل ہے کیونکہ اسکو اکثر ایسی مساواتوں کے حاصل اسقاط دریافت کرنے میں بھی استعمال کیا جا سکتا ہے جنمیں متعدد متغیر شامل ہوں۔

فرض کرو کہ دو مساواتوں

$$\text{فہ}(\text{لا}) \equiv \text{ا}_0\,\text{لا}^{\text{م}} + \text{ا}_1\,\text{لا}^{\text{م}-1} + \text{ا}_2\,\text{لا}^{\text{م}-2} + \cdots + \text{ا}_{\text{م}} = 0$$
$$\text{بہ}(\text{لا}) \equiv \text{ب}_0\,\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ب}_1\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ب}_2\,\text{لا}^{\text{ن}-2} + \cdots + \text{ب}_{\text{ن}} = 0$$

کا حاصل اسقاط دریافت کرنا مطلوب ہے۔ پہلی مساوات کو ہم لا کی متواتر قوتوں

$$\text{لا}^{\text{ن}-۱}،\ \text{لا}^{\text{ن}-۲}،\ \text{لا}^{\text{ن}-۳}،\ \ldots\ldots،\ \text{لا}،\ \text{لا}^{۰}$$

سے اور دوسری کو

$$\text{لا}^{\text{م}-۱}،\ \text{لا}^{\text{م}-۲}،\ \text{لا}^{\text{م}-۳}،\ \ldots\ldots،\ \text{لا}،\ \text{لا}^{۰}$$

سے ضرب دیتے ہیں۔ اس طرح (م + ن) مساواتیں حاصل ہوتی ہیں جنمیں لا کی بڑی سے بڑی قوت ن + م - ۱ ہے۔ اب اتنی مساواتیں ملجاتی ہیں کہ اُنسے $\text{لا}^{\text{م}+\text{ن}-۱}$ ، $\text{لا}^{\text{م}+\text{ن}-۲}$ ، ..... لا ، لا کو الگ الگ متغیر سمجھ کر ان کو ساقط کیا جا سکتا ہے۔

مثالیں

(76) ۱ — درجۂ دوم کی دو مساواتوں

$$\text{ا}\,\text{لا}^۲ + \text{ب}\,\text{لا} + \text{ج} = ۰،\quad \text{ا}_۱\,\text{لا}^۲ + \text{ب}_۱\,\text{لا} + \text{ج}_۱ = ۰$$

کا حاصل اسقاط ر معلوم کرو۔

$$\text{ا}\,\text{لا}^۳ + \text{ب}\,\text{لا}^۲ + \text{ج}\,\text{لا} = ۰$$
$$\text{ا}\,\text{لا}^۲ + \text{ب}\,\text{لا} + \text{ج} = ۰$$
$$\text{ا}_۱\,\text{لا}^۳ + \text{ب}_۱\,\text{لا}^۲ + \text{ج}_۱\,\text{لا} = ۰$$
$$\text{ا}_۱\,\text{لا}^۲ + \text{ب}_۱\,\text{لا} + \text{ج}_۱ = ۰$$

ان سے لا^۳ ، لا^۲ ، لا کو ساقط کرنے سے وہی مقطع حاصل ہوتا ہے جو پچھلے دفعہ میں حاصل ہوا تھا صرف اسقدر فرق ہے کہ اب صفوں کی بجائے ستون ہیں:—

$$\text{ر} \equiv \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} & ۰ \\ ۰ & \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ا}_۱ & \text{ب}_۱ & \text{ج}_۱ & ۰ \\ ۰ & \text{ا}_۱ & \text{ب}_۱ & \text{ج}_۱ \end{vmatrix}$$

۲ ـــ دو مساواتوں

$$\text{ع} \equiv \text{ا}_{.} + \text{ا}_{1}\,\text{لا} + \text{ا}_{2}\,\text{لا}^{2} + \text{ا}_{3}\,\text{لا}^{3} + \text{ا}_{4}\,\text{لا}^{4} = ۰$$

$$\text{و} \equiv \text{ب}_{.} + \text{ب}_{1}\,\text{لا} + \text{ب}_{2}\,\text{لا}^{2} + \text{ب}_{3}\,\text{لا}^{3} = ۰$$

کا حاصل اسقاط لکھو ـــ

پہلے کی طرح عمل کرنے سے ہمیں آسانی کے ساتھ معلوم ہوتا ہے

$$\begin{vmatrix}
. & . & \text{ا}_{4} & \text{ا}_{3} & \text{ا}_{2} & \text{ا}_{1} & \text{ا}_{.} \\
. & \text{ا}_{4} & \text{ا}_{3} & \text{ا}_{2} & \text{ا}_{1} & \text{ا}_{.} & . \\
\text{ا}_{4} & \text{ا}_{3} & \text{ا}_{2} & \text{ا}_{1} & \text{ا}_{.} & . & . \\
. & . & . & \text{ب}_{3} & \text{ب}_{2} & \text{ب}_{1} & \text{ب}_{.} \\
. & . & \text{ب}_{3} & \text{ب}_{2} & \text{ب}_{1} & \text{ب}_{.} & . \\
. & \text{ب}_{3} & \text{ب}_{2} & \text{ب}_{1} & \text{ب}_{.} & . & . \\
\text{ب}_{3} & \text{ب}_{2} & \text{ب}_{1} & \text{ب}_{.} & . & . & .
\end{vmatrix} \equiv \text{س}$$

یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ س میں ع کے سر تیسرے درجہ میں اور و کے سر چوتھے درجہ میں شامل ہوتے ہیں ـ نیز $\text{ا}_{.}^{3}\,\text{ب}_{3}^{4}$ بھی س کی ایک رقم ہے (دیکھو (۱) دفعہ ۱۵۲) ـــ

۱۵۵ ـــ بیزو (Bazout) کا اسقاط کا طریقہ ـ عام طریق عمل

بہت آسانی کے ساتھ سمجھ میں آجائیگا اگر اسکو اول چند خاص خاص صورتوں پر استعمال کیا جائے ـ چنانچہ ہم اسکو (۱) ایک ہی درجہ کی مساواتوں کے لئے اور (۲) مختلف درجوں کی مساواتوں کے لئے استعمال کرینگے ـــ

(۱) فرض کرو کہ دو کعبی مساواتوں

$$\text{ا}\,\text{لا}^{3} + \text{ب}\,\text{لا}^{2} + \text{ج}\,\text{لا} + \text{د} = ۰$$

$$\text{ا}_{1}\,\text{لا}^{3} + \text{ب}_{1}\,\text{لا}^{2} + \text{ج}_{1}\,\text{لا} + \text{د}_{1} = ۰$$

(۶۶) کا حاصل اسقاط معلوم کرنا مطلوب ہے۔

اِن دو مساواتوں کو متواتر

ا$_1$ اور ا

ا$_1$لا + ب$_1$ اور ا لا + ب

ا$_1$لا^2 + ب$_1$لا + ج$_1$ اور ا لا^2 + ب لا + ج

سے ضرب دینے اور ہر دفعہ اس طور پر حاصل شدہ حاصل ضربوں کو تفریق کرنے سے ہمیں حسب ذیل تین مساواتیں ملتی ہیں:۔

(ا ب$_1$) لا^2 + (ا ج$_1$) لا + (ا د$_1$) = ۰

(ا ج$_1$) لا^2 + {(ا د$_1$) + (ب ج$_1$)} لا + (ب د$_1$) = ۰

(ا د$_1$) لا^2 + (ب د$_1$) لا + (ج د$_1$) = ۰

اِن مساواتوں سے لا^2، لا کو جداگانہ متغیروں کے طور پر ساقط کرنے سے حاصل اسقاط ایک متشاکل مقطع کی شکل میں حاصل ہوتا ہے جو ذیل میں درج ہے:۔

(ا ب$_1$)	(ا ج$_1$)	(ا د$_1$)
(ا ج$_1$)	(ا د$_1$) + (ب ج$_1$)	(ب د$_1$)
(ا د$_1$)	(ب د$_1$)	(ج د$_1$)

حاصل اسقاط کو اخذ کرنے کے طریقہ کو زیادہ واضح کرنے کے لئے

ہم حسب ذیل طریقۂ عمل درج کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ دو چار درجی مساواتیں ہیں

ا لا^4 + ب لا^3 + ج لا^2 + د لا + ع = ۰،

ا$_1$لا^4 + ب$_1$لا^3 + ج$_1$لا^2 + د$_1$لا + ع$_1$ = ۰،

اب بیزو کے طریقہ کو کوشی نے جس صورت میں پیش کیا ہے اسکے مطابق عمل کرنے سے ہمیں مساواتوں کا حسب ذیل نظام ملتا ہے

$$\frac{\text{ا}}{\text{ا}_1} = \frac{\text{ب}\,\text{لا}^3 + \text{ج}\,\text{لا}^2 + \text{د}\,\text{لا} + \text{ع}}{\text{ب}_1\text{لا}^3 + \text{ج}_1\text{لا}^2 + \text{د}_1\text{لا} + \text{ع}_1},$$

$$\frac{\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}}{\text{ا}_1\text{لا} + \text{ب}_1} = \frac{\text{ج}\,\text{لا}^2 + \text{د}\,\text{لا} + \text{ع}}{\text{ج}_1\text{لا}^2 + \text{د}_1\text{لا} + \text{ع}_1},$$

$$\frac{\text{ا}\,\text{لا}^2 + \text{ب}\,\text{لا} + \text{ج}}{\text{ا}_1\text{لا}^2 + \text{ب}_1\text{لا} + \text{ج}_1} = \frac{\text{د}\,\text{لا} + \text{ع}}{\text{د}_1\text{لا} + \text{ع}_1},$$

$$\frac{\text{ا}\,\text{لا}^3 + \text{ب}\,\text{لا}^2 + \text{ج}\,\text{لا} + \text{د}}{\text{ا}_1\text{لا}^3 + \text{ب}_1\text{لا}^2 + \text{ج}_1\text{لا} + \text{د}_1} = \frac{\text{ع}}{\text{ع}_1},$$

کسروں کو دور کرنے اور لا^3، لا^2، لا کو ساقط کرنے سے حاصل استقاط (78)

کے لئے حسب ذیل مقطع ملتا ہے :-

$$\begin{vmatrix} (\text{ا}\,\text{ب}_1) & (\text{ا}\,\text{ج}_1) & (\text{ا}\,\text{د}_1) & (\text{ا}\,\text{ع}_1) \\ (\text{ا}\,\text{ج}_1) & (\text{ا}\,\text{د}_1)+(\text{ب}\,\text{ج}_1) & (\text{ا}\,\text{ع}_1)+(\text{ب}\,\text{د}_1) & (\text{ب}\,\text{ع}_1) \\ (\text{ا}\,\text{د}_1) & (\text{ا}\,\text{ع}_1)+(\text{ب}\,\text{د}_1) & (\text{ب}\,\text{ع}_1)+(\text{ج}\,\text{د}_1) & (\text{ج}\,\text{ع}_1) \\ (\text{ا}\,\text{ع}_1) & (\text{ب}\,\text{ع}_1) & (\text{ج}\,\text{ع}_1) & (\text{د}\,\text{ع}_1) \end{vmatrix}$$

اب اگر ہم دو متشاکل مقطعوں

$$\begin{vmatrix} (\text{ا}\,\text{ب}_1) & (\text{ا}\,\text{ج}_1) & (\text{ا}\,\text{د}_1) & (\text{ا}\,\text{ع}_1) \\ (\text{ا}\,\text{ج}_1) & (\text{ا}\,\text{د}_1) & (\text{ا}\,\text{ع}_1) & (\text{ب}\,\text{ع}_1) \\ (\text{ا}\,\text{د}_1) & (\text{ا}\,\text{ع}_1) & (\text{ب}\,\text{ع}_1) & (\text{ج}\,\text{ع}_1) \\ (\text{ا}\,\text{ع}_1) & (\text{ب}\,\text{ع}_1) & (\text{ج}\,\text{ع}_1) & (\text{د}\,\text{ع}_1) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} (\text{ب}\,\text{ج}_1) & (\text{ب}\,\text{د}_1) \\ (\text{ب}\,\text{د}_1) & (\text{ج}\,\text{د}_1) \end{vmatrix}$$

پر غور کریں جنکی ساخت فوراً ظاہر ہو جاتی ہے تو ہم دیکھتے ہیں کہ حاصل استقاط

کا، دوسرے مقطع کے عناصر کو پہلے مقطع کے چار درمیانی عناصر میں جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

اسی طرح پانچویں درجہ کی دو مساواتوں

ا لا^5 + ب لا^4 + ج لا^3 + د لا^2 + ع لا + ف = ۰ ،

ا$_1$ لا^5 + ب$_1$ لا^4 + ج$_1$ لا^3 + د$_1$ لا^2 + ع$_1$ لا + ف$_1$ = ۰ ،

کی صورت میں حاصل اسقاط ذیل کے تین مقطعوں سے حاصل ہوتا ہے

(ا ب$_1$) (ا ج$_1$) (ا د$_1$) (ا ع$_1$) (ا ف$_1$)
(ا ج$_1$) (ا د$_1$) (ا ع$_1$) (ا ف$_1$) (ب ف$_1$)
(ا د$_1$) (ا ع$_1$) (ا ف$_1$) (ب ف$_1$) (ج ف$_1$)
(ا ع$_1$) (ا ف$_1$) (ب ف$_1$) (ج ف$_1$) (د ف$_1$)
(ا ف$_1$) (ب ف$_1$) (ج ف$_1$) (د ف$_1$) (ع ف$_1$) ،

(ب ج$_1$) (ب د$_1$) (ب ع$_1$)
(ب د$_1$) (ب ع$_1$) (ج ع$_1$)
(ب ع$_1$) (ج ع$_1$) (د ع$_1$) ، (ج د$_1$)

ان مقطعوں سے حاصل اسقاط کو اخذ کرنیکے لئے دوسرے مقطع کے عناصر کو پہلے مقطع کے بیچ کے نو عنصروں میں جمع کیا جائے اور پھر حاصل کردہ مقطع کے مرکزی عنصر میں تیسرا مقطع جمع کیا جائے۔ طالب علم کو عام صورت میں حاصل اسقاط کا مقطع بنانے میں انطباق کا ایسا ہی عمل کرنے میں کوئی مشکل پیش نہ آئیگی۔

(79) (۲) اب ہم وہ صورت لیتے ہیں جسمیں دو مساواتیں مختلف ابعاد کی ہوں

مثلاً

ا لا^{4} + ب لا^{3} + ج لا^{2} + د لا + ع = ۰ ،

ا$_{1}$ لا^{2} + ب$_{1}$ لا + ج$_{1}$ = ۰ ،

ان مساواتوں کو ترتیب وار

ا$_{1}$ اور ا$_{1}$ لا^{2}

ا$_{1}$لا + ب$_{1}$ اور (ا$_{1}$لا + ب$_{1}$) لا^{2}

سے متواتر ضرب دینے اور ہر دفعہ اس طور پر بنے ہوئے حاصل ضربوں کو تفریق کرنے سے ہمیں ذیل کی دو مساواتیں ملتی ہیں :-

(ا ب$_{1}$) لا^{3} + (ا ج$_{1}$) لا^{2} − د ا$_{1}$ لا + ع ا$_{1}$ = ۰ ،

(ا ج$_{1}$) لا^{3} + {(ب ج$_{1}$) − د ا$_{1}$} لا^{2} − {د ب$_{1}$ + ع ا$_{1}$} لا − ع ب$_{1}$ = ۰ ،

اب اگر ہم اِنکے ساتھ دو مساواتوں

ا$_{1}$ لا^{3} + ب$_{1}$ لا^{2} + ج$_{1}$ لا = ۰

ا$_{1}$ لا^{2} + ب$_{1}$ لا + ج$_{1}$ = ۰

کو شامل کریں تو ہمارے پاس چار مساواتیں ہونگی جنکے ذریعہ سے لا^{3}، لا^{2}، لا ساقط ہو سکتے ہیں - چنانچہ حاصل اسقاط ایک مقطع کی شکل میں ملتا ہے جو یہ ہے :-

(ا ب$_{1}$)	(ا ج$_{1}$)	د ا$_{1}$	ع ا$_{1}$
(ا ج$_{1}$)	(ب ج$_{1}$) − د ا$_{1}$	د ب$_{1}$ + ع ا$_{1}$	ع ب$_{1}$
ا$_{1}$	ب$_{1}$	−ج$_{1}$	۰
۰	ا$_{1}$	−ب$_{1}$	−ج$_{1}$

اس مقطع میں پہلی مساوات کے سر دوسرے درجہ میں اور دوسری

مساوات کے سر جو تھے درجہ میں شامل ہوتے ہیں اور یہی ہونا چاہئے پس کوئی غیر ضروری جزو ضربی اس حاصل اسقاط میں داخل نہیں ہوتا

اب ہم عام صورت لیتے ہیں جسمیں دو مساواتیں م ویں اور ن ویں درجوں کی ہیں۔

فرض کرو کہ مساواتیں ہیں

$$\text{فہ}(\text{لا}) \equiv \text{ا}_{0}\,\text{لا}^{\text{م}} + \text{ا}_{1}\,\text{لا}^{\text{م}-1} + \text{ا}_{2}\,\text{لا}^{\text{م}-2} + \cdots + \text{ا}_{\text{م}} = 0,$$

$$\text{پہ}(\text{لا}) \equiv \text{ب}_{0}\,\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ب}_{1}\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ب}_{2}\,\text{لا}^{\text{ن}-2} + \cdots + \text{ب}_{\text{ن}} = 0,$$

جہاں م $>$ ن ۔ فرض کرو کہ دوسری مساوات کو $\text{لا}^{\text{م}-\text{ن}}$ سے ضرب دیا گیا ہے تو (80)

$$\text{ب}_{0}\,\text{لا}^{\text{م}} + \text{ب}_{1}\,\text{لا}^{\text{م}-1} + \text{ب}_{2}\,\text{لا}^{\text{م}-2} + \cdots + \text{ب}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{م}-\text{ن}} = 0$$

اس مساوات کا درجہ وہی ہے جو پہلی مساوات کا ہے۔ لیکن اس مساوات میں $\text{پہ}(\text{لا}) = 0$ کی ن اصلوں کے علاوہ م - ن اصلیں ہیں جو صفر کے مساوی ہیں۔ اسلئے ہمیں اس بات سے خبردار رہنا چاہیئے کہ حاصل اسقاط کی شکل میں جزو ضربی $\text{ا}_{\text{م}}^{\text{م}-\text{ن}}$ (یعنے ان اصلوں کو $\text{فہ}(\text{لا}) = 0$ میں درج کرنیکا جو نتیجہ حاصل ہوتا ہے) داخل نہ ہو۔ ان دو مساواتوں سے اوپر کی صورت (۱) کے مطابق ہم حسب ذیل ن مساواتیں اخذ کرتے ہیں:-

$$\frac{\text{ا}_{0}}{\text{ب}_{0}} = \frac{\text{ا}_{1}\,\text{لا}^{\text{م}-1} + \text{ا}_{2}\,\text{لا}^{\text{م}-2} + \cdots\cdots + \text{ا}_{\text{م}}}{\text{ب}_{1}\,\text{لا}^{\text{م}-1} + \text{ب}_{2}\,\text{لا}^{\text{م}-2} + \cdots\cdots + \text{ب}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{م}-\text{ن}}},$$

$$\frac{\text{ا}_{\cdot}\,\text{لا}+\text{ا}_{1}}{\text{ب}_{\cdot}\,\text{لا}+\text{ب}_{1}}=\frac{\text{ا}_{2}\,\text{لا}^{\text{م}-2}+\text{ا}_{3}\,\text{لا}^{\text{م}-3}+\cdots+\text{ا}_{\text{م}}}{\text{ب}_{2}\,\text{لا}^{\text{م}-2}+\text{ب}_{3}\,\text{لا}^{\text{م}-3}+\cdots+\text{ب}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{م}-\text{ن}}}$$

. . . .

$$\frac{\text{ا}_{\cdot}\,\text{لا}^{\text{ن}-1}+\text{ا}_{1}\,\text{لا}^{\text{ن}-2}+\cdots+\text{ا}_{\text{ن}-1}}{\text{ب}_{\cdot}\,\text{لا}^{\text{ن}-1}+\text{ب}_{1}\,\text{لا}^{\text{ن}-2}+\cdots+\text{ب}_{\text{ن}-1}}=\frac{\text{ا}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{م}-\text{ن}}+\text{ا}_{\text{ن}+1}\,\text{لا}^{\text{م}-\text{ن}-1}+\cdots+\text{ا}_{\text{م}}}{\text{ب}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{م}-\text{ن}}}،$$

جو، کسروں کے دور کرنے پر، سب کی سب (م - ۱) ویں درجہ کی مساواتیں ہیں ۔ اِن ن مساواتوں اور م - ن مساواتوں

$$\text{ب}_{\cdot}\,\text{لا}^{\text{م}-1}+\text{ب}_{1}\,\text{لا}^{\text{م}-2}+\text{ب}_{2}\,\text{لا}^{\text{م}-3}+\cdots=0$$

$$\text{ب}_{\cdot}\,\text{لا}^{\text{م}-2}+\text{ب}_{1}\,\text{لا}^{\text{م}-3}+\cdots\cdots=0$$

. . . .

$$\text{ب}_{\cdot}\,\text{لا}^{\text{ن}}+\text{ب}_{1}\,\text{لا}^{\text{ن}-1}+\cdots+\text{ب}_{\text{ن}}=0$$

سے $\text{لا}^{\text{م}-1}$، $\text{لا}^{\text{م}-2}$، ....، لا کو جداگانہ مقداروں کے طور پر ساقط کیا جائے تو حاصل اسقاط م ویں رتبہ کے ایک مقطع کی شکل میں ملتا ہے جسمیں پہلی مساوات کے سر ن ویں درجہ میں اور دوسری مساوات کے سر م ویں درجہ میں داخل ہوتے ہیں ۔ پس یہ ظاہر ہے کہ کوئی غیر ضروری جزو ضربی داخل نہیں ہو سکتا اور اس طریقہ سے جو حاصل اسقاط ملتا ہے اس پر صفر اصلوں کے شامل کرنے سے کوئی اثر نہیں پڑتا ۔

اگر ایک ہی درجہ م کی دو مساواتوں فہ (لا) = ۰، پہ (لا) = ۰ کا (84)
حاصل اسقاط ر ہو تو نظام

ل فہ (لا) + مہ پہ (لا) = ۰، لَ فہ (لا) + مَہ پہ (لا) = ۰

کے حاصل اسقاط رَ کی قیمت

$$(\text{ل مَہ} - \text{لَ مہ})^{\text{م}}\ \text{ر}$$

ہوگی کیونکہ صغیروں (اُر، بُس) میں سے ہر ایک (جو بیزو کے طریقہ میں ر کے مقطع کی ترکیب میں آتے ہیں) اس صورت میں

$$\begin{vmatrix} \text{ل اُر + مہ بُر ، لَ اُر + مَہ بُر} \\ \text{ل اُس + مہ بُس ، لَ اُس + مَہ بُس} \end{vmatrix} = (\text{ل مَہ} - \text{لَ مہ})(\text{اُر بُس})$$

ہو جاتا ہے ۔ پس رَ = (ل مَہ − لَ مہ)$^{\text{م}}$ ر کیونکہ ر، م ویں رتبہ کا مقطع ہے ۔

۱۵۶ ۔ اسقاط کے دوسرے طریقے ۔ ہم اسقاط کا ایک اور طریقہ بیان کرنیکے بعد اس مضمون کو ختم کرتے ہیں ۔ یہ طریقہ اکثر استعمال ہوتا ہے لیکن اس میں یہ خرابی ہے کہ حاصل اسقاط میں عام طور پر غیر ضروری اجزائے ضربی شامل ہوتے ہیں ۔ جس عمل کی اب ہم تشریح کرینگے وہ خاصیتاً اس عمل کے معادل ہے جسکو عام طور پر مشترک مقسوم علیہ اعظم کا طریقہ کہتے ہیں ۔

اس طریقہ میں درجہ دوم کی دو مساواتوں

$$\text{ا}\ \text{لا}^2 + \text{ب}\ \text{لا} + \text{ج} = ۰$$

$$\text{ا}_1\ \text{لا}^2 + \text{ب}_1\ \text{لا} + \text{ج}_1 = ۰$$

کا حاصل اسقاط معلوم کرنے کے لئے ہم ان مساواتوں کو یکے بعد دیگرے ا_1 اور ا، ج_1 اور ج سے ضرب دیتے ہیں اور حاصل ضربوں کو

تفریق کرتے ہیں۔ اس طرح ہمیں دو مساواتیں ملتی ہیں

$$(\text{ا ب}_1)\,\text{لا} + (\text{ا ج}_1) = 0$$

$$\text{لا}\,\{(\text{ا ج}_1)\,\text{لا} + (\text{ب ج}_1)\} = 0$$

اب چونکہ لا کی صفر قیمت دی ہوئی دونوں مساواتوں کو پورا نہیں کرتی ہم اس دوسری مساوات سے جزو ضربی لا خارج کرسکتے ہیں اور پھر حاصل اسقاط کو شکل

$$(\text{ا ج}_1)^2 - (\text{ا ب}_1)(\text{ب ج}_1) = 0$$

میں حاصل کرتے ہیں جسمیں کوئی غیر ضروری جزو ضربی نہیں ہے۔

چونکہ اس جملہ کا درجہ چار اور اسکا وزن چار ہے یہ حاصل اسقاط کی صحیح شکل ہے۔

اسی طرح کے عمل سے کعبی مساواتوں

$$\text{ا}\,\text{لا}^3 + \text{ب}\,\text{لا}^2 + \text{ج}\,\text{لا} + \text{د} = 0،$$

$$\text{ا}_1\text{لا}^3 + \text{ب}_1\text{لا}^2 + \text{ج}_1\text{لا} + \text{د}_1 = 0$$

کا حاصل اسقاط معلوم کرنیکے لئے ہم ان مساواتوں کو یکے بعد دیگرے

(82) ا_1 اور ا، د_1 اور د سے ضرب دیں اور اس طور پر بنے ہوئے حاصل ضربوں کو ہر دفعہ تفریق کریں تو حاصل ہوتا ہے:-

$$\left.\begin{array}{l}(\text{ا ب}_1)\,\text{لا}^2 + (\text{ا ج}_1)\,\text{لا} + (\text{ا د}_1) = 0،\\ (\text{ا د}_1)\,\text{لا}^2 + (\text{ب د}_1)\,\text{لا} + (\text{ج د}_1) = 0\end{array}\right\} \ldots\ldots (1)$$

اب اِن دو درجہ دوم کے جملوں سے لا کو محصلہ بالاضابطہ کے ذریعہ سے ساقط کیا جائے تو حاصل اسقاط ملتا ہے

$$\begin{vmatrix}(\text{ا ب}_1)، & (\text{ا د}_1)\\ (\text{ا د}_1)، & (\text{ج د}_1)\end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix}(\text{ا ب}_1)، & (\text{ا ج}_1)\\ (\text{ا د}_1)، & (\text{ب د}_1)\end{vmatrix} \times \begin{vmatrix}(\text{ا ج}_1)، & (\text{ا د}_1)\\ (\text{ب د}_1)، & (\text{ج د}_1)\end{vmatrix}$$

جو ایسا جملہ ہے جسکا درجہ ۸ اور وزن ۱۲ ہے حالانکہ درجہ ۶ اور وزن ۹ ہونا چاہیئے۔ پس یہ ظاہر ہے کہ یہ ایک جزو ضربی سے قابل تقسیم ہے جسکا درجہ ۲ اور وزن ۳ ہے۔ اسلئے اس جزو ضربی کی شکل ہونی چاہیئے ل (ب ج$_1$) + م (ا د$_1$)۔ اب ہم یہ ثابت کرینگے کہ یہ جزو ضربی (ا د$_1$) ہے اور یہ معلوم کرینگے کہ اس سے تقسیم کرنیکے بعد خارج قسمت کیا ہے۔

اس مقصد کے لئے صرف اُن رقموں کو رکھنے سے جنمیں (ا د$_1$) بالراست شامل نہیں ہوتا ہمیں حاصل ہوتا ہے

(ا ب$_1$)(ج د$_1$) {(ا ب$_1$)(ج د$_1$) + (ج ا$_1$)(ب د$_1$)}

جو (ا د$_1$) سے تقسیم ہو جاتا ہے کیونکہ

(ب ج$_1$)(ا د$_1$) + (ج ا$_1$)(ب د$_1$) + (ا ب$_1$)(ج د$_1$) = ۰

مقطعات کو پھیلانے اور (ا د$_1$) سے تقسیم کر دینے سے آخرالامر

ہمیں خارج قسمت ملتا ہے

(ا د$_1$)^3 − ۲ (ا ب$_1$)(ج د$_1$)(ا د$_1$) + (ب د$_1$)(ج ا$_1$)(ا د$_1$)

+ (ج ا$_1$)^2(ج د$_1$) + (ا ب$_1$)(ب د$_1$)^2 − (ا ب$_1$)(ب ج$_1$)(د ج$_1$)

جو واجب درجہ اور وزن کا ہونیکی وجہ سے مطلوبہ حاصل اسقاط ہے۔

اگر ہم اسی طرح دو چار درجی مساواتوں کا حاصل اسقاط، عمل کو دو کعبی مساواتوں سے ساقط کرنیمیں تحویل کرکے، معلوم کرنا چاہیں تو ہمیں چوتھے درجہ کا ایک غیر ضروری جزو ضربی خارج کرنا ہوگا جو اس بات کی شرط ہے کہ ان کعبیوں میں ایک جزو ضربی مشترک ہونا چاہیئے اگرچیکہ چار درجیوں میں جن سے یہ کعبی اخذ کئے گئے ہیں مشترک جزو ضربی کا ہونا ضروری نہیں ہے۔ بالعموم اگر ہم اس طریقہ سے

ن ویں درجہ کی دو مساواتوں کا حاصل اسقاط' (ن - ۱) درجہ کی دو
مساواتوں سے ساقط کرنے سے' تلاش کریں تو ہمیں ۲ ن - ۴ ویں
رتبہ کا ایک غیر ضروری جزو ضربی خارج کرنا پڑیگا - اس لئے یہ طریقہ
پہلے تمام طریقوں سے ادنیٰ ہے اور اسکو سہولت کے ساتھ استعمال (83)
نہیں کیا جا سکتا جب تک کہ غیر ضروری اجزائے ضربی آسانی کیساتھ
جدا نہ ہو سکیں -

۱۵۷ - **ممیز** - کسی مساوات کا ممیز جبکہ مساوات میں ایک واحد مجہول مقدار
شامل ہو سروں کا وہ سادہ ترین منطق صحیح تفاعل ہے جسکا صفر ہونا
اس شرط کو بیان کرتا ہے جو مساوی اصلوں کے لئے ہے - اس قسم
کے تفاعلوں کی مثالیں دفعات ۴۴ اور ۶۸ میں آچکی ہیں - اب ہم
یہ بتائینگے کہ وہ حواصل اسقاط کی خاص صورتیں ہیں -

اگر مساوات ف (لا) = ۰ میں ایک دوہری اصل ہو تو یہ اصل
مساوات فَ (لا) = ۰ میں ایک مرتبہ واقع ہوگی اور لا فَ (لا) کو
ن ف (لا) میں سے تفریق کیا جائے تو اسی اصل کو ن ف (لا)
- لا فَ (لا) = ۰ میں واقع ہونا چاہیئے - یہ مساوات لا میں (ن - ۱)
ویں درجہ کی ہے - اس مساوات اور مساوات فَ (لا) = ۰ سے جسکا
درجہ بھی ن - ۱ ہے لا کو ساقط کیا جائے تو ہمیں سروں کا ایک تفاعل
ملتا ہے جسکا صفر ہونا مساوی اصلوں کے لئے ضروری شرط ہے -
اس حاصل اسقاط کا درجہ ف (لا) کے سروں میں ۲ (ن - ۱) ہے اور
اسکا وزن ن (ن - ۱) ہے جیسا کہ دفعہ ۱۵۲' (۱) میں دی ہوئی
نمونہ کی رقموں کو دیکھنے سے واضح ہے - اگر ممیز کو دی ہوئی مساوات
کی اصلوں کے ایک متشاکل تفاعل کے طور پر بیان کیا جائے تو وہ
اصلوں کے فرقوں کے (کم سے کم قوت میں اٹھائے ہوئے) اُس
حاصل ضرب کے مساوی ہوگا جبکہ سروں کی رقوم میں منطق شکل میں
بیان کیا جاسکتا ہے - فرقوں کے مربعوں کا حاصل ضرب Π (ع$_م$ - ع$_ن$)^2

اس طور پر بیان ہو سکتا ہے اور چونکہ یہ کسی اصل میں ۲ (ن - ۱) ویں درجہ کا اور تمام اصلوں میں ن (ن - ۱) ویں درجہ کا ہے اسلئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ممیز ایک عددی جزو ضربی سے ضرب کھا کر

$ا_۰^{۲(ن-۱)} \prod (ع_۱ - ع_۲)^۲$ کے مساوی ہے۔

اگر تفاعل ف (لا) میں ایک دوسرا متغیر ما داخل کر کے اسکو ہمذات بنایا جائے تو وہ دو تفاعل جنکا حاصل اسقاط ف (لا) کا ممیز ہے لا اور ما کے لحاظ سے ف (لا) کے تفرقی سر ہیں۔ اسی طرح بالعموم ن متغیروں کا کوئی ہمذات تفاعل ہو تو اسکا ممیز وہ حاصل اسقاط ہے جو ان متغیروں کو ن مساواتوں سے ساقط کرنے سے بنتا ہے جہاں یہ مساواتیں تفاعل کو باری باری سے ہر متغیر کے لحاظ سے تفرق کرنے سے حاصل ہوتی ہیں۔

(84) ## مثالیں

۱ — $ا_۰ لا^۳ + ۳ ا_۱ لا^۲ + ۳ ا_۲ لا + ا_۳ = ۰$

کا ممیز معلوم کرو۔

ہمیں یہاں دو مساواتوں

$$ا_۰ لا^۲ + ۲ ا_۱ لا + ا_۲ = ۰ ،$$
$$ا_۱ لا^۲ + ۲ ا_۲ لا + ا_۳ = ۰ ،$$

کا حاصل اسقاط معلوم کرنا ہے۔ دفعہ ۱۵۰ کی رو سے ایک مشترک اصل کیلئے شرط ہے

$$۴ (ا_۰ ا_۲ - ا_۱^۲)(ا_۱ ا_۳ - ا_۲^۲) - (ا_۰ ا_۳ - ا_۱ ا_۲)^۲ = ۰ .$$

پس مسروں کا یہ تفاعل ممیز ہے جس کو دفعہ ۱۵۴ کے ذریعہ ایک مقطع کی شکل میں بھی لکھا جا سکتا ہے:

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_0 & 2\text{ا}_1 & \text{ا}_2 & 0 \\ 0 & \text{ا}_0 & 2\text{ا}_1 & \text{ا}_2 \\ \text{ا}_1 & 2\text{ا}_2 & \text{ا}_3 & 0 \\ 0 & \text{ا}_1 & 2\text{ا}_2 & \text{ا}_3 \end{vmatrix}$$

اسکی آسانی کے ساتھ تصدیق ہوسکتی ہے کہ ممیز کی یہ قیمت وہی ہے جو دفعہ ۲۴ میں پہلے حاصل کیجا چکی ہے ـ

۲ ــ چار درجی

$$\text{ا}_0\,\text{لا}^4 + 4\,\text{ا}_1\,\text{لا}^3 + 6\,\text{ا}_2\,\text{لا}^2 + 4\,\text{ا}_3\,\text{لا} + \text{ا}_4 = 0$$

کا ممیز ایک مقطع کی شکل میں بیان کرو ـ

یہاں مساواتوں

$$\text{ا}_0\,\text{لا}^3 + 3\,\text{ا}_1\,\text{لا}^2 + 3\,\text{ا}_2\,\text{لا} + \text{ا}_3 = 0،$$

$$\text{ا}_1\,\text{لا}^3 + 3\,\text{ا}_2\,\text{لا}^2 + 3\,\text{ا}_3\,\text{لا} + \text{ا}_4 = 0،$$

سے لا کو ساقط کرنا ہے ـ دفعہ ۱۵۴ کے طریقہ سے حاصل اسقاط ہے

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_0 & 3\text{ا}_1 & 3\text{ا}_2 & \text{ا}_3 & 0 & 0 \\ 0 & \text{ا}_0 & 3\text{ا}_1 & 3\text{ا}_2 & \text{ا}_3 & 0 \\ 0 & 0 & \text{ا}_0 & 3\text{ا}_1 & 3\text{ا}_2 & \text{ا}_3 \\ \text{ا}_1 & 3\text{ا}_2 & 3\text{ا}_3 & \text{ا}_4 & 0 & 0 \\ 0 & \text{ا}_1 & 3\text{ا}_2 & 3\text{ا}_3 & \text{ا}_4 & 0 \\ 0 & 0 & \text{ا}_1 & 3\text{ا}_2 & 3\text{ا}_3 & \text{ا}_4 \end{vmatrix}$$

اسکو وہی ہونا چاہئے جو $\text{ع}^3 - 27\,\text{جے}^2$ ہے (دیکھو دفعہ ۶۸) ـ

۳ ــ بیزو کے اسقاط کے طریقہ سے چار درجی کے ممیز کو ایک مقطع کی

شکل میں بیان کرو۔

(85) ۴ — ثابت کرو کہ مساوات

$ع \equiv ا\, لا^م + ب\, ما^م + ج\, ی^م = ۰$، جہاں $لا + ما + ی \equiv ۰$

کا ممیز $\Delta_م$ مساوات

$$(ب\, ج)^{\frac{1}{م-1}} + (ج\, ا)^{\frac{1}{م-1}} + (ا\, ب)^{\frac{1}{م-1}} = ۰$$

کو شکل $\Delta_م = ۰$ میں منطق بنانے سے حاصل ہو سکتا ہے۔ بالخصوص $\Delta_۳$، $\Delta_۴$، $\Delta_۵$ کی قیمتیں محسوب کرو۔

اگر $لا + ما + ی \equiv ۰$ سے ی کی قیمت لیکر اس قیمت کو دئے ہوئے تفاعل میں درج کیا جائے تو اس تفاعل میں دو متغیر رہ جائینگے اور

$$\frac{جف\, ع}{جف\, لا} = ۰،\quad \frac{جف\, ع}{جف\, ما} = ۰$$

سے لا اور ما کو ساقط کرنے پر ممیز ملجائیگا۔

۵ — اسقاط سے ثابت کرو کہ مثال (۲) کے چار درجی کی تین اصلوں کے مساوی ہونیکے لئے ایک شرط ج = ۰ ہے۔

چونکہ یہ تہری اصل مساوات

$$ع_۳ \equiv ا_۰ لا^۳ + ۳ ا_۱ لا^۲ + ۳ ا_۲ لا + ا_۳ = ۰$$

کی ایک دوہری اصل اور مساوات

$$ا_۱ لا^۲ + ۲ ا_۲ لا + ا_۳ = ۰$$

کی ایک واحد اصل ہونی چاہئے اور چونکہ مساوات

$$ع_۲ \equiv ا_۰ لا^۲ + ۲ ا_۱ لا + ا_۲ = ۰$$

کی بھی ایک واحد اصل ہونی چاہئے اسلئے متماثلہ

$$ع_۴ \equiv لا^۲ ع_۲ + ۲ لا (ا_۱ لا^۲ + ۲ ا_۲ لا + ا_۳) + ا_۲ لا^۲ + ۲ ا_۳ لا + ا_۴$$

سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ یہ تہری اصل حسب ذیل تین مساواتوں کی ایک مشترک اصل ہونی چاہیئے :-

$$\text{ا}_0\,\text{لا}^2 + 2\,\text{ا}_1\,\text{لا} + \text{ا}_2 = 0$$
$$\text{ا}_1\,\text{لا}^2 + 2\,\text{ا}_2\,\text{لا} + \text{ا}_3 = 0$$
$$\text{ا}_2\,\text{لا}^2 + 2\,\text{ا}_3\,\text{لا} + \text{ا}_4 = 0$$

پس شرط ہے

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_0 & \text{ا}_1 & \text{ا}_2 \\ \text{ا}_1 & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 \\ \text{ا}_2 & \text{ا}_3 & \text{ا}_4 \end{vmatrix} \equiv \text{ج} = 0$$

۶ - ثابت کرو کہ دو تفاعلوں کے حاصل ضرب کا ممیز ایکے ممیزوں کے حاصل ضرب کو حاصل اسقاط کے مربع سے ضرب دینے پر حاصل ہوتا ہے۔

دفعہ ۱۵۱ اور دفعہ ہذا کے نتیجوں کو استعمال کرنے سے یہ نتیجہ واضح ہے کیونکہ تمام اصلوں کے فرقوں کے مربعوں کا حاصل ضرب مشتمل ہے ہر مساوات کی جداگانہ اصلوں کے فرقوں کے مربعوں کے حاصل ضرب اور اُن فرقوں کے حاصل ضرب کے مربع پر جو ایک مساوات کی ہر اصل کے ساتھ دوسری مساوات کی سب اصلوں کو لینے سے بنتے ہیں۔

۱۵۸ - دو مساواتوں کی مشترک اصل کی تعیین - اگر دو مساواتوں (86)

$$\text{ع} \equiv \text{ا}_{\text{م}}\,\text{لا}^{\text{م}} + \text{ا}_{\text{م}-1}\,\text{لا}^{\text{م}-1} + \cdots\cdots + \text{ا}_0 = 0$$

$$\text{و} \equiv \text{ب}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ب}_{\text{ن}-1}\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + \cdots\cdots + \text{ب}_0 = 0$$

کا حاصل اسقاط س ہو اور کوئی مشترک اصل عہ تو

$$\text{عہ} = \frac{\dfrac{\text{فر کا}}{\text{فر لا}_{۱}}}{\dfrac{\text{فر کا}}{\text{فر لا}_{۰}}} = \frac{\dfrac{\text{فر کا}}{\text{فر لا}_{۲}}}{\dfrac{\text{فر کا}}{\text{فر لا}_{۱}}} = \frac{\dfrac{\text{فر کا}}{\text{فر لا}_{۳}}}{\dfrac{\text{فر کا}}{\text{فر لا}_{۲}}} = \text{وغیرہ}$$

اس کو ثابت کرنیکے لئے ہم پہلے یہ دکھاتے ہیں کہ تفاعل فہ (لا) اور پہ (لا) حاصل ہو سکتے ہیں ایسے کہ کا ≡ ع فہ (لا) + و پہ (لا) یعنے جب ع اور و کو بالترتیب فہ (لا) اور پہ (لا) سے ضرب دیا جاتا ہے اور ان کو جمع کیا جاتا ہے تو وہ تمام ارقام جنہیں لا شامل ہوتا ہے متماثلاً معدوم ہوتی ہیں۔ مثلاً کا کی وہ شکل لو جو چوتھے اور تیسرے درجوں کے تفاعلوں کے لئے مثال ۲ دفعہ ۱۵۴ میں دی گئی ہے۔ دوسرے ستون کو لا سے ضرب دو، تیسرے کو $\text{لا}^{۲}$ سے، وغیرہ اور پہلے ستون میں جمع کرو تو پہلے ستون کے حسب ذیل عناصر حاصل ہوتے ہیں ع، لا ع، $\text{لا}^{۲}$ ع، و، لا و، $\text{لا}^{۲}$ و، $\text{لا}^{۳}$ و۔ اسکے بعد مقطع کو پھیلاؤ تو وہ شکل ع فہ (لا) + و پہ (لا) اختیار کرتا ہے جہاں فہ، لا کا ایک دو درجی تفاعل ہے اور پہ تین درجی۔ ثبوت کا یہ طریقہ کسی دو تفاعلوں پر استعمال کیا جا سکتا ہے اور بالعموم اگر تفاعلوں ع اور و کے درجے م اور ن ہوں تو فہ اور پہ کے درجے ن - ۱ اور م - ۱ ہونگے۔ اسلئے

$$\text{کا} \equiv \text{ع فہ} + \text{و پہ}$$

جس سے $\dfrac{\text{فر کا}}{\text{فر لا}_{\text{ف}}} \equiv \text{لا}^{\text{ف}}\,\text{فہ} + \text{ع}\,\dfrac{\text{فر فہ}}{\text{فر لا}_{\text{ف}}} + \text{و}\,\dfrac{\text{فر پہ}}{\text{فر لا}_{\text{ف}}}$ ،

$$\frac{\text{فر کا}}{\text{فر لا}_{\text{ف}+۱}} \equiv \text{لا}^{\text{ف}+۱}\,\text{فہ} + \text{ع}\,\frac{\text{فر فہ}}{\text{فر لا}_{\text{ف}+۱}} + \text{و}\,\frac{\text{فر پہ}}{\text{فر لا}_{\text{ف}+۱}} \text{ ،}$$

اب اگر مساواتوں ع = ۰ اور و = ۰ کی ایک مشترک اصل عہ ہو تو اوپر کی مساواتوں میں لا کی یہ قیمت درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{عہ}\,\frac{\text{فر سا}}{\text{فر } ا_{ن}} = \frac{\text{فر سا}}{\text{فر } ا_{ن+1}}$$

جس سے مسئلہ ثابت ہے۔

(87) اسی طرح ممیز Δ کو تفرق کرنے سے کسی مساوات کی دوہری اصل متعین کیجا سکتی ہے۔

جب مساواتوں ع = ۰ اور و = ۰ میں دو اصلیں مشترک ہوں تو $ا_{ن}$، $ا_{ن+1}$ وغیرہ کے لحاظ سے سا کے پہلے تفرقی سر متماثلاً معدوم ہوتے ہیں اور اسلئے دوسرے تفرقی سر لینا ضروری ہے۔ اس صورت میں مساوات درجہ دوم

$$\frac{\text{فر}^2 \text{ سا}}{\text{فر } ا_{ن}^2}\,\text{لا}^2 - 2\,\frac{\text{فر}^2 \text{ سا}}{\text{فر } ا_{ن}\,\text{فر } ا_{ن+1}}\,\text{لا} + \frac{\text{فر}^2 \text{ سا}}{\text{فر } ا_{ن+1}^2} = 0$$

کی اصلیں مشترک اصلوں کے طور پر حاصل ہوتی ہیں۔ یہ بات سا کی مندرجہ بالا قیمت کو تفرق کرنے سے ظاہر ہے کیونکہ اس آخری مساوات کے پہلے رکن کا جملہ ذیل کے جملہ کے مساوی حاصل ہوتا ہے:-

$$\left(\frac{\text{فر}^2 \text{ فہ}}{\text{فر } ا_{ن}^2}\,\text{لا}^2 - 2\,\frac{\text{فر}^2 \text{ فہ}}{\text{فر } ا_{ن}\,\text{فر } ا_{ن+1}}\,\text{لا} + \frac{\text{فر}^2 \text{ فہ}}{\text{فر } ا_{ن+1}^2}\right)\text{ع}$$

$$+\left(\frac{\text{فر}^2 \text{ چہ}}{\text{فر } ا_{ن}^2}\,\text{لا}^2 - 2\,\frac{\text{فر}^2 \text{ چہ}}{\text{فر } ا_{ن}\,\text{فر } ا_{ن+1}}\,\text{لا} + \frac{\text{فر}^2 \text{ چہ}}{\text{فر } ا_{ن+1}^2}\right)\text{و}$$

اور یہ ایسا جملہ ہے کہ اگر اسمیں مشترک اصلوں میں سے کوئی اصل لا کی بجائے درج کیجائے تو یہ جملہ معدوم ہو جاتا ہے۔

اگر تین یا زیادہ مشترک اصلیں ہوں تو اسی طرح کا عمل صادق آئیگا۔ جن اصلوں کا اس باب میں ذکر آیا ہے اُنکی توضیح کے لئے حسب ذیل مثالیں دیجاتی ہیں۔

امثلہ

۱۔ مساواتوں

ا لا² + ب لا + ج = ۰ ،

لا³ = ۱ ،

سے لا ساقط کرو۔

پہلی مساوات کو لا سے ضرب دو تو، چونکہ لا³ = ۱ ،

ب لا² + ج لا + ا = ۰

اور پھر لا سے ضرب دینے سے

ج لا² + ا لا + ب = ۰

اِن تین مساواتوں سے لا² اور لا کو ساقط کیا جائے تو نتیجہ حاصل ہوتا ہے

$$\begin{vmatrix} ا & ب & ج \\ ب & ج & ا \\ ج & ا & ب \end{vmatrix} = ۰$$

اگر متشاکل تفاعلوں کا طریقہ استعمال کیا جائے (دفعہ ۱۵۱) اور دوسری (88)
مساوات کی اصلیں پہلی مساوات میں درج کیجائیں تو حاصل اسقاط اس شکل میں ملتا ہے

(ا + ب + ج) (ا سہ² + ب سہ + ج) (ا سہ + ب سہ² + ج)

۲۔ اسی طرح مساواتوں

ا لا⁴ + ب لا³ + ج لا² + د لا + ع = ۰ ، لا⁵ = ۱

سے لا ساقط کرو۔

نتیجہ پانچویں رتبہ کا ایک مستدیرہ ہے جو پچھلی مثال کے مطابق عمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ تشاکل تفاعلوں کی مدد سے پانچ اجزائے ضربی لکھے جا سکتے ہیں۔ بالعموم اس قسم کے کسی دو تفاعلوں پر ایسا ہی طریقہ استعمال کیا جا سکتا ہے۔

۳ — دفعہ ۱۵۳ کا طریقہ وہ شرطیں معلوم کرنیکے لئے استعمال کرو کہ دو کعبی مساواتوں

فہ (لا) ≡ ا لا^3 + ب لا^2 + ج لا + د = ۰،

پہ (لا) ≡ اَ لا^3 + بَ لا^2 + جَ لا + دَ = ۰،

میں دو مشترک اصلیں ہوں۔

جب یہ صورت ہو تو فہ (لا) کو پہ (لا) کے تیسرے جزو ضربی سے اور پہ (لا) کو فہ (لا) کے تیسرے جزو ضربی سے ضرب دینے سے مماثل نتائج حاصل ہونے چاہئیں۔ اسلئے

(لَہ لا + مَہ) فہ (لا) ≡ (لہ لا + مہ) پہ (لا)

جہاں لہ، مہ، لَہ، مَہ، غیر معین مقداریں ہیں۔ اس تماثلہ سے ذیل کی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں:—

لَہ ا − لہ اَ = ۰

لَہ ب + مَہ ا − لہ بَ − مہ اَ = ۰

لَہ ج + مَہ ب − لہ جَ − مہ بَ = ۰

لَہ د + مَہ ج − لہ دَ − مہ جَ = ۰

مَہ د − مہ دَ = ۰

انمیں سے چار چار مساواتوں سے لَہ، مَہ، لہ، مہ کو ساقط کرنے سے پانچ مقطعات حاصل ہوتے ہیں جنکو صفر کے مساوی رکھنے سے مطلوبہ شرطیں ملجاتی ہیں۔ اس قسم کی متعدد مساواتوں سے ساقط کرنیکا نتیجہ عموماً ایک سادہ سی ترقیم سے بیان کیا جاتا ہے۔ چنانچہ موجودہ صورت میں پانچ مقطعات کا منعدم ہونا

اس طور پر بیان کیا جاتا ہے :-

$$\begin{Vmatrix} \text{۰} & \text{د} & \text{ج} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{د} & \text{ج} & \text{ب} & \text{ا} & \text{۰} \\ \text{۰} & \text{دَ} & \text{جَ} & \text{بَ} & \text{اَ} \\ \text{دَ} & \text{جَ} & \text{بَ} & \text{اَ} & \text{۰} \end{Vmatrix} = \text{۰}$$

باری باری سے ہر ستون کو ترک کر دینے سے متذکرۂ بالا پانچ مقطعات بنتے ہیں۔ یہ بات مشاہدہ طلب ہے کہ محصلہ شرطیں دو شرطوں کے مماثل ہیں جو ایک دوسرے پر منحصر نہیں ہیں اور یہ بتایا جا سکتا ہے کہ جب کوئی دو مقطعات معدوم
ہوں تو باقی تین بھی معدوم ہونے چاہئیں ۔ (89)

۴ — مماثلہ ذیل کو ثابت کرو :-

$$\begin{vmatrix} \text{بہ}^{۲} & \text{۲عہ بہ} & \text{عہ}^{۲} \\ \text{بہ بہَ} & \text{عہ بہَ + عہَ بہ} & \text{عہ عہَ} \\ \text{بہَ}^{۲} & \text{۲عہَ بہَ} & \text{عہَ}^{۲} \end{vmatrix} = (\text{عہ بہَ} - \text{عہَ بہ})^{۳}$$

مساواتوں

$$\text{عہ لا + بہ ما} = \text{۰} ،\quad \text{عہَ لا + بہَ ما} = \text{۰}$$

سے لا اور ما اور ان مساواتوں سے اخذ کردہ مساواتوں

$$(\text{عہ لا + بہ ما})^{۲} = \text{۰} ،\quad (\text{عہ لا + بہ ما})(\text{عہَ لا + بہَ ما}) = \text{۰} ،\quad (\text{عہَ لا + بہَ ما})^{۲} = \text{۰}$$

سے لا^{۲}، لا ما، اور ما^{۲} ساقط کرنے سے مماثلہ مندرجۂ بالا ثابت ہو جاتی ہے کیونکہ اسکے دائیں جانب کا مقطع آخر کی تین مساواتوں سے لا^{۲}، لا ما، اور ما^{۲} کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے اور یہ مقطع اس مقطع کی تیسری قوت کے مماثلاً مساوی ہونا چاہئے جو خطی مساواتوں سے لا اور ما کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

۵ — اسی طرح ثابت کرو

$$\begin{vmatrix} \text{بہ}^{۳} & \text{۳عہ بہ}^{۲} & \text{۳عہ}^{۲}\text{ بہ} & \text{عہ}^{۳} \\ \text{بہ}^{۲}\text{ بہَ} & \text{۲عہ بہ بہَ + عہَ بہ}^{۲} & \text{۲عہ عہَ بہ + عہ}^{۲}\text{ بہَ} & \text{عہ}^{۲}\text{ عہَ} \\ \text{بہ بہَ}^{۲} & \text{۲عہَ بہ بہَ + عہ بہَ}^{۲} & \text{۲عہ عہَ بہَ + عہَ}^{۲}\text{ بہ} & \text{عہ عہَ}^{۲} \\ \text{بہَ}^{۳} & \text{۳عہَ بہَ}^{۲} & \text{۳عہَ}^{۲}\text{ بہَ} & \text{عہَ}^{۳} \end{vmatrix} \equiv (\text{عہ بہَ} - \text{عہَ بہ})^{۶}$$

۶ — چار مساواتوں

$$\bar{ع} = \frac{ل ع + م}{\bar{ل} ع + \bar{م}} ، \quad \bar{ب} = \frac{ل ب + م}{\bar{ل} ب + \bar{م}} ، \quad وغیرہ$$

(جو ہم رسم استحالہ میں متغیروں کے باہمی رشتہ کو تعبیر کرتی ہیں) سے ل، م، لَ، مَ ساقط کرکے مثال ۱۳ صفحہ ۸۵ کا نتیجہ ثابت کرو۔

۷ — اگر

$$ع \equiv ا ع^2 + ۲ ب ع و + ج و^2 ،$$
$$و \equiv \bar{ا} ع^2 + ۲ \bar{ب} ع و + \bar{ج} و^2 ،$$
$$ع \equiv ا لا^2 + ۲ ب لا ما + ج ما^2 ،$$
$$و \equiv \bar{ا} لا^2 + ۲ \bar{ب} لا ما + \bar{ج} ما^2 ،$$

تو ع اور و کو لا اور ما کے تفاعل سمجھکر انکا حاصل اسقاط معلوم کرو۔

چونکہ $ع = ا (ع - عہ و)(ع - بہ و) ،$

$$و = \bar{ا} (ع - \bar{ع} و)(ع - \bar{ب} و) ،$$

اسلئے اگر لا، ما کی مشترک قیمتوں کے لئے ع اور و معدوم ہوں تو اجزائے ضربی کا کوئی زوج مثلاً ع − عہ و اور ع − عَ و معدوم ہونا چاہئے۔ پس ع − عہ و اور ع − عَ و کا حاصل اسقاط بنانے اور ع اور و کے حاصل اسقاط کو س (ع، و) سے تعبیر کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$س(ع - عہ و ، ع - \bar{ع} و) = (عہ - \bar{ع})^2 \, س(ع ، و)$$

اور ان تمام حواصل اسقاط کو ایک ساتھ ضرب دینے سے

$$س_{لا}(ع ، و) = ا^2 \bar{ا}^2 (عہ - \bar{ع})^2 (بہ - \bar{ب})^2 (عہ - \bar{ب})^2 (بہ - \bar{ع})^2 \{س(ع ، و)\}^4$$

یا
$$س_{لا}(ع ، و) = \{س(ع ، و)\}^2 \{س(ع ، و)\}^4$$

۸ — ثابت کرو کہ مساواتوں (90)

$$ف(لا) = ۰ ، \quad \bar{ف}(لا) + \bar{\bar{ف}}(لا) \frac{ا}{۱ \times ۲} + \dots + \frac{ا^2}{۱ \times ۲ \times ۳} \dots = ۰ ،$$

سے لا کو ساقط کرنے پر وہ مساوات حاصل ہوسکتی ہے جسکی اصلیں دی ہوئی مساوات ف(لا) = ۰ کی اصلوں کے فرق ہوں ـ

۹ ــ مساواتوں

لا + ما + ی = ۰ ،

ا ما ی + ب ی لا + ج لا ما = ۰ ،

ا ما^۳ ی^۳ + ب ی^۳ لا^۳ + ج لا^۳ ما^۳ = ۰ ،

سے لا، ما، ی کو ساقط کرو ـ

پہلی دو مساواتوں کے ساتھ ایک مفروضہ خطی مساوات

ل لا + م ما + ن ی = ۰

لو جسکے سر اختیاری ہیں اور لا، ما، ی کو ساقط کرو تو

ا ل^۲ + ب م^۲ + ج ن^۲ + (ا − ب − ج) م ن

+ (ب − ج − ا) ن ل + (ج − ا − ب) ل م = ۰ ..... (۱)

جسکو مساوات

(ل لا_۱ + م ما_۱ + ن ی_۱) (ل لا_۲ + م ما_۲ + ن ی_۲) = ۰ ..... (۲)

کے مماثل ہونا چاہئے جہاں لا_۱، ما_۱، ی_۱ اور لا_۲، ما_۲، ی_۲ وہ دو نظام ہیں لا، ما، ی کی قیمتوں کے جو دی ہوئی پہلی دو مساواتوں میں مشترک ہیں۔ ان قیمتوں کو دی ہوئی تیسری مساوات میں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

کا = (ا ما_۱^۳ ی_۱^۳ + ب ی_۱^۳ لا_۱^۳ + ج لا_۱^۳ ما_۱^۳) (ا ما_۲^۳ ی_۲^۳ + ب ی_۲^۳ لا_۲^۳ + ج لا_۲^۳ ما_۲^۳)

مساواتوں (۱) اور (۲) کا مقابلہ کرنے سے جو متشاکل تفاعل حاصل ہوں اُنکے ذریعہ کا کی مندرجۂ بالا قیمت کو تحویل کیا جائے تو

۴ کا = ۴ ف^۲ ق + ق^۲ + ۲۷ ف ر

جہاں ف = ا^۲ + ب^۲ + ج^۲ − ۲ ب ج − ۲ ج ا − ۲ ا ب ،

ق = ا ب ج (ا + ب + ج) ،

ر = ا^۲ ب^۲ ج^۲

۱۰ ــ اگر لا کے تین تفاعل ع، و، ھ ہوں جنکے درجے علی الترتیب م، ن، م + ن - ۱ ہیں تو ثابت کرو کہ شکل ذیل کا ایک مماثل رشتہ موجود ہونا چاہئے

ر ھ ≡ ع قہ (لا) + و یہ (لا)

جہاں قہ (لا) اور یہ (لا) علی الترتیب ن - ۱ اور م - ۱ درجوں کے دریافت طلب تفاعل ہیں اور ر، ع اور و کا حاصل اسقاط ہے۔

۱۱ ــ ر کی دفعہ ۱۵۱ میں دی ہوئی قیمت کو تفرق کرنے سے دفعہ ۱۵۸ کے نتیجوں کی تصدیق کرو۔

(91)

پندرھواں باب

متشاکل تفاعلوں کو محسوب کرنا نیم غیر متغیر اور نیم ہم متغیر

۱۵۹ - $\text{س}_{\text{م}}$ اور $\text{ب}_{\text{م}}$ کیلئے ویرنگ (Waring) کے عام جملے

مساواتوں کی اصلوں کے متشاکل تفاعلوں کے اہم ترین خواص پر پہلے بحث ہو چکی ہے (دفعات ۲۷، ۲۸، آٹھواں باب جلد اول)۔ اِس باب میں ہم چند مختلف مسئلوں کا اضافہ کرتے ہیں جو متشاکل تفاعلوں کو محسوب کرنے میں اکثر فائدہ کے ساتھ استعمال کئے جا سکتے ہیں۔ ہم سب سے پہلے وہ عام جملے بیان کرینگے جنکا حوالہ دفعہ ۸۰ میں دیا جا چکا ہے اور جو ویرنگ سے منسوب ہیں ۔

(۱) ن ویں درجہ کی مساوات کے سروں ب_1، ب_2، ب_3، .... $\text{ب}_{\text{ن}}$ کی رقوم میں $\text{س}_{\text{م}}$ کے لئے عام جملہ ۔

ہمیں معلوم ہے

$$\text{لوک}_{\text{و}}(1+\text{ب}_1\,\text{ما}+\ldots\ldots+\text{ب}_{\text{ن}}\,\text{ما}^{\text{ن}})=\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\infty}\frac{(-1)^{\text{ر}'}}{\text{ر}}(\text{ب}_1\,\text{ما}+\text{ب}_2\,\text{ما}^2+\ldots+\text{ب}_{\text{ن}}\,\text{ما}^{\text{ن}})^{\text{ر}}$$

$$=\text{س}_1\,\text{ما}+\frac{1}{2}\text{س}_2\,\text{ما}^2+\frac{1}{3}\text{س}_3\,\text{ما}^3+\ldots+\frac{1}{\text{م}}\text{س}_{\text{م}}\,\text{ما}^{\text{م}}+\ldots\ldots \quad (\text{دفعہ } ۹)$$

اب کثیر رقمی مسئلہ سے $(\text{ب}_1\,\text{ما}+\text{ب}_2\,\text{ما}^2+\ldots\ldots+\text{ب}_{\text{ن}}\,\text{ما}^{\text{ن}})^{\text{ر}}$ کو پھیلانے

اور اوپر کی مساوات میں $ما^م$ کے سروں کا مقابلہ کرنے سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$س_م = \Sigma \frac{(-1)^م \, جا(ر_1+ر_2+\cdots+ر_ن)}{جا(ر_1+1)\, جا(ر_2+1)\cdots جا(ر_ن+1)} \, ب_1^{ر_1} ب_2^{ر_2} \cdots ب_ن^{ر_ن}$$

جسمیں $ر_1+ر_2+ر_3+\cdots+ر_ن = ر،$

$$ر_1+2ر_2+3ر_3+\cdots+ن ر_ن = م$$

اور $ر_1$، $ر_2$، $ر_3$، ....، $ر_ن$ کو وہ تمام مثبت صحیح قیمتیں دینی چاہئیں
(بشمول صفر) جو ان دو مساواتوں میں سے آخری مساوات کو پورا کرتی (92)
ہیں - نیز ان میں سے کسی صحیح عدد کو $ر_ع$ سے تعبیر کیا جائے تو

$$جا(ر_ع+1) = 1\times2\times3\times\cdots\times ر_ع$$

بشرطیکہ یہ مان لیا جائے کہ $جا(1) = 1$ جبکہ $ر_ع = 0$ -

(۲) اصلوں کی قوتوں کے مجموعوں $س_1$، $س_2$، $س_3$ .... $س_م$ کی رقوم میں کسی سر $ب_م$ کے لئے عام جملہ -

ہم جانتے ہیں

$$1+ب_1 ما+ب_2 ما^2+\cdots+ب_م ما^م+\cdots+ب_ن ما^ن$$

$$= قو^{-ما س_1} \times قو^{-\frac{1}{2} ما^2 س_2} \times قو^{-\frac{1}{3} ما^3 س_3} \cdots\cdots$$ (دفعہ ۸)

اس مساوات کی بائیں طرف کے اجزائے ضربی کو پھیلانے اور طرفین میں $ما^م$ کے سروں کا مقابلہ کرنے سے گذشتہ مثال کی ترقیم کی بموجب ہم حاصل کرتے ہیں

$$\text{ب}_{\text{م}} = \sum \frac{(-1)^{\text{ر}_1+\text{ر}_2+\dots+\text{ر}_{\text{م}}} \times \text{س}_1^{\text{ر}_1} \times \text{س}_2^{\text{ر}_2} \dots \text{س}_{\text{م}}^{\text{ر}_{\text{م}}}}{\text{جا}(\text{ر}_1+1)\,\text{جا}(\text{ر}_2+1)\dots\text{جا}(\text{ر}_{\text{م}}+1)\; ۲^{\text{ر}_2} \times ۳^{\text{ر}_3} \times \dots \text{م}^{\text{ر}_{\text{م}}}}$$

جسمیں ر_1، ر_2، ....، $\text{ر}_{\text{م}}$ کو وہ سب مثبت قیمتیں (بشمول صفر) دینی چاہئیں جو مساوات

$$\text{ر}_1 + ۲\,\text{ر}_2 + ۳\,\text{ر}_3 + \dots\dots + \text{م}\,\text{ر}_{\text{م}} = \text{م}$$

کو پورا کرتی ہیں ۔

۱۶۰ ـ دو مساواتوں کی اصلوں کے متشاکل تفاعل ـ مساوات

$$\text{ق}(\text{لا}) \equiv \text{ا}_0\,\text{لا}^{\text{م}} + \text{ا}_1\,\text{لا}^{\text{م}-1} + \text{ا}_2\,\text{لا}^{\text{م}-2} + \dots\dots + \text{ا}_{\text{م}} = 0 \;\dots\dots(۱)$$

کی اصلیں عہ_1، عہ_2، ....، $\text{عہ}_{\text{م}}$ ہیں اور مساوات

$$\text{پ}(\text{لا}) \equiv \text{ب}_0\,\text{ما}^{\text{ن}} + \text{ب}_1\,\text{ما}^{\text{ن}-1} + \text{ب}_2\,\text{ما}^{\text{ن}-2} + \dots\dots + \text{ب}_{\text{ن}} = 0 \;\dots\dots(۲)$$

کی اصلیں بہ_1، بہ_2، ....، $\text{بہ}_{\text{ن}}$ ہیں ـ اگر ایسے متشاکل تفاعل کو محسوب کرنا مطلوب ہو جسمیں اِن دونوں مساواتوں کی اصلیں شامل ہوتی ہیں تو ہم حسب ذیل عمل کرتے ہیں :ـ

ایک نیا متغیر ت مان لو جو لا اور ما کے ساتھ اس مساوات

$$\text{ت} = \text{لہ}\,\text{لا} + \text{مہ}\,\text{ما}$$

سے مربوط ہے اور فرض کرو کہ اس مساوات کی مدد سے اور (۲) سے ما کو ساقط کیا گیا ہے ـ حاصل اسقاط لا میں ایک ن ویں درجہ کی مساوات ہے جسکے سروں میں لہ، مہ، اور ت، ن ویں قوت میں شامل ہوتے ہیں ـ اب اس مساوات اور (۱) سے لا کو کسی ایک (93)
پچھلے طریقہ سے ساقط کرو تو ت میں م ن ویں درجہ کی ایک مساوات حاصل ہوتی ہے جسکی اصلیں جملہ $\text{لہ}\,\text{عہ} + \text{مہ}\,\text{بہ}$ کی م ن قیمتیں ہیں ـ

اب اگر فہ(لا) اور پہ(لا) کے سروں کی رقوم میں کسی متشاکل تفاعل کو مثلاً ∑ عہ^ف بہ^ق کو محسوب کرنا مطلوب ہو تو ہم ت والی مساوات کی اصلوں کی (ف + ق) ویں قوتوں کا مجموعہ معلوم کرتے ہیں اس طرح ہمیں ∑ (لہ عہ + مہ بہ)^(ف+ق) کی قیمت اصلی سروں اور لہ اور مہ کی مختلف قوتوں کی رقوم میں معلوم ہو جاتی ہے۔ اس جملہ میں لہ^ف مہ^ق کے سرے ∑ عہ^ف بہ^ق کی مطلوبہ قیمت فہ(لا) اور پہ(لا) کے سروں کی رقوم میں معلوم ہو جائیگی۔

اگر تین مساواتوں کی اصلوں کے متشاکل تفاعلوں کو محسوب کرنا مطلوب ہو تو فرض کرو کہ

ت = لہ لا + مہ ما + نہ ی

لا، ما، ی کو ساقط کرو اور اوپر کی طرح عمل کرو۔ غرض یہ طریقہ درست رہتا ہے خواہ مساواتوں کی تعداد کچھ ہی ہو۔ سروں ار، بر، جر وغیرہ کو ار = بر = جر = . وغیرہ بنانے سے ہم ایک واحد مساوات کی اصلوں کے متشاکل تفاعلوں پر عود کرتے ہیں جنکو پہلے محسوب کیا جا چکا ہے۔

۱۶۱ — اصلوں کی قوتوں کے مجموعوں سے محسوب کرنا حسب ذیل

تفرقی مساوات کی مدد سے جو سروں کے ایک تفاعل کو قوتوں کے مجموعوں کی رقوم میں اسکی قیمت سے مربوط کرتی ہے متشاکل تفاعل بہت آسانی کے ساتھ اکثر محسوب کئے جا سکتے ہیں:—

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرس}_{\text{ر}}}\,\text{فا}(\text{ب}_1،\ \text{ب}_2،\ \ldots\ \text{ب}_{\text{ن}}) = -\frac{1}{\text{ر}}\left(\frac{\text{فرفا}}{\text{فرب}_{\text{ر}}} + \text{ب}_1\frac{\text{فرفا}}{\text{فرب}_{\text{ر}+1}} + \cdots + \text{ب}_{\text{ن}-\text{ر}}\frac{\text{فرفا}}{\text{فرب}_{\text{ن}}}\right)$$

اس مساوات کو ثابت کرنیکے لئے ہم دفعہ ۸۰ کی مساوات (۱) لیتے ہیں اور اسکو $\text{س}_\text{ر}$ کے لحاظ سے تفرق کرتے ہیں تو ما کی مختلف قوتوں کے سروں کا مقابلہ کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فرب}_\text{ق}}{\text{فرس}_\text{ر}} = ۰ \text{ جبکہ } \text{ق} < \text{ر}\text{ ، } \frac{\text{فرب}_\text{ر}}{\text{فرس}_\text{ر}} = -\frac{۱}{\text{ر}}\text{ ، } \frac{\text{فرب}_{\text{ر}+\text{ک}}}{\text{فرس}_\text{ر}} = -\frac{۱}{\text{ر}}\,\text{ب}_\text{ک}$$

اور ان قیمتوں کو مساوات

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرس}_\text{ر}}\,\text{فا}(\text{ب}_۱\text{، ب}_۲\text{، ....، ب}_\text{ن}) = \frac{\text{فرفا}}{\text{فرب}_۱}\,\frac{\text{فرب}_۱}{\text{فرس}_\text{ر}} + \frac{\text{فرفا}}{\text{فرب}_۲}\,\frac{\text{فرب}_۲}{\text{فرس}_\text{ر}}$$

$$+ \ldots + \frac{\text{فرفا}}{\text{فرب}_\text{ن}}\,\frac{\text{فرب}_\text{ن}}{\text{فرس}_\text{ر}}$$

میں درج کرنے سے اوپر لکھی ہوئی مساوات فوراً مل جاتی ہے۔

مثالیں

۱۔ مساوات

$$\text{لا}^\text{ن} + \text{ب}_۱\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{ب}_۲\,\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \ldots + \text{ب}_\text{ن} = ۰$$

کی اصلوں کے متشاکل تفاعل $\text{ح}\ \text{عہ}_۱^۲\,\text{عہ}_۲^۲\,\text{عہ}_۳^۲\,\text{عہ}_۴^۲$ کی قیمت محسوب کرو۔

کسی متشاکل تفاعل کا رتبہ اور وزن معلوم کرنیکے بعد ہم اسکی قیمت کے حرفی حصے کو سروں کی رقوم میں لکھ سکتے ہیں۔ یہاں ح دوسرے رتبہ کا ہے اور اسکا وزن آٹھ ہے۔ پس

$$\text{ح} = \text{ت}\,\text{ب}_۸ + \text{ت}_۱\,\text{ب}_۱\,\text{ب}_۷ + \text{ت}_۲\,\text{ب}_۲\,\text{ب}_۶ + \text{ت}_۳\,\text{ب}_۳\,\text{ب}_۵ + \text{ت}_۴\,\text{ب}_۴^۲$$

جہاں ت، $\text{ت}_۱$، $\text{ت}_۲$ وغیرہ عددی سر ہیں جنکو معلوم کرنا ہے۔

$\text{ب}_۲\,\text{ب}_۱^۲$، $\text{ب}_۵\,\text{ب}_۱\,\text{ب}_۲$، $\text{ب}_۵\,\text{ب}_۱^۳$ جیسی رقمیں اگرچہ صحیح وزن کی ہیں مگر انکا رتبہ

(94)

ضرورت سے زیادہ بڑا ہے اور اسلئے ح کے جملہ میں ایسی ارقام داخل نہیں ہوسکتیں۔ نیز اگر ح کو اصلوں کی قوتوں کے مجموعوں کی رقوم میں بیان کیا جائے تو اسکی شکل فا (س$_۲$، س$_۴$، س$_۶$، س$_۸$) ہے کیونکہ بالعموم جب ح $ع_۱^ف ع_۲^ق ع_۳^ر$ .... کو اصلوں کی قوتوں کے مجموعوں کی رقوم میں بیان کیا جاتا ہے تو وہ $س_{ف+ق+ر}$، $س_{ف+ق}$، $س_{ف+ر}$، .....، $س_ف$، $س_ق$، .....

جیسی رقموں سے بنتا ہے جنہیں سے سب کی سب جفت قوتوں کے مجموعے ہیں جبکہ ف، ق، ر، .... جفت ہوں۔ اسلئے اس صورت میں ح کے جملہ میں صرف جفت قوتوں کے مجموعے داخل ہوسکتے ہیں۔

نیز چونکہ $\frac{جف\ ح}{جف\ س_۳} = ۰$ اور $\frac{جف\ ح}{جف\ س_۲} = ۰$ اسلئے $\frac{جف\ فا}{جف\ س_ر}$ کے لئے جو ضابطہ اوپر دیا گیا ہے اسکو استعمال کرنے سے

$ت\, ب_۵ + ت_۱ ب_۴ + ت_۲ ب_۳ + ت_۳ (ب_۲ ب_۱ + ب_۵) + ۲ ت_۴ ب_۱ ب_۴ = ۰$

اور $ت\, ب_۱ + ت_۱ ب = ۰$

ان مساواتوں سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ

$ت + ت_۱ = ۰$، $ت_۲ + ت_۳ = ۰$، $ت_۲ + ت_۴ = ۰$، $ت_۱ + ۲ ت_۴ = ۰$

لیکن $ت_۴ = ۱$ کیونکہ چار رقمی کے لئے $ح = ب_۴^۲$ اسلئے

$ت_۱ = -۲$، $ت = ۲$، $ت_۳ = -۲$، $ت_۲ = ۲$

اور ت، $ت_۱$، $ت_۲$، $ت_۳$، $ت_۴$ کی ان قیمتوں کو درج کرنے سے

$ح\, ع_۱^۲ ع_۲^۲ ع_۳^۲ ع_۴^۲ = ۲ ب\, ب_۸ - ۲ ب_۱ ب_۷ + ۲ ب_۲ ب_۶ - ۲ ب_۳ ب_۵ + ب_۴^۲$

۲۔ اسی مساوات کے لئے $ح\, ع_۱^۲ ع_۲^۲ ع_۳^۲$ کو محسوب کرو۔

جواب:- $-۲ ب_۶ + ۲ ب_۱ ب_۵ - ۲ ب_۲ ب_۴ + ب_۳^۲$، (مقابلہ کرو دفعہ ۲۸ مثال ۶)

۳ — اسی مساوات کیلئے $\Sigma ع_۱^۳ ع_۲^۲ ع_۳$ کی قیمت محسوب کرو۔

یہاں وزن چھ اور رتبہ تین ہے۔ پس

$$\Sigma ع_۱^۳ ع_۲^۲ ع_۳ = ت\, ب_۶ + ت_۱\, ب_۵ ب_۱ + ت_۲\, ب_۴ ب_۲ + ت_۳\, ب_۴ ب_۱^۲$$

$$+ ت_۴\, ب_۳^۲ + ت_۵\, ب_۱ ب_۲ ب_۳ + ت_۶\, ب_۲^۳$$

نیز $س_۱$، $س_۲$، $س_۳$ وغیرہ کی رقوم میں Σ کو بیان کرنے سے (دفعہ)

$$\Sigma ع_۱^۳ ع_۲^۲ ع_۳ = س_۱ س_۲ س_۳ - س_۱ س_۵ - س_۳^۲ - س_۲ س_۴ + ۲ س_۶$$

اب $س_۶$ کے لحاظ سے Σ کی ان دو قیمتوں کو تفرق کرنے اور تفرقی سروں کا مقابلہ کرنے سے

(95)

$$ت \frac{جف\, ب_۶}{جف\, س_۶} = -\frac{ت}{۶} = ۲ \quad \text{یعنے} \quad ت = -۱۲،$$

$س_۵$ کے لحاظ سے تفرق کرنے سے

$$ت\, ب_۱ + ت_۱\, ب_۱ = ۵\, س_۱ = -۵\, ب_۱ \quad \therefore \quad ت_۱ = ۷$$

$س_۴$ کے لحاظ سے تفرق کرنے سے

$$ت\, ب_۲ + ت_۱\, ب_۱^۲ + ت_۲\, ب_۲ + ت_۳\, ب_۱^۲ = ۴\, س_۲ = ۴(ب_۱^۲ - ۲ ب_۲)$$

جس سے $\quad ت + ت_۲ = -۸،\quad ت_۱ + ت_۳ = ۴$

اور اسلئے $\quad ت_۳ = -۳،\quad ت_۲ = ۴$

نیز $ت_۶ = ۰$ کیونکہ Σ معدوم ہوتا ہے جب، (ن-۲) اصلیں معدوم ہوں۔ اور $ت_۴$ اور $ت_۵$ معلوم ہو جاتے ہیں اگر ہم وہ صورت لیں جب، (ن-۳) اصلیں معدوم ہوں کیونکہ اس صورت میں

$$\Sigma ع_۱^۳ ع_۲^۲ ع_۳ = ع_۱ ع_۲ ع_۳ \Sigma ع_۱^۲ ع_۲ = -ب_۳(-ب_۱ ب_۲ + ۳ ب_۳)$$

$$= ب_۱ ب_۲ ب_۳ - ۳ ب_۳^۲$$

اور اسلئے $ت_4 = -3$، $ت_5 = 1$ - اسلئے بالآخر

$$\Sigma\, ع_1^3\, ع_2^2\, ع_3 = -12\, ب_6 + 7\, ب_1\, ب_5 + 4\, ب_2\, ب_4 - 3\, ب_2\, ب_1^2 - 3\, ب_3^2 + ب_1\, ب_2\, ب_3$$

۱۶۲ ـــ کعبی کی اصلوں کے فرقوں کے تفاعل ـ اس دفعہ اور دفعات ذیل میں وہ مسائل بیان کئے گئے ہیں جو کعبی اور چار درجی مساواتوں کی اصلوں کے متشاکل تفاعلوں کی چند مخصوص جماعتوں کو محسوب کرنے میں سب سے زیادہ مفید ہیں ـ یہ مسائل ان تفاعلوں کے متبوع غیر متغیروں اور ہم متغیروں کی تعداد متعین کرنے کے لحاظ سے بھی بڑی اہمیت رکھتے ہیں ـ

مسئلہ ا ـ مساوات

$$ا_0\, لا^3 + 3\, ا_1\, لا^2 + 3\, ا_2\, لا + ا_3 = 0$$

کی اصلوں کا ہر منطق اور صحیح متشاکل تفاعل فہ (عہ، بہ، جہ) جسمیں صرف ان اصلوں کے فرق شامل ہوتے ہیں $ا_0$ سے ضرب کھانے کے بعد شکل فا (ا۰، ھ، ۵) یا گ فا (ا۰، ھ، ۵) میں بیان ہوسکتا ہے بموجب اسکے کہ فہ اصلوں کا جفت یا طاق تفاعل ہے جہاں فا ایک منطق صحیح تفاعل ہے ا۰، ھ، ۵ کا اور ہ رتبہ ہے فہ کا ـ

پہلے حسب ذیل مسئلہ تمہیدیہ ثابت کرنا ضروری ہے:۔ ھ اور ۵ کا

کوئی ایسا تفاعل موجود نہیں ہے جو $ا_۱$ سے تقسیم پذیر ہو۔ کیونکہ اگر کوئی ایسا تفاعل $فا(ھ، \Delta)$ ہوتا تو $ا_۱$ کو معدوم کرنے سے ہمیں ملنا چاہیئے

$$فا(\acute{ھ}، \acute{\Delta}) \equiv ۰، \quad جہاں \quad \acute{ھ} = -ا_۱^۲، \quad \acute{\Delta} = ۴ا_۱^۳ ا_۳ - ۳ا_۱^۲ ا_۲^۲$$

جو ھ اور Δ کی قیمتیں ہیں جب $ا_۰$ معدوم ہو (دفعہ ۴۲)۔ یہ مساوات، صریحاً ناممکن ہے کیونکہ اگر ہم مساوات $\acute{ھ} = -ا_۱^۲$ کی مدد سے $ا_۱$ کو ساقط کریں تو حاصل ہونیوالی مساوات میں $ا_۲$ اور $ا_۳$ شامل ہونگے اور $\acute{ھ}$ اور $\acute{\Delta}$ بھی۔

(96) مسئلہ ا کا ثبوت:۔ فہ چونکہ فرقوں کا تفاعل ہے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ وہ ایسے کیبی سے محسوب کیا گیا ہے جسمیں اسکی دوسری رقم موجود نہیں ہے (دفعہ ۳۶)۔ اس لئے

$$ا_۰^ر \, فہ(عہ، بہ، جہ) = فا(ا_۰، ھ، گ)$$

جس میں فا ایک منطق صحیح تفاعل ہے اور ر کو جو ہ سے کم نہیں ہوسکتا (دفعہ ۸۱) معلوم کرنا باقی ہے۔ بائیں طرف کے تفاعل کو گ کی قوتوں کے لحاظ سے ترتیب دیکر ہم لکھ سکتے ہیں

$$ا_۰^ر \, فہ(عہ، بہ، جہ) = فا_۰(ا_۰، ھ) + گ \, فا_۱(ا_۰، ھ) + گ^۲ \, فا_۲(ا_۰، ھ) + \ldots$$

چونکہ ھ کا وزن جفت ہے اسلئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جب، فہ، اصلوں کا جفت تفاعل ہو (یعنے اسکا وزن جفت ہو) تو وہ سب ارقام جنمیں گ کی طاق قوتیں شامل ہوتی ہیں معدوم ہونی چاہئیں اور جب، فہ، طاق تفاعل ہو تو $فا_۰$ اور وہ سب ارقام جنمیں گ کی جفت قوتیں شامل ہوں معدوم ہونی چاہئیں۔ موخرالذکر صورت میں گ کو جزو ضربی کے طور پر لینے اور ربط

$$گ^۲ + ۴ھ^۳ = ا_۰^۲ \Delta \qquad (دفعہ ۴۲)$$

کے ذریعہ گ کی جفت قوتوں کو ساقط کرنے سے یہ ثابت ہوجاتا ہے
کہ اَر فہ شکل

فا (ا، ھ، ∆) یا گ فا (ا، ھ، ∆)

میں بیان ہوسکتا ہے بموجب اسکے کہ فہ جفت یا طاق ہو۔
اسلئے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اصلوں کے ہر طاق تفاعل میں جو
متذکرہ بالا جماعت سے متعلق ہو یہ جملہ

(۲عہ - بہ - جہ) (۲بہ - جہ - عہ) (۲جہ - عہ - بہ) (مثال ۵، دفعہ ۲۷)

جزو ضربی کے طور پر شریک ہونا چاہئے۔
ہم یہ فرض کرسکتے ہیں کہ یہ جزو ضربی تفاعل فہ سے جدا کردیا گیا ہے
اور اسکے ساتھ ہی مساوات کی دوسری طرف سے سروں کی رقوم
میں اس جزو ضربی کی قیمت نکال دیگئی ہے۔ اب صرف اصلوں کے
جفت تفاعل کی صورت میں ر کی قیمت معلوم کرنا باقی رہ گیا ہے۔
ربط کو شکل

اَر فہ (عہ، بہ، جہ) = فا (ا، ھ، ∆)

میں لکھو۔ بائیں طرف کے تفاعل کو ا کی قوتوں کے لحاظ سے ترتیب دو
اور مساوات کی طرفین کو اَر سے تقسیم کرو تو

اَ فہ (عہ، بہ، جہ) = فا (ا، ھ، ∆) + ع + فا (ھ، ∆) / اَر

جہاں فا ایک صحیح تفاعل ہے ا، ھ، ∆ کا اور ع میں تمام کسری
ارقام شامل ہیں۔ اب چونکہ فہ ایک متشاکل تفاعل ہے جس کا رتبہ (97)
ن ہے اسلئے اَن فہ سروں کے ایک صحیح تفاعل کے طور پر بیان ہوسکتا
ہے۔ اور چونکہ اوپر ثابت کردہ ابتدائی مسئلہ کی رو سے ع میں شامل
ہونیوالی کوئی رقم غیر مکسور صورت میں بیان نہیں ہوسکتی اس لئے کسری
حصہ معدوم ہونا چاہئے اور مساوات شکل

اؑ فہ (عہ، بہ، جہ) = فا (ا، ھ، ∆)

اختیار کرتی ہے۔

اس طرح مسئلہ ثابت ہوگیا۔

۱۶۴ - چار درجی کی اصلوں کے فرقوں کے تفاعل۔

دفعہ گذشتہ کے مسئلہ کے جواب میں چار درجی کے لئے حسب ذیل مسئلہ ہے:

مسئلہ ۲ - مساوات

ا. لا۴ + ۴ ا۱ لا۳ + ۶ ا۲ لا۲ + ۴ ا۳ لا + ا۴ = ۰

کی اصلوں کا ہر منطق اور صحیح متشاکل تفاعل فہ (عہ، بہ، جہ، ضہ) جس میں صرف ان اصلوں کے فرق شامل ہوتے ہیں اؑ سے ضرب کھانے کے بعد شکل فا (ا، ھ، ع، جے) یا اؑک فا (ا، ھ، ع، جے) میں بیان ہو سکتا ہے بموجب اسکے کہ فہ اصلوں کا جفت یا طاق تفاعل ہے جہاں فا ایک منطق صحیح تفاعل ہے ا، ھ، ع، جے کا اور ہ رتبہ ہے فہ کا۔

پہلے حسب ذیل مسئلہ تمہیدیہ کا ثابت کرنا ضروری ہے:

ھ، ع، جے کا کوئی ایسا تفاعل موجود نہیں ہے جو ا سے نقسیم پذیر ہو - کیونکہ اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ ایسا تفاعل فا (ھ، ع، جے) ہے تو ا کو معدوم کرنے سے ہمیں ملنا چاہئے

فا (ھَ، عَ، جےَ) ≡ ۰

جہاں

ھَ ≡ - ا۱۲

عَ = -۴ ا۱ ا۳ + ۳ ا۲^{۲} ،

جَ = ۲ ا۱ ا۲ ا۳ - ا۰ ا۳^{۲} - ا۲^{۳} ،

جو ھ ، ع ، اور ج کی قیمتیں ہیں جب ، ا۱ معدوم ہو۔ لیکن ایسی مساوات متماثلہ کا وجود نہیں ہو سکتا کیونکہ ا۱ ، ا۲ ، ا۳ ، کو اس طور پر ساقط کرنا کہ صرف ھَ ، عَ ، جَ کے درمیان ایک ربط حاصل ہونا ممکن ہے ۔

اب دفعہ ماسبق کے مطابق فہ چونکہ اصلوں کے فرقوں کا تفاعل ہے اسلئے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ وہ ایسی چار درجی مساوات سے محسوب کیا گیا ہے جسمیں اسکی دوسری رقم موجود نہیں ہے (دفعہ ۳۷) پس

ا۰^{ر} فہ (عہ ، بہ ، جہ ، ضہ) = فا (ا۰ ، ھ ، ع ، گ)

جسمیں فا ایک منطق صحیح تفاعل ہے اور ر کو معلوم کرنا باقی ہے ۔ حسب سابق عمل کرنے سے

ا۰^{ر} فہ (عہ ، بہ ، جہ ، ضہ) = فا۰ (ا۰ ، ھ ، ع) + گ فا۱ (ا۰ ، ھ ، ع) + گ^{۲} فا۲ (ا۰ ، ھ ، ع) + ...

(98) چونکہ ھ اور گ دونوں تفاعلوں کی صورت میں وزن جفت ہے اسلئے دفعہ گذشتہ کے مطابق یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ طاق تفاعلوں میں گ ایک جزو ضربی ہے اور ربط

گ^{۲} = ا۰^{۲} (ھ ع - ا۰ ج) - ۴ ھ^{۳} (دفعہ ۳۸)

کے ذریعہ گ کی جفت قوتوں کو ساقط کرنے سے یہ ثابت ہو جاتا ہے کہ ا۰^{ر} فہ بشکل

فا (ا۰ ، ھ ، ع ، ج) یا گ فا (ا۰ ، ھ ، ع ، ج)

میں بیان ہو سکتا ہے بموجب اسکے کہ فہ جفت یا طاق تفاعل ہو۔ اسلئے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اصلوں کے ہر طاق تفاعل میں جو متذکرہ صدر جماعت سے متعلق ہے جملہ

(بہ + جہ − عہ − ضہ) (جہ + عہ − بہ − ضہ) (عہ + بہ − جہ − ضہ)

(مثال ۲۰ دفعہ ۲۷)

جزو ضربی کے طور پر شریک ہونا چاہیئے۔

اس جزو ضربی کو جدا کرکے اب ہم جفت تفاعل کی صورت میں ر کو متعین کرتے ہیں۔ ربط کو اس شکل

ا^ر فہ (عہ، بہ، جہ، ضہ) = فا (ا، ھ، ع، جے)

میں لکھنے اور ا^(ر−۱) سے تقسیم کرنے سے ہمیں حسب دفعہ گزشتہ حاصل ہوتا ہے

ا^ر فہ (عہ، بہ، جہ، ضہ) = فا (ا، ھ، ع، جے) + ع فا۱ (ھ، ع، جے) / ا

اب چونکہ بائیں طرف کا جملہ سروں کا ایک صحیح تفاعل ہونا چاہیئے (دفعہ ۸۱) اور چونکہ ثابت کردہ تمہیدیہ کی رو سے ع میں داخل ہونیوالی کوئی رقم غیر مکسورہ صورت میں بیان نہیں ہو سکتی اسلئے

ا^ر فہ (عہ، بہ، جہ، ضہ) = فا (ا، ھ، ع، جے)

اس طرح مسئلہ ثابت ہو گیا۔

اس باب کے ختم پر ایسی مثالیں ملینگی جنمیں چار درجی کی اصلوں کے متشاکل تفاعلوں کو محسوب کرنے میں اس مسئلہ کے استعمال سے فائدہ اٹھایا جا سکتا ہے۔

۱۶۴ – نیم غیر متغیر اور نیم ہم متغیر۔ فرض کرو کہ ثنائی سروں کے ساتھ لکھی ہوئی عام مساوات

ا لا^ن + ن ا۱ لا^(ن−۱) + (ن (ن−۱) / ۲×۱) ا۲ لا^(ن−۲) + ... + ان = ۰

کی اصلیں عہ۱، عہ۲، عہ۳، ....، عہن ہیں۔ اب ہم لا کے تفاعلوں کی
ایک خاص اور اہم جماعت پر بحث کرینگے جو اصلوں کے ایک دئے ہوئے (۹۹)
متشاکل تفاعل کے ذریعہ اخذ کئے جا سکتے ہیں۔

پہلے دو دفعات میں ہماری توجہ اصلوں کے چند خاص قسم کے متشاکل متجانس تفاعلوں پر رہی ہے جنمیں اصلوں کے صرف فرق شامل ہوتے ہیں (دیکھو دفعہ ۳۶)۔ ایسے تفاعلوں کو ہم "غیر متغیر" کہہ سکتے ہیں جسکی وجہ کسی آئندہ باب میں ملیگی۔ چونکہ یہ اصلوں کے متشاکل تفاعل ہیں اسلئے انکو (جب انکو ا. کی ایک قوت سے ضرب دیا جاتا ہے) سروں کی رقوم میں ایک منطق اور صحیح شکل میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

اسی طرح ہم اصطلاح "نیم متغیر" ایسے تفاعلوں کو تعبیر کرنیکے لئے استعمال کر سکتے ہیں جو مقداروں لا، عہ۱، عہ۲، عہ۳، ...، عہن کے فرقوں سے اس طرح بنتے ہیں کہ جب انکو لا کی قوتوں کے لحاظ سے ترتیب دیا جاتا ہے تو لا کے متواتر سر اسی طرح اصلی سروں کی رقوم میں بیان ہو سکتے ہیں۔

اب ہم یہ بتائینگے کہ نیم متغیر کس طرح پیدا ہوتے ہیں اور انکو لا کی قوتوں کے لحاظ سے کس طرح پھیلایا جا سکتا ہے جبکہ انہیں اصلوں کی رقوم میں یا سروں کی رقوم میں بیان کیا جائے۔

کوئی ربط ذیل کی شکل کا لو

ا.ث فہ (عہ۱، عہ۲، عہ۳، ....، عہن) = فا (ا.، ا۱، ا۲، ...، ان)

جہاں فہ ایک صحیح تفاعل ہے جسکا رتبہ ہ ہے اور فا سروں کی رقوم میں متناظر جملہ ہے۔ تب ہم ہر اصل کو بقدر لا کے گھٹانے اور اسکے جواب میں ہر سر ار کو عر میں بدلنے سے (دیکھو دفعہ ۳۵) حسب ذیل مساوات اخذ کرتے ہیں:-

$$ا_۰ \, فہ(عہ_۱ - لا، عہ_۲ - لا، \ldots، عہ_ن - لا) = فا(ا_۰، ا_۱، ا_۲، \ldots، ا_ن) \quad (۱)$$

اس طرح ہم متغیر کے لئے دو شکلیں حاصل ہوتی ہیں ایک اصلونی رقوم میں بیان کردہ اور دوسری سروں کی رقوم میں ۔
اس مساوات کے پہلے رکن کو ٹیلر کے مسئلہ سے لا کی قوتوں میں پھیلایا جائے تو

(100) $$فہ(عہ_۱ - لا، عہ_۲ - لا، \ldots، عہ_ن - لا) = فہ + لا \, مف \, فہ + \frac{لا^۲}{۱ \times ۲} مف^۲ فہ + \ldots \quad (۲)$$

جہاں $$فہ \equiv فہ(عہ_۱، عہ_۲، \ldots، عہ_ن)$$

اور $$مف \equiv \frac{جف}{جف عہ_۱} + \frac{جف}{جف عہ_۲} + \ldots + \frac{جف}{جف عہ_ن}$$

اب لا کی ایک سے بڑی قوتوں کو نظر انداز کرنے سے دوسرا رکن ہو جاتا ہے

$$فا(ا_۰، ا_۱ + ا_۰ لا، ا_۲ + ۲ ا_۱ لا، \ldots، ا_ن + ن ا_{ن-۱} لا)$$

اور اسکو پھیلایا جائے تو

$$فا(ا_۰، ا_۱ + ا_۰ لا، ا_۲ + ۲ ا_۱ لا، \ldots، ا_ن + ن ا_{ن-۱} لا) = فا + لا \, عف \, فا + \ldots$$

جہاں $$فا \equiv فا(ا_۰، ا_۱، ا_۲، \ldots، ا_ن)$$

اور $$عف \equiv ا_۰ \frac{جف}{جف ا_۱} + ۲ ا_۱ \frac{جف}{جف ا_۲} + ۳ ا_۲ \frac{جف}{جف ا_۳} + \ldots + ن ا_{ن-۱} \frac{جف}{جف ا_ن}$$

دونوں پھیلائی ہوئی شکلوں کا مقابلہ کرنے سے

لا^{ن} مف فہ (عم$_1$، عم$_2$، ....، عم$_ن$) = عف فا (ا$_1$، ا$_2$، ...، ا$_ن$)

اور اسلئے عاملوں مف اور عف کو متواتر استعمال کرنے سے

لا^{ن} مف^{ن} فہ (عم$_1$، عم$_2$، ....، عم$_ن$) = عف^{ن} فا (ا$_1$، ا$_2$، ...، ا$_ن$)

اسلئے پھیلاؤ (۲) سے ہم یہ استنباط کرتے ہیں کہ

فا (ع$_1$، ع$_2$، ....، ع$_ن$) = فا + لا عف فا + $\frac{\text{لا}^2}{2\times 1}$ عف^2 فا + ...

پس اِن دو عاملوں (یعنے سروں کی رقوم میں عف اور اصلوں کی رقوم میں مف) کی مدد سے مساوات (۱) کے کسی طرف کے رکن کو ہم لا کی قوتوں میں پھیلا سکتے ہیں ۔ مف کے متواتر اعمال کے ذریعہ اصلوں کے تفاعلوں کا ایک سلسلہ حاصل ہوتا ہے اور عف کے ذریعہ اِن تفاعلوں کے جواب میں اِنکی قیمتیں سروں کی رقوم میں ملتی ہیں ۔

محصلۂ بالا نتائج اسی طرح درست رہتے ہیں اگر تفاعل فہ میں دو یا دو سے زیادہ مساواتوں کی اصلیں شامل ہوں ۔ ایسی صورت میں فا، اِن مساواتوں کے سروں کی رقوم میں متناظر قیمت کو تعبیر کریگا اور عف اور مف کی بجائے ہر مساوات کے لحاظ سے اسی طرح کے عاملوں کے مجموعے ہونگے ۔

یہ دیکھنا ضروری ہے کہ جب ' مف فہ ' متماثلاً معدوم ہوتا ہے تو (101)

مف (مف فہ) یا مف^2 فہ ≡ ۰، ' مف^3 فہ ≡ ۰، ' وغیرہ

اور اسلئے مساوات (۱) کے پہلے رکن کے پھیلاؤ میں لا معدوم ہوتا ہے اب یہ صرف اُسوقت واقع ہو سکتا ہے جبکہ فہ ' مقداروں

عم$_1$، عم$_2$، ....، عم$_ن$ کے فرقوں کا تفاعل ہو ۔ پس ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ اگر فا (ا$_1$، ا$_2$، ...، ا$_ن$) نیم غیر متغیر ہو تو

$$\text{عف فا}\,(\text{ل}_0, \text{ل}_1, \text{ل}_2, \ldots, \text{ل}_n) \equiv 0 .$$

جب رتبہ اور وزن معلوم ہوں تو نیم غیر متغیروں میں عددی سروں کو متعین کرنیکے لئے اوپر کی متماثلہ مساوات اکثر کافی ہے۔ اگر ایک ہی رتبہ اور وزن کے دو یا دو سے زیادہ نیم غیر متغیر ہوں تو عف کے عمل سے اتنی مساواتیں نہیں ملینگی جتنی تمام مفروضہ سروں کو متعین کرنیکے لیئے کافی ہونی چاہئیں۔ یہ بات دفعہ آئندہ سے واضح ہو جائے گی۔ اگر مطلوبہ رتبہ اور وزن کا کوئی نیم غیر متغیر موجود نہ ہو تو سب کے سب سر معدوم ہو جائینگے۔

۱۶۵ ۔ نیم غیر متغیروں کی تعئین ۔ ایک کثیر رقمی کے دئے ہوئے رتبہ (ہ) اور وزن (کہ) کے نیم غیر متغیر کو معلوم کرنیکا مسئلہ وہی ہے جو تفرقی مساوات

$$\text{عف فما} \equiv \text{ل}_0 \frac{\text{فرفما}}{\text{فرل}_1} + 2\,\text{ل}_1 \frac{\text{فرفما}}{\text{فرل}_2} + \cdots + n\,\text{ل}_{n-1} \frac{\text{فرفما}}{\text{فرل}_n} = 0 \qquad (1)$$

کے ایسے تمام حل متعین کرنیکا ہے۔

اس مساوات کو حل کرنیکے لئے (اگر اسکا حل کرنا ممکن ہو) فرض کرو کہ

$$\text{فما} = \text{لہ}_1\,\text{فہ}_1 + \text{لہ}_2\,\text{فہ}_2 + \cdots + \text{لہ}_r\,\text{فہ}_r \qquad (2)$$

جہاں $\text{ل}_0, \text{ل}_1, \text{ل}_2, \ldots, \text{ل}_n$ کے تمام ممکن اجتماع جن کا رتبہ ہ اور وزن کہ ہے $\text{فہ}_1, \text{فہ}_2, \ldots, \text{فہ}_r$ ہیں اور جہاں $\text{لہ}_1, \text{لہ}_2, \ldots, \text{لہ}_r$ اختیاری اجزائے ضربی ہیں۔

اب فما کی اس قیمت کو مساوات $\text{عف فما} = 0$ میں درج کرنے سے

$$\text{ل}_1\,\text{سا}_1 + \text{ل}_2\,\text{سا}_2 + \cdots + \text{ل}_n\,\text{سا}_n \equiv 0 .$$

حاصل ہوتا ہے جہاں سا$_1$، سا$_2$، سا$_3$، ... ، سا$_ق$ وہ تمام مختلف ارقام ہیں جنکا رتبہ ہ اور وزن کہ-۱ ہے اور جہاں ل$_1$، ل$_2$، ... ل$_ق$، لہ$_1$، لہ$_2$، ... ، لہ$_ر$ کے خطی تفاعل ہیں جنکو معدوم ہو جانا چاہیے اگر فہ$_1$، نیم غیر متغیر ہے —

لہ$_1$، لہ$_2$، ... ، لہ$_ر$ کو متعین کرنیکے لئے حسب ذیل رشتے ہیں :— (102)

ل$_1$ ≡ ل$_{11}$ لہ$_1$ + ل$_{21}$ لہ$_2$ + ... + ل$_{ر1}$ لہ$_ر$ = ۰

ل$_2$ ≡ ل$_{12}$ لہ$_1$ + ل$_{22}$ لہ$_2$ + ... + ل$_{ر2}$ لہ$_ر$ = ۰ ...... (۳)

. . . .

ل$_ق$ ≡ ل$_{1ق}$ لہ$_1$ + ل$_{2ق}$ لہ$_2$ + ... + ل$_{رق}$ لہ$_ر$ = ۰

اب تین مختلف صورتیں ہیں جنپر غور کرنا چاہیے :—

(۱) اگر ر، ق سے بڑا ہو تو مقداروں لہ$_1$، لہ$_2$، لہ$_3$ ... ، لہ$_ر$ کو متعین کرنیکے لئے مساواتوں کی کافی تعداد نہیں ملتی لیکن ان میں سے کسی ق مقداروں کو باقی مقداروں کے خطی تفاعلوں کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے ۔ اس غرض کے لئے ہم ذیل کا عمل کر سکتے ہیں :—

ر-ق ≡ ژ اختیاری اجزائے ضربی بناؤ جنکی تعریف حسب ذیل مساواتوں سے ہوتی ہے :—

م$_{11}$ لہ$_1$ + م$_{21}$ لہ$_2$ + ... + م$_{ر1}$ لہ$_ر$ = ا$_1$

م$_{12}$ لہ$_1$ + م$_{22}$ لہ$_2$ + ... + م$_{ر2}$ لہ$_ر$ = ا$_2$ .... (۴)

. . . .

م$_{1ژ}$ لہ$_1$ + م$_{2ژ}$ لہ$_2$ + ... + م$_{رژ}$ لہ$_ر$ = ا$_ژ$

مساواتوں (۳) اور (۴) کو ل_1، ل_2، ......، $\text{ل}_\text{ر}$ کیلئے حل کرنے اور مساوات (۲) میں درج کرنے سے ہمیں ف کے لئے ذیل کی قیمت ملتی ہے:-

$$\Delta\,\text{ف} = \text{ا}_1\text{ع}_1 + \text{ا}_2\text{ع}_2 + \text{ا}_3\text{ع}_3 + \cdots + \text{ا}_\text{ث}\text{ع}_\text{ث}$$

اور اسلئے $\Delta\,\text{عف}\,\text{ف} = \text{ا}_1\,\text{عف}\,\text{ع}_1 + \text{ا}_2\,\text{عف}\,\text{ع}_2 + \cdots + \text{ا}_\text{ث}\,\text{عف}\,\text{ع}_\text{ث} = 0$

جس سے $\text{عف}\,\text{ع}_1 = 0$، $\text{عف}\,\text{ع}_2 = 0$، ......، $\text{عف}\,\text{ع}_\text{ث} = 0$

کیونکہ ا_1، ا_2، ......، $\text{ا}_\text{ث}$ کوئی قیمتیں اختیار کر سکتے ہیں۔

پس ہم نتیجہ نکالتے ہیں کہ اس صورت میں خطی طور پر غیر تابع نیم غیر متغیروں کی تعداد $\text{ر} - \text{ف} \equiv \text{ث}$ ہے۔

(۲) جب ف، ر کے مساوی یا ر سے بڑا ہوتا ہے تو مساواتیں

$$\text{ل}_1 = 0،\ \text{ل}_2 = 0،\ \ldots،\ \text{ل}_\text{ف} = 0$$

بالعموم پوری نہیں ہو سکتیں اور اسلئے کثیر رقمی کے کوئی ایسے نیم غیر متغیر نہیں ہیں جنکا رتبہ ہ اور وزن کہ ہے۔

(۳) جب ف = ر - ۱ تو ل_1، ل_2، ......، $\text{ل}_\text{ر}$ کو متعین کرنیکے لئے مساواتوں کی تعداد عین کافی ہوتی ہے اور اسلئے صرف ایک نیم غیر متغیر موجود ہوتا ہے۔

(103)

مثالیں

۱۔ کعبی کیلئے وہ نیم غیر متغیر معلوم کرو جسکا رتبہ اور وزن دونوں تین ہیں۔

مان لو

$$\text{ف} = \text{ا}\,\text{ل}_\circ^{2}\,\text{ل}_3 + \text{ب}\,\text{ل}_\circ\,\text{ل}_1\,\text{ل}_2 + \text{ج}\,\text{ل}_1^{3}$$

کیونکہ یہی وہ تین ارقام ہیں جو مطلوبہ شرطوں کو پورا کرتی ہیں۔ عف کی شکل سے یہ ظاہر ہے کہ عمل کی تکمیل ہو جاتی ہے اگر ہم کسی سر $\text{ا}_\text{ر}$ کے لاحقہ پر وہی عمل کریں جو تفرق کے معمولی عمل میں قوت پر کیا جاتا ہے مثلاً عف $\text{ا}_\text{ر} = \text{ر}\,\text{ا}_{\text{ر}-۱}$ اور اسلئے

$$\text{عف فہ} = (۳\,\text{ا} + \text{ب})\,\text{ا}_۰^۲\,\text{ا}_۲ + (۲\,\text{ب} + ۳\,\text{ج})\,\text{ا}_۰\,\text{ا}_۱^۲ \equiv ۰$$

پس $۳\,\text{ا} + \text{ب} = ۰$، اور $۲\,\text{ب} + ۳\,\text{ج} = ۰$۔
اور $\text{ا} = ۱$ رکھنے سے $\text{ب} = -۳$، اور $\text{ج} = ۲$، پس بالآخر

$$\text{فہ} = \text{ا}_۰^۲\,\text{ا}_۳ - ۳\,\text{ا}_۰\,\text{ا}_۱\,\text{ا}_۲ + ۲\,\text{ا}_۱^۳ \equiv \text{گ}$$ ، (دیکھو دفعہ ۳۶)

دو درجی کے لئے کوئی ایسا نیم غیر متغیر نہیں بنایا جا سکتا۔

۲ ـ چار درجی کے وہ نیم غیر متغیر تلاش کرو جنکا رتبہ اور وزن دونوں چار ہیں۔

فرض کرو

$$\text{فہ} = \text{ا}\,\text{ا}_۰^۳\,\text{ا}_۴ + \text{ب}\,\text{ا}_۰^۲\,\text{ا}_۱\,\text{ا}_۳ + \text{ج}\,\text{ا}_۰^۲\,\text{ا}_۲^۲ + \text{د}\,\text{ا}_۰\,\text{ا}_۱^۲\,\text{ا}_۲ + \text{غ}\,\text{ا}_۱^۴$$

تو

$$\text{عف فہ} = (۴\,\text{ا} + \text{ب})\,\text{ا}_۰^۳\,\text{ا}_۳ + (۳\,\text{ب} + ۴\,\text{ج} + ۲\,\text{د})\,\text{ا}_۰^۲\,\text{ا}_۱\,\text{ا}_۲ + (۲\,\text{د} + ۴\,\text{غ})\,\text{ا}_۰\,\text{ا}_۱^۳$$

یہاں ہمیں پانچ مفروضہ سروں کے درمیان صرف تین مساواتیں ملتی ہیں اور اسلئے انکی نسبتیں پوری طرح متعین نہیں ہو سکتیں۔ ب، ج اور د کو ا اور غ کی رقوم میں بیان کرو تو

$$\text{فہ} = \text{ا}\,\text{ا}_۰^۲(\text{ا}_۰\,\text{ا}_۴ - ۴\,\text{ا}_۱\,\text{ا}_۳ + ۳\,\text{ا}_۲^۲) + \text{غ}(\text{ا}_۰^۲\,\text{ا}_۲^۲ - ۲\,\text{ا}_۰\,\text{ا}_۱^۲\,\text{ا}_۲ + \text{ا}_۱^۴)$$

یعنی $\text{فہ} = \text{ا}\,\text{ا}_۰^۲\,\text{ع} + \text{غ}\,\text{ھ}^۲$

جہاں ا اور غ کوئی قیمتیں اختیار کر سکتے ہیں۔ اسلئے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ اس صورت میں مطلوبہ وزن اور رتبہ کے دو بنیادی نیم غیر متغیر ہیں جو ایک دوسرے پر منحصر نہیں ہیں یعنی $\text{ا}_۰^۲\,\text{ع}$ اور $\text{ھ}^۲$۔ ان سے ا اور غ کو مختلف عددی قیمتیں دیکر انہی وزن اور رتبہ کے نیم غیر متغیر تعداد میں لا انتہا معلوم کئے جا سکتے ہیں۔

۳ — کبھی کے لئے وہ نیم غیر متغیر معلوم کرو جسکا رتبہ چار اور وزن چھ ہو۔
فرض کرو

$$فہ = ا\, ا_۰^۲ ا_۳^۲ + ب\, ا_۰ ا_۲^۳ + ج\, ا_۱^۳ ا_۳ + د\, ا_۱^۲ ا_۲^۲ + غ\, ا_۰ ا_۱ ا_۲ ا_۳$$

تو
$$عف\, فہ = (۶\, ا + غ)\, ا_۰^۲ ا_۲ ا_۳ + (۶\, ب + ۳\, غ + ۲\, د)\, ا_۰ ا_۱ ا_۲^۲$$
$$+ (۳\, ج + ۴\, د)\, ا_۱^۳ ا_۲ + (۳\, ج + ۲\, غ)\, ا_۰ ا_۱^۲ ا_۳ \equiv ۰$$

اب فرض کرو کہ $ا = ۱$ تو $غ = -۶$، $ج = ۴$، $د = -۳$ اور $ب = ۴$

پس $$فہ = ا_۰^۲ ا_۳^۲ + ۴\, ا_۰ ا_۲^۳ + ۴\, ا_۱^۳ ا_۳ - ۳\, ا_۱^۲ ا_۲^۲ - ۶\, ا_۰ ا_۱ ا_۲ ا_۳$$ (104)

دفعہ ۲۴ کے ساتھ مقابلہ کرو جہاں فہ کی قیمت اصلوں کی رقوم میں دیگئی ہے۔

۴ — پانچ درجی کا وہ نیم غیر متغیر معلوم کرو جسکا رتبہ تین اور وزن پانچ ہے۔
یہ آسانی کے ساتھ دیکھ لیا جا سکتا ہے کہ مطلوبہ رتبہ اور وزن کی ارقام صرف یہ ہیں $ا_۰^۲ ا_۵$، $ا_۰ ا_۱ ا_۴$، $ا_۰ ا_۲ ا_۳$، اور $ا_۱ ا_۲^۲$، $ا_۱^۲ ا_۳$ حسب سابق عمل کرنے سے مفروضہ سروں کی نسبتیں متعین ہو جاتی ہیں اور نیم غیر متغیر حاصل ہوتا ہے

$$ا_۰^۲ ا_۵ - ۵\, ا_۰ ا_۱ ا_۴ + ۲\, ا_۰ ا_۲ ا_۳ - ۶\, ا_۱ ا_۲^۲ + ۸\, ا_۱^۲ ا_۳$$

۵ — چار درجی کا وہ نیم غیر متغیر معلوم کرو جسکا رتبہ تین اور وزن چھ ہے۔

جواب: — $ا_۰ ا_۲ ا_۴ + ۲\, ا_۱ ا_۲ ا_۳ - ا_۰ ا_۳^۲ - ا_۱^۲ ا_۴ - ا_۲^۳ \equiv جے$

۶ — عام مساوات کیلئے وہ نیم غیر متغیر تلاش کرو جنکا رتبہ تین اور وزن چھ ہے

یہ آسانی کے ساتھ دیکھ لیا جا سکتا ہے کہ ایسے نیم غیر متغیروں میں جو ارقام داخل ہو سکتی ہیں وہ علاوہ ان رقموں کے جو پچھلی مثال میں واقع ہوئی ہیں $ا_۰^۲ ا_۶$ اور $ا_۰ ا_۱ ا_۵$ ہیں۔ اس طرح تفاعل فہ میں صرف سات ارقام مفروضہ سروں کے ساتھ شامل ہوتی ہیں۔ اب عامل عف کو استعمال کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

مفروضہ سروں کے درمیان صرف پانچ مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔ اسلئے ہمیں اس شکل

$$\text{له}\ \text{ا}_{\text{ب}}\,(\text{ا}_{\text{ب}}\text{ا}_{6} - 6\,\text{ا}_{1}\text{ا}_{5} + 15\,\text{ا}_{2}\text{ا}_{4} - 10\,\text{ا}_{3}^{2}) + \text{مه}\ \text{جے}$$

کے نیم غیر متغیر حاصل ہوتے ہیں جس میں له اور مه غیر معین رہ جاتے ہیں۔

پس $\text{ا}_{\text{ب}}(\text{ا}_{\text{ب}}\text{ا}_{6} - 6\,\text{ا}_{1}\text{ا}_{5} + 15\,\text{ا}_{2}\text{ا}_{4} - 10\,\text{ا}_{3}^{2})$ اور جے مطلوبہ نمونہ کے دو بنیادی نیم غیر متغیر ہیں۔

یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ $\text{ا}_{\text{ب}}\text{ا}_{6} - 6\,\text{ا}_{1}\text{ا}_{5} + 15\,\text{ا}_{2}\text{ا}_{4} - 10\,\text{ا}_{3}^{2}$ چھ درجی کا ایک غیر متغیر ہے۔ یہ تفاعل بالراست فوراً معلوم ہو سکتا ہے اگر وہ نیم غیر متغیر معلوم کئے جائیں جنکا رتبہ دو اور وزن چھ ہے۔ غیر متغیر چونکہ نیم غیر متغیروں کی طرح اصلوں کے متشاکل تفاعل ہوتے ہیں جنمیں صرف اصلوں کے فرق شامل ہوتے ہیں اسلئے وہ موجودہ طریقہ سے حاصل کئے جاتے ہیں اور اس طریقہ سے معلوم کیا ہوا سروں کا کوئی تفاعل جو ایک مخصوص رتبہ کے کثیر رقمی کے لئے غیر متغیر ہو تمام اعلیٰ رتبوں (کے کثیر رقمیوں (ثنائی سروں کے ساتھ لکھے ہوئے) کیلئے نیم غیر متغیر ہوگا۔ مثال ۳ میں حاصل کردہ تفاعل کعبی کا ایک غیر متغیر ہے اور جے چار درجی کا ایک غیر متغیر ہے لیکن یہ اچھی طرح ذہن نشین رہے کہ بہت سے نیم غیر متغیر مثلاً وہ جو امثلہ ۱ اور ۴ میں حاصل ہوئے ہیں کسی درجہ کے کثیر رقمی کے لئے غیر متغیر نہیں ہوتے جیسا کہ آئندہ باب میں غیر متغیر کی تعریف اور اسکے خواص سے واضح ہو جائیگا۔

۷ — چار درجی کے لئے وہ غیر متغیر معلوم کرو جنکا رتبہ چار اور وزن چھ ہے

فہ میں علاوہ اُن رقموں کے جو مثال ۳ میں واقع ہوئی ہیں ارقام $\text{ا}_{\text{ب}}^{2}\text{ا}_{2}\text{ا}_{4}$ اور $\text{ا}_{\text{ب}}\text{ا}_{4}\text{ا}_{1}^{2}$ ہیں۔ پس مثال ۳ میں فہ کی جو قیمت ہے اسمیں $\text{له}\ \text{ا}_{\text{ب}}^{2}\text{ا}_{2}\text{ا}_{4} + \text{مه}\ \text{ا}_{\text{ب}}\text{ا}_{4}\text{ا}_{1}^{2}$ کا اضافہ کرو اور عامل عف کا استعمال کرو تو باقی سروں کو له اور ۱ کی رقوم میں بیان کر دینے کے بعد فہ کی حسب ذیل قیمت حاصل ہو گی:—

$$\text{فہ} = \text{لہ}\left(\text{ا}_0^2\,\text{ا}_2\,\text{ا}_4 - \text{ا}_0\,\text{ا}_4\,\text{ا}_1^2 + ۳\,\text{ا}_0\,\text{ا}_2^3 + ۴\,\text{ا}_3\,\text{ا}_1^3 - ۳\,\text{ا}_1^2\,\text{ا}_2^2 - ۴\,\text{ا}_0\,\text{ا}_1\,\text{ا}_2\,\text{ا}_3\right) + \text{ا}\,\Delta_3$$

جہاں Δ_3 وہ تقاعل ہے جو مثال ۳ میں حاصل کیا گیا تھا یعنے کعبی کا ممیز۔

اب چونکہ لہ کے ساتھ کا جزو ضربی ھ اور ع کا حاصل ضرب ہے (105)
اور Δ_4 کی قیمت ھ ع − ا_0 ج ہے (دفعہ ۴۲) اسلئے

$$\text{فہ} = \text{لہ}\ \text{ھ}\ \text{ع} + \text{مہ}\ \text{ا}_0\ \text{ج}$$

پس چار درجی کیلئے مطلوبہ رتبہ اور وزن کے دو بنیادی نیم غیر متغیر ھ ع اور ا_0 ج ہیں۔

۸ — چھٹے اور اعلیٰ رتبوں کے کثیر رقمیوں کے لئے وہ نیم غیر متغیر معلوم کرو جنکا رتبہ چار اور وزن چھہ ہے۔

یہ معلوم ہو گا کہ اس صورت میں مفروضہ سروں کی نسبتوں کو متعین کرنیکے لئے جتنی مساواتوں کی ضرورت ہے ان سے دو مساواتیں کم ملتی ہیں اور اسلئے تین بنیادی نیم غیر متغیر حاصل ہوتے ہیں۔ یہ آسانی کے ساتھ بتایا جا سکتا ہے کہ مطلوبہ نمونہ کے تمام نیم غیر متغیروں کو شکل

$$\text{فہ} = \text{لہ}\ \text{ا}_0^2\left(\text{ا}_0\,\text{ا}_6 - ۶\,\text{ا}_1\,\text{ا}_5 + ۱۵\,\text{ا}_2\,\text{ا}_4 - ۱۰\,\text{ا}_3^2\right) + \text{مہ}\ \text{ھ}\ \text{ع} + \text{نہ}\ \text{ا}_0\ \text{ج}$$

میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

۹ — ثابت کرو کہ مساوات

$$(\text{ا}_0،\ \text{ا}_1،\ \ldots،\ \text{ا}_{\text{ر}})(\text{لا}،\ ۱)^{\text{ر}} = ۰$$

کا کوئی نیم غیر متغیر مساوات

$$(\text{ا}_0،\ \text{ا}_1،\ \ldots،\ \text{ا}_{\text{ن}})(\text{لا}،\ ۱)^{\text{ن}} = ۰$$

کا بھی نیم غیر متغیر ہے جہاں ن > ر۔

۱۰ — چھہ درجی کا وہ نیم غیر متغیر معلوم کرو جسکا رتبہ تین اور وزن آٹھ ہے۔

جواب:- $\text{ا}_0\,\text{ا}_2\,\text{ا}_6 - \text{ا}_0\,\text{ا}_3\,\text{ا}_5 + ۲\,\text{ا}_0\,\text{ا}_4^2 - \text{ا}_1^2\,\text{ا}_6 + ۳\,\text{ا}_1\,\text{ا}_2\,\text{ا}_5 - \text{ا}_1\,\text{ا}_3\,\text{ا}_4 - ۳\,\text{ا}_2^2\,\text{ا}_4 + ۲\,\text{ا}_2\,\text{ا}_3^2$

پروفیسر کیلی (Cayley) نے سب سے پہلے اس اہم مسئلہ کو بیان کیا جو پچھلے دفعہ کا موضوع ہے یعنے رتبہ (ہ) اور وزن (کہ) کے خطی طور پر غیر تابع نیم غیر متغیروں کی تعداد ر - ف ہے جہاں سروں $\text{ا}_{۰}$، $\text{ا}_{۱}$، ..... ان سے جتنی ارقام اس رتبہ اور وزن کی بن سکتی ہیں اُن کی تعداد ر ہے اور انہی سروں سے اسی رتبہ مگر وزن (کہ - ۱) کی جتنی ارقام بن سکتی ہیں اُن کی تعداد ف ہے۔ مندرجۂ بالا بحث میں یہ مان لیا گیا ہے کہ $\text{ل}_{۱}$، $\text{ل}_{۲}$، ..... $\text{ل}_{\text{ف}}$ خطی طور پر غیر تابع ہیں اور یہ بات یاد رکھنی چاہیئے کہ اگر کوئی خطی روابط انکے درمیان ہوں تو ہر ایسے ربط کے جواب میں عدد ف بقدر ایک کے گھٹ جائیگا۔ خود پروفیسر کیلی نے اِن مقداروں کے بالعموم غیر تابع ہونیکا کوئی ثبوت نہیں دیا ہے لیکن سلوسٹر نے (Crelle, جلد ۸۵ صفحہ ۸۹) اور پروفیسر ایلیٹ نے (Algebra of Quantics دفعہ ۱۲۸) ثبوت فراہم کئے ہیں۔ نیز اس کتاب کے ختم پر دیکھو نوٹ (ف)۔

مثالیں (106)

۱۔ بالراست ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\,\text{فا}(\text{ع}_{۰}،\text{ع}_{۱}،\text{ع}_{۲}،\ldots،\text{ع}_{\text{ن}}) = \text{عف}\,\text{فا}(\text{ع}_{۰}،\text{ع}_{۱}،\text{ع}_{۲}،\ldots،\text{ع}_{\text{ن}})$$

مساواتوں

$$\text{عف}\,\text{ع}_{\text{ر}} = \text{ر}\,\text{ع}_{\text{ر}-۱} = \frac{\text{جف}\,\text{ع}_{\text{ر}}}{\text{جف لا}}،\quad \text{عف}\left\{\text{ع}_{\text{ف}}\times\text{ع}_{\text{ق}}\ldots\right\} = \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\left\{\text{ع}_{\text{ف}}\times\text{ع}_{\text{ق}}\ldots\right\}$$

سے یہ فوراً ثابت کیا جا سکتا ہے۔

۲۔ میکلارن کے مسئلہ سے $\text{فا}(\text{ع}_{۰}،\text{ع}_{۱}،\text{ع}_{۲}،\ldots\text{ع}_{\text{ن}})$ کو پھیلاؤ اور اِسکی مدد سے ثابت کرو کہ

$$\text{فا}(\text{ع}_{۰}،\text{ع}_{۱}،\text{ع}_{۲}،\ldots،\text{ع}_{\text{ن}}) = \text{فا} + \text{لا}\,\text{عف}\,\text{فا} + \frac{\text{لا}^{۲}}{۲\times۱}\,\text{عف}^{۲}\,\text{فا} + \ldots\ldots$$

جہاں $\text{فا} \equiv \text{فا}(\text{ا}_0, \text{ا}_1, \text{ا}_2, \ldots, \text{ا}_\text{ن})$

۳ — مساواتوں

$$\text{فہ}_1 + \text{فہ}_2 + \cdots + \text{فہ}_\text{ف} = \text{ت}_0 ،$$

$$\text{فہ}_1\text{طہ}_1 + \text{فہ}_2\text{طہ}_2 + \cdots + \text{فہ}_\text{ف}\text{طہ}_\text{ف} = \text{ت}_1 ،$$

$$\text{فہ}_1\text{طہ}_1^2 + \text{فہ}_2\text{طہ}_2^2 + \cdots + \text{فہ}_\text{ف}\text{طہ}_\text{ف}^2 = \text{ت}_2 ،$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{فہ}_1\text{طہ}_1^{\text{ف}-1} + \text{فہ}_2\text{طہ}_2^{\text{ف}-1} + \cdots + \text{فہ}_\text{ف}\text{طہ}_\text{ف}^{\text{ف}-1} = \text{ت}_{\text{ف}-1} ،$$

سے فہ_1، فہ_2، ....، $\text{فہ}_\text{ر}$، ...، $\text{فہ}_\text{ف}$ معلوم کرو۔

یہ توسیع ہے مثال ۱ صفحہ (۶۰) کی جسکو حل کیا جاچکا ہے۔
وہاں جو طریقہ استعمال کیا گیا ہے اسکو استعمال کرنے سے یہ فوراً معلوم ہو جائیگا کہ مساوات

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{طہ}_\text{ر} & \text{طہ}_\text{ر}^2 & \cdots & \text{طہ}_\text{ر}^{\text{ف}-1} & \text{فہ}_\text{ر} \\ \text{س}_0 & \text{س}_1 & \text{س}_2 & \cdots & \text{س}_{\text{ف}-1} & \text{ت}_0 \\ \text{س}_1 & \text{س}_2 & \text{س}_3 & \cdots & \text{س}_\text{ف} & \text{ت}_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{س}_{\text{ف}-1} & \text{س}_\text{ف} & \text{س}_{\text{ف}+1} & \cdots & \text{س}_{2\text{ف}-2} & \text{ت}_{\text{ف}-1} \end{vmatrix} = 0$$

سے $\text{فہ}_\text{ر}$، $\text{طہ}_\text{ر}$ کے (ف - ۱) ویں درجہ کے تفاعل کے طور پر حاصل ہوتا ہے۔ مساوات بالا میں

$$\text{س}_\text{ک} = \text{طہ}_1^\text{ک} + \text{طہ}_2^\text{ک} + \cdots + \text{طہ}_\text{ف}^\text{ک}$$

۴ ۔ ثابت کرو کہ

$$\Pi \equiv \text{ا}_0^6(\text{بہ}-\text{جہ})^2(\text{جہ}-\text{عہ})^2(\text{عہ}-\text{بہ})^2(\text{عہ}-\text{ضہ})^2(\text{بہ}-\text{ضہ})^2(\text{جہ}-\text{ضہ})^2$$
$$= \text{ل}\,\text{ع}^3 + \text{م}\,\text{جے}^2$$

جہاں $\text{م} = -27\,\text{ل}$ ۔

ہم دفعہ ١٦٣ کے مسئلہ سے استفادہ کرتے ہیں اور اصلوں کے دئے ہوئے تفاعل کو جسکا رتبہ ٦ اور وزن ١٢ ہے ا، ھ، ع، جے کی رقوم میں بیان کرتے ہیں ۔ جدول (107)

	رتبہ	وزن
ھ	٢	٢
ع	٢	۴
جے	٣	٦

سے یہ دیکھنا آسان ہے کہ اصلوں کے دئے ہوئے تفاعل کی قیمت میں ھ داخل نہیں ہو سکتا کیونکہ چھٹے رتبہ کی وہ ارقام جنمیں ھ داخل ہوتا ہے ھ^3، $\text{ھ}^2\,\text{ع}$، $\text{ھ}\,\text{ع}^2$ ہیں اور یہ ارقام مطلوبہ وزن کی نہیں ہیں ۔ پس Π کی شکل $\text{ل}\,\text{ع}^3 + \text{م}\,\text{جے}^2$ ہونی چاہیئے جہاں ل اور م عددی سر ہیں ۔

اب ا_3 اور ا_4 کو صفر کے مساوی رکھو تو Π معدوم ہو جائیگا کیونکہ اس صورت میں چار درجی میں مساوی اصلیں ہونگی ۔ پس ع اور جے کی تحویل شدہ قیمتوں کو استعمال کرنے سے

$$0 = \text{ل}(3\,\text{ا}_2^2)^3 + \text{م}(-\text{ا}_2^3)^2$$ اور اسلئے $\text{م} = -27\,\text{ل}$

متشاکل تفاعلوں کی قیمتیں حاصل کرنے میں یہ طریقہ استعمال کرتے وقت ہر صورت میں حسب ذیل قاعدہ کی پابندی کرنی چاہیئے :- وزن کہ کی وہ رقمیں باقی رکھو جنکا وزن ہ سے بڑا نہ ہو اور ا_0 کی مناسب قوتوں سے ان رقموں کو ضرب دیکر پورے جملہ کو متجانس بناؤ ۔

۵ — چار درجی کی اصلوں کے متشاکل تفاعل

Σ (بہ - جہ)^2 (جہ - عہ)^2 (عہ - بہ)^2

کو محسوب کرو۔

چونکہ اس متشاکل تفاعل کا رتبہ چار اور وزن چھ ہے اسلئے ہم فرض کر سکتے ہیں

ا$_0^4$ Σ (بہ - جہ)^2 (جہ - عہ)^2 (عہ - بہ)^2 = ل ھ ع + م ا$_0$ جے (۱)

پچھلی مثال کی طرح ا$_3$ = ۰، ا$_4$ = ۰ رکھنے سے اور تحویل شدہ متشاکل تفاعل (جبکہ جہ = ۰، ضہ = ۰) کی قیمت کو دو درجی مساوات

ا$_0$ لا^2 + ۴ ا$_1$ لا + ۶ ا$_2$ = ۰

کے سروں کی رقوم میں محسوب کرنے سے ل اور م کی قیمتیں معلوم ہو سکتی ہیں کیونکہ تحویل شدہ متشاکل تفاعل کی اس قیمت کو ل ھ ع + م ا$_0$ جے کی تحویل شدہ قیمت کے مساوی رکھنے سے دو متفرد مساواتیں ملتی ہیں جنسے ل اور م کی تعیین ہو سکتی ہے۔ یا ہم اس طرح عمل کر سکتے ہیں:

دو چار درجی مساواتیں لو جنکی اصلیں معلوم ہوں اور ہر صورت میں اصلوں کو علاً درج کر کے متشاکل تفاعل کی قیمت کو محسوب کرو اور پھر مساوات کی دونوں طرفوں کا مقابلہ کرو جبکہ ھ، ع، جے کی جگہ ان کی وہ قیمتیں ہوں جو عددی سروں سے محسوب کی گئی ہیں۔

پہلے ہم چار درجی مساوات ۶ لا^4 - ۶ لا^2 = ۰ لیتے ہیں جسکی اصلیں ہیں ۰، ۰، ۱، -۱۔ پس

Σ = ۸، ھ = -۶، ع = ۳، جے = ۱

مساوات (۱) میں درج کرنے سے

(108) ۱۷۲۸ = - ۳ ل + م

اسی طرح چار درجی مساوات لا^4 - ۶ لا^2 + ۵ = ۰ پر عمل کرنے سے جسکی اصلیں ± ۱، ± √۵ ہیں ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ

Σ = ۶۸۰، ھ = -۱، ع = ۸، جے = -۴

پس $-۱۹۲ = ۲ل + م$

اور اسلئے $ل = -۲ \times ۱۹۲$ ، $م = ۳ \times ۱۹۲$

اور بالآخر $ا_۰^۶ \Sigma = ۱۹۲(-۲ھ ع + ۳ ا_۰ جے)$

۶ — اگر مساوات

$$ا_۰ لا^۴ + ۴ ا_۱ لا^۳ + ۶ ا_۲ لا^۲ + ۴ ا_۳ لا + ا_۴ = ۰$$

کی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ ہوں تو ا۰، ھ، ع، جے کی رقوم میں متشاکل تفاعل

$$ا_۰^۶ \Sigma (۳عہ - بہ - جہ - ضہ)^۲ (۳بہ - جہ - ضہ - عہ)^۲ (۳جہ - ضہ - عہ - بہ)^۲$$

کی قیمت محسوب کرو۔

اسکو پچھلی دو مثالوں کے طریقہ سے حل کیا جا سکتا ہے یا ہم اس طرح عمل کر سکتے ہیں:۔

$$ا_۰^۶ \Sigma = ۴^۶ \Sigma ی_۱^۲ ی_۲^۲ ی_۳^۲$$

جہاں ی۱، ی۲، ی۳، مساوات

$$ی^۳ + ۶ھ ی^۲ + ۴گ ی + ا_۰^۲ ع - ۳ھ^۲ = ۰ \quad (دفعہ ۲۰)$$

کی اصلیں ہیں۔ پس مثال ۲ دفعہ ۱۶۱ کی رو سے

$$ا_۰^۶ \Sigma = ۴^۶ \{-۷ھ^۳ + ا_۰^۲ ھ ع - ۴ ا_۰^۳ جے\}$$

۷ — اگر مساوات $(ا_۰، ا_۱، ا_۲، \ldots ا_ن)(لا، ۱)^ن = ۰$ کا ایک نیم غیر متغیر فا(ا۰، ا۱، ا۲، ....، ان) ہو تو ثابت کرو کہ اصلوں کی قوتوں کے مجموعوں کا وہی تفاعل یعنے فا(س۰، س۱، س۲، ....، سن) بھی ایک نیم غیر متغیر ہے۔ (مسٹر ایم۔ رابرٹس)۔

پہلے تفاعل پر عف کا اور دوسرے پر مف کا عمل کرو تو چونکہ

$$عف ا_ر = ر ا_{ر-۱} \quad اور \quad مف س_ر = ر س_{ر-۱}$$

اسلئے مطلوبہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے۔ کیونکہ ہمیں شکل میں متماثل نتیجے ملتے ہیں اور ان میں سے اگر ایک متماثلاً معدوم ہو تو دوسرے کو بھی معدوم ہونا چاہئیے۔

۸۔ مقطع

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \text{س}_۰ & \text{س}_۱ & \text{س}_۲ \\ \text{س}_۱ & \text{س}_۲ & \text{س}_۳ \\ \text{س}_۲ & \text{س}_۳ & \text{س}_۴ \end{vmatrix}$$

کو چاردرجی کے سروں کی رقوم میں محسوب کرو۔

پچھلی مثال کی رو سے یہ مقطع اصلوں کے فرقوں کا ایک تفاعل ہے اسلئے اسکو محسوب کرنے سے پیشتر ہم چاردرجی سے اسکی دوسری رقم جدا کرسکتے ہیں۔ فرض کرو کہ استحالہ شدہ مساوات ہے

$$\text{ا}^۴ + \text{پ}_۲\,\text{ا}^۲ + \text{پ}_۳\,\text{ا} + \text{پ}_۴ = ۰$$

تو

$$\Delta = \begin{vmatrix} ۴ & ۰ & -۲\text{پ}_۲ \\ ۰ & -۲\text{پ}_۲ & -۳\text{پ}_۳ \\ -۲\text{پ}_۲ & -۳\text{پ}_۳ & ۲\text{پ}_۲^۲ - ۴\text{پ}_۴ \end{vmatrix} = ۴\left\{۸\text{پ}_۲\text{پ}_۴ - ۲\text{پ}_۲^۳ - ۹\text{پ}_۳^۲\right\}$$

109 لیکن $\text{ا}_۰^۲\text{پ}_۲ = ٦\text{ھ}$، $\text{ا}_۰^۳\text{پ}_۳ = ۴\text{گ}$، $\text{ا}_۰^۴\text{پ}_۴ = \text{ا}_۰^۲\text{ع} - ۳\text{ھ}^۲$

اسلئے $\text{پ}_۲$، $\text{پ}_۳$، $\text{پ}_۴$ کی بجائے یہ قیمتیں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے:

$$\text{ا}_۰^۴\,\Delta = ۱۹۲(-۲\text{ھ}\text{ع} + ۳\text{ا}_۰\text{ج})$$

یہ وہی نتیجہ ہے جو مثال ۵ میں حاصل ہوا (دیکھو مثال ۷، صفحہ ۵٦)

۹۔ اگر مساوات

$$\text{ا}_۰\text{لا}^۴ + ۴\text{ا}_۱\text{لا}^۳ + ٦\text{ا}_۲\text{لا}^۲ + ۴\text{ا}_۳\text{لا} + \text{ا}_۴ = ۰$$

کی اصلیں ع۱، ب، ج، ضہ ہوں تو مساوات

$$\text{س}_{0}\text{لا}^{4}+4\,\text{س}_{1}\text{لا}^{3}+6\,\text{س}_{2}\text{لا}^{2}+4\,\text{س}_{3}\text{لا}+\text{س}_{4}=\Sigma(\text{لا}+\text{ع})^{4}=0$$

کے ھس، عس، جس، گس کو ھ، ع، جے، گ کی رقوم میں بیان کرو۔

جواب:- $\dfrac{\text{ھ}_{\text{س}}}{\text{س}_{0}^{2}}=-3\dfrac{\text{ھ}}{\text{ا}_{0}^{2}}$ ، $\dfrac{\text{ع}_{\text{س}}}{\text{س}_{0}^{2}}=\dfrac{48\,\text{ھ}^{2}-\text{ا}_{0}^{2}\text{ع}}{\text{ا}_{0}^{4}}$ ،

$\dfrac{\text{گ}_{\text{س}}}{\text{س}_{0}^{3}}=-3\dfrac{\text{گ}}{\text{ا}_{0}^{3}}$ اور روابط $\text{گ}^{2}+4\,\text{ھ}^{3}=\text{ا}_{0}^{2}(\text{ھ}\,\text{ع}-\text{ا}_{0}\text{جے})$ ،

$\text{گ}_{\text{س}}^{2}+4\,\text{ھ}_{\text{س}}^{3}=\text{س}_{0}^{2}(\text{ھ}_{\text{س}}\text{ع}_{\text{س}}-\text{س}_{0}\text{ج}_{\text{س}})$ کی مدد سے

$$\text{ج}_{\text{س}}=\frac{192}{\text{ا}_{0}^{4}}(3\,\text{ا}_{0}\text{جے}-2\,\text{ھ}\,\text{ع})$$

۱۰- اگر ف جفت ہو تو ثابت کرو کہ

$$\Sigma(\text{ع}_{1}-\text{ع}_{2})^{\text{ف}}=\text{س}_{0}\text{س}_{\text{ف}}-\text{ف}\,\text{س}_{1}\text{س}_{\text{ف}-1}+\tfrac{1}{2}\text{ف}(\text{ف}-1)\text{س}_{2}\text{س}_{\text{ف}-2}-\dots$$

چونکہ

$$\Sigma(\text{لا}-\text{ع})^{\text{ف}}=\text{ن}\,\text{لا}^{\text{ف}}-\text{ف}\,\text{س}_{1}\text{لا}^{\text{ف}-1}+\frac{\text{ف}(\text{ف}-1)}{2}\text{س}_{2}\text{لا}^{\text{ف}-2}\dots\dots\text{ف}\,\text{س}_{\text{ف}-1}\text{لا}+\text{س}_{\text{ف}}$$

اسلئے لا کو متواتر ع۱، ع۲، ع۳، ....، عن میں بدلنے اور اس طرح حاصل شدہ مساواتوں کی دونوں طرفوں کو جمع کرنے سے ہمیں معلوم ہوتا ہے

$$2\,\Sigma(\text{ع}_{1}-\text{ع}_{2})^{\text{ف}}=\text{س}_{0}\text{س}_{\text{ف}}-\text{ف}\,\text{س}_{1}\text{س}_{\text{ف}-1}+\frac{\text{ف}(\text{ف}-1)}{2\times1}\text{س}_{2}\text{س}_{\text{ف}-2}-\dots$$

$$\dots\dots-\text{ف}\,\text{س}_{1}\text{س}_{\text{ف}-1}+\text{س}_{0}\text{س}_{\text{ف}}$$

جہاں اس مساوات کی بائیں طرف کی سب رقمیں سوائے درمیانی رقم کے تکراربائی ہیں ۔ پس

$$\Sigma(\text{عہ}_1 - \text{عہ}_2)^4 = \text{س}_0\text{س}_4 - 4\text{س}_1\text{س}_3 + 3\text{س}_2^2,$$

$$\Sigma(\text{عہ}_1 - \text{عہ}_2)^6 = \text{س}_0\text{س}_6 - 6\text{س}_1\text{س}_5 + 15\text{س}_2\text{س}_4 - 10\text{س}_3^2, \text{ وغیرہ}$$

۱۱ — وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں $\text{فہ}'(\text{عہ})$، $\text{فہ}'(\text{بہ})$، $\text{فہ}'(\text{جہ})$، $\text{فہ}'(\text{ضہ})$ ہوں جہاں مساوات

$$\text{ا}_0\text{فہ}(\text{لا}) \equiv \text{ا}_0\text{لا}^4 + 4\text{ا}_1\text{لا}^3 + 6\text{ا}_2\text{لا}^2 + 4\text{ا}_3\text{لا} + \text{ا}_4 = 0$$

کی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ ہیں ۔

جواب :- $$\text{فہ}'^4 + \frac{32\,\text{گ}}{\text{ا}_0^2}\text{فہ}'^2 + \frac{192(2\,\text{ھ}\,\text{ع} - 3\,\text{ا}_0\text{جے})}{\text{ا}_0^4}\text{فہ}' + \frac{256(\text{ع}^3 - 27\,\text{جے}^2)}{\text{ا}_0^6} = 0$$

(110) ۱۲ — اگر $\Sigma(\text{عہ} - \text{بہ})^2(\text{بہ} - \text{جہ})^2(\text{جہ} - \text{عہ})^2(\text{لا} - \text{ضہ})^4$ کو پھیلانے سے

$$\text{ک}_0\text{لا}^4 + 4\text{ک}_1\text{لا}^3 + 6\text{ک}_2\text{لا}^2 + 4\text{ک}_3\text{لا} + \text{ک}_4$$

حاصل ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ک}_0\,\text{عہ}\,\text{بہ}\,\text{جہ} + \text{ک}_1(\text{بہ}\,\text{جہ} + \text{جہ}\,\text{عہ} + \text{عہ}\,\text{بہ}) + \text{ک}_2(\text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ}) + \text{ک}_3}{(\text{بہ} - \text{جہ})(\text{جہ} - \text{عہ})(\text{عہ} - \text{بہ})} = \frac{\pm 16\sqrt{\Delta}}{\text{ا}_0^3}$$

جہاں $\Delta = \text{ع}^3 - 27\,\text{جے}^2$

۱۳ — ثابت کرو کہ

$$\text{ا}_0^4\,\Sigma(\text{بہ} + \text{جہ} - \text{عہ} - \text{ضہ})^2(\text{بہ} - \text{جہ})^2(\text{عہ} - \text{ضہ})^2 = 192(3\,\text{ا}_0\text{جے} - 2\,\text{ھ}\,\text{ع})$$

۱۴ـ ثابت کرو کہ

$$\text{ا}^{۶} \equiv (\text{بہ} + \text{جہ} - \text{عہ} - \text{ضہ})^{۴} (\text{بہ} - \text{جہ})^{۲} (\text{عہ} - \text{ضہ})^{۲}$$

$$= ۵۱۲ \left(\text{ا}^{۲}\,\text{ع}^{۲} - ۳۶\,\text{ا}\,\text{ھ}\,\text{ج} + ۱۲\,\text{ھ}^{۲}\,\text{ع}\right)$$

۱۵ـ اگر ایک سادہ متبادل (یعنے وہ جسمیں ہر عنصر کی قوت ایک ہو) کو فرقوں کے حاصل ضرب (دیکھو مثال ۱۳ صفحہ ۹۴) سے تقسیم کیا جائے تو خارج قسمت کو ایک مقطع کی شکل میں بیان کیا جا سکتا ہے جسکے عناصر اسمیں داخل ہونیوالی مقداروں کے متجانس حاصل ضربوں کے مجموعے ہیں۔ ہم تیسرے رتبہ کا ایک مقطع لیتے ہیں اور ثابت کرتے ہیں

$$\begin{vmatrix} \text{عہ}^{\text{ف}} & \text{عہ}^{\text{ق}} & \text{عہ}^{\text{ر}} \\ \text{بہ}^{\text{ف}} & \text{بہ}^{\text{ق}} & \text{بہ}^{\text{ر}} \\ \text{جہ}^{\text{ف}} & \text{جہ}^{\text{ق}} & \text{جہ}^{\text{ر}} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \Pi_{\text{ف}} & \Pi_{\text{ق}} & \Pi_{\text{ر}} \\ \Pi_{\text{ف}-۱} & \Pi_{\text{ق}-۱} & \Pi_{\text{ر}-۱} \\ \Pi_{\text{ف}-۲} & \Pi_{\text{ق}-۲} & \Pi_{\text{ر}-۲} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ۱ & \text{عہ} & \text{عہ}^{۲} \\ ۱ & \text{بہ} & \text{بہ}^{۲} \\ ۱ & \text{جہ} & \text{جہ}^{۲} \end{vmatrix}$$

جہاں $\Pi_{\text{ف}}$، $\Pi_{\text{ق}}$ وغیرہ اصلوں عہ، بہ، جہ کے متجانس حاصل ضربوں کے مجموعے ہیں جیسا کہ دفعہ ۸۳ جلد اول میں تعریف کیگئی تھی۔ طریقہ ذیل بالکل عام ہے۔ حسب ذیل متماثلہ لو جو آسانی کے ساتھ ثابت ہو جاتی ہے:-

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\text{لا}}{\text{لا} - \text{عہ}} & \dfrac{\text{ما}}{\text{ما} - \text{عہ}} & \dfrac{\text{ی}}{\text{ی} - \text{عہ}} \\[2ex] \dfrac{\text{لا}}{\text{لا} - \text{بہ}} & \dfrac{\text{ما}}{\text{ما} - \text{بہ}} & \dfrac{\text{ی}}{\text{ی} - \text{بہ}} \\[2ex] \dfrac{\text{لا}}{\text{لا} - \text{جہ}} & \dfrac{\text{ما}}{\text{ما} - \text{جہ}} & \dfrac{\text{ی}}{\text{ی} - \text{جہ}} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\begin{vmatrix} \text{لا}^{3} & \text{ما}^{3} & \text{ی}^{3} \\ \text{لا}^{2} & \text{ما}^{2} & \text{ی}^{2} \\ \text{لا} & \text{ما} & \text{ی} \end{vmatrix} \; \begin{vmatrix} \text{عہ}^{2} & \text{عہ} & 1 \\ \text{بہ}^{2} & \text{بہ} & 1 \\ \text{جہ}^{2} & \text{جہ} & 1 \end{vmatrix}}{(\text{لا}-\text{عہ})(\text{لا}-\text{بہ})(\text{لا}-\text{جہ})(\text{ما}-\text{عہ})(\text{ما}-\text{بہ})(\text{ما}-\text{جہ})(\text{ی}-\text{عہ})(\text{ی}-\text{بہ})(\text{ی}-\text{جہ})} \equiv$$

بائیں طرف کے پہلے ستون کے ہر عنصر کے نیچے (لا − عہ) (لا − بہ) (لا − جہ) مقسوم علیہ کے طور پر لکھو، دوسرے ستون کے ہر عنصر کے نیچے (ما − عہ) × (ما − بہ) (ما − جہ)، اور تیسرے ستون کے ہر عنصر کے نیچے (ی − عہ) × (ی − بہ) (ی − جہ)۔ پھر حسب ذیل نمونے کی مساواتوں سے (مثال ۱ دفعہ ۸۳) اندراج کرو:—

$$\frac{\text{لا}}{\text{لا}-\text{عہ}} = 1 + \text{عہ}\,\text{لاَ} + \text{عہ}^{2}\,\text{لاَ}^{2} + \dots + \text{عہ}^{\text{ف}}\,\text{لاَ}^{\text{ف}} + \dots ،$$

(111) $$\frac{\text{لا}^{3}}{(\text{لا}-\text{عہ})(\text{لا}-\text{بہ})(\text{لا}-\text{جہ})} = 1 + \pi_{1}\,\text{لاَ} + \pi_{2}\,\text{لاَ}^{2} + \dots + \pi_{\text{ف}}\,\text{لاَ}^{\text{ف}} + \dots ،$$

جہاں $\text{لاَ} = \frac{1}{\text{لا}}$ ، $\text{ماَ} = \frac{1}{\text{ما}}$ ، $\text{یَ} = \frac{1}{\text{ی}}$ ،

تب مندرجۂ بالا متماثلہ ہو جاتی ہے

$$\begin{vmatrix} 1 + \text{عہ}\,\text{لاَ} + \dots + \text{عہ}^{\text{ف}}\,\text{لاَ}^{\text{ف}} + \dots ، & \dots ، & \dots \\ 1 + \text{بہ}\,\text{لاَ} + \dots + \text{بہ}^{\text{ف}}\,\text{لاَ}^{\text{ف}} + \dots ، & \dots ، & \dots \\ 1 + \text{جہ}\,\text{لاَ} + \dots + \text{جہ}^{\text{ف}}\,\text{لاَ}^{\text{ف}} + \dots ، & \dots ، & \dots \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} 1 + \pi_{1}\,\text{لاَ} + \pi_{2}\,\text{لاَ}^{2} + \dots + \pi_{\text{ف}}\,\text{لاَ}^{\text{ف}} + \dots ، & \dots ، & \dots \\ \text{لاَ} + \pi_{1}\,\text{لاَ}^{2} + \dots + \pi_{\text{ف}-1}\,\text{لاَ}^{\text{ف}} + \dots ، & \dots ، & \dots \\ \text{لاَ}^{2} + \dots + \pi_{\text{ف}-2}\,\text{لاَ}^{\text{ف}} + \dots ، & \dots ، & \dots \end{vmatrix} \; \begin{vmatrix} 1 & \text{عہ} & \text{عہ}^{2} \\ 1 & \text{بہ} & \text{بہ}^{2} \\ 1 & \text{جہ} & \text{جہ}^{2} \end{vmatrix}$$

جہاں ان مقطعوں کے دوسرے اور تیسرے ستون، لاَ کی بجائے ماَ اور یَ رکھنے سے مہیا کئے جا سکتے ہیں ـ طرفین میں $\text{لاَ}^{\text{ف}}\ \text{ماَ}^{\text{ق}}\ \text{یَ}^{\text{ر}}$ کے سروں کا مقابلہ کرنے سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہو جاتا ہے ـ یہ یاد رہے کہ جب فرقوں کے حاصل ضرب کا مقطع اوپر کی شکل میں (یعنے ستونون کی ترتیب میں صعودی قوتوں کے ساتھ) لکھا جاتا ہے تو حاصل ضرب کی علامت ہمیشہ مثبت ہوتی ہے کیونکہ اُن دو مقطعوں کے حاصل ضرب میں جنمیں رقم $\Pi_{\text{ف}}\ \Pi_{\text{ق}-1}\ \Pi_{\text{ر}-2}\ \text{ب}\ \text{جہ}^2$ شامل ہے رقم $\text{عہ}^{\text{ف}}\ \text{بہ}^{\text{ق}}\ \text{جہ}^{\text{ر}}$ بھی شامل ہونی چاہئے ـ نیز مخصوص مثالوں میں اس طریقہ کو استعمال کرنے میں یہ ذہن نشین رہے کہ $\Pi_0 = 1$، اور $\Pi_{\text{ز}} = 0$ جبکہ ز منفی ہو ـ

۱۶ ــــ مثال ماسبق کی رو سے ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{عہ}^2 & \text{عہ}^5 \\ 1 & \text{بہ}^2 & \text{بہ}^5 \\ 1 & \text{جہ}^2 & \text{جہ}^5 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \Pi_0 & \Pi_2 & \Pi_5 \\ 0 & \Pi_1 & \Pi_4 \\ 0 & \Pi_0 & \Pi_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \text{عہ} & \text{عہ}^2 \\ 1 & \text{بہ} & \text{بہ}^2 \\ 1 & \text{جہ} & \text{جہ}^2 \end{vmatrix}$$

اسلئے اگر دئے ہوئے مقطع کو فرقوں کے حاصل ضرب سے تقسیم کیا جائے تو خارج قسمت $\Pi_1 \Pi_4 - \Pi_5$ ہے جسکو $\Sigma\, \text{عہ}^3\, \text{ب} + \Sigma\, \text{عہ}^2\, \text{بہ}^2 + 2\, \Sigma\, \text{عہ}^2\, \text{ب}\, \text{جہ}$ کے مساوی ثابت کیا جا سکتا ہے ـ

۱۷ ــــ مثال ۱۵ کے طریقہ سے ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{عہ}_1 & \text{عہ}_1^2 & \ldots & \text{عہ}_1^{\text{ن}-2} & \text{عہ}_1^{\text{م}} \\ 1 & \text{عہ}_2 & \text{عہ}_2^2 & \ldots & \text{عہ}_2^{\text{ن}-2} & \text{عہ}_2^{\text{م}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \text{عہ}_{\text{ن}} & \text{عہ}_{\text{ن}}^2 & \ldots & \text{عہ}_{\text{ن}}^{\text{ن}-2} & \text{عہ}_{\text{ن}}^{\text{م}} \end{vmatrix} \equiv \Pi_{\text{م}-\text{ن}+1} \begin{vmatrix} 1 & \text{عہ}_1 & \text{عہ}_1^2 & \ldots & \text{عہ}_1^{\text{ن}-1} \\ 1 & \text{عہ}_2 & \text{عہ}_2^2 & \ldots & \text{عہ}_2^{\text{ن}-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \text{عہ}_{\text{ن}} & \text{عہ}_{\text{ن}}^2 & \ldots & \text{عہ}_{\text{ن}}^{\text{ن}-1} \end{vmatrix}$$

جہاں $\text{م} = \text{یا} > \text{ن}$ ـ

اس نتیجہ کو بالراست مثال ۱ دفعہ ۸۳ سے اخذ کیا جا سکتا ہے ـ

(112)

سولھواں باب

ہم متغیر اور غیر متغیر

۱۶۶ — تعریف ۔ اس باب میں اور آئندہ ابواب میں ترقیم

$$(\text{ا}_0،\ \text{ا}_1،\ \text{ا}_2،\ \ldots،\ \text{ا}_\text{ن})(\text{لا}،\ \text{ما})^\text{ن}$$

کثیر رقمی

$$\text{ا}_0\,\text{لا}^\text{ن} + \text{ن}\,\text{ا}_1\,\text{لا}^{\text{ن}-1}\,\text{ما} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2}\,\text{ا}_2\,\text{لا}^{\text{ن}-2}\,\text{ما}^2 + \ldots + \text{ن}\,\text{ا}_{\text{ن}-1}\,\text{لا}\,\text{ما}^{\text{ن}-1} + \text{ا}_\text{ن}\,\text{ما}^\text{ن}$$

کو تعبیر کرنیکے لئے استعمال کیجائیگی ۔ یہ کثیر رقمی لا اور ما میں متجانس تفاعل ہے اور اسکے سر ثنائی سرہیں ۔ اگر ہم ما = ۱ رکھیں تو یہ کثیر رقمی دفعہ ۳۵ کا $\text{ع}_\text{ن}$ ہوجاتا ہے ۔ یہی ترقیم لا اور ما کے مندرجۂ بالا متجانس تفاعل کو تعبیر کرنیمیں استعمال کیجا سکتی ہے ۔

فرض کرو کہ مساوات $\text{ع}_\text{ن} \equiv (\text{ا}_0،\ \text{ا}_1،\ \text{ا}_2،\ \ldots،\ \text{ا}_\text{ن})(\text{لا}،\ 1)^\text{ن} = 0$ کی اصلوں $\text{عہ}_1،\ \text{عہ}_2،\ \ldots،\ \text{عہ}_\text{ن}$ کا ایک نیم غیر متغیر فہ (پچھلے دفعہ کی تعریف کے بموجب) ہے جسکا رتبہ ھ ہے ۔ تب اگر $\text{عہ}_1،\ \text{عہ}_2،\ \ldots،\ \text{عہ}_\text{ن}$ کی بجائے

$$\frac{1}{\text{عہ}_1-\text{لا}}،\ \frac{1}{\text{عہ}_2-\text{لا}}،\ \ldots،\ \frac{1}{\text{عہ}_\text{ن}-\text{لا}}$$

علی الترتیب درج کئے جائیں تو نتیجہ کو (عٌن سے ضرب دینے کے بعد تاکہ کسریں دور ہو جائیں) ہم عن کا ہم متغیر کہینگے اگر اس میں لا موجود ہو اور غیر متغیر اگر اس میں لا موجود نہ ہو۔

غیر متغیر کی اس تعریف سے ہم فوراً یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ

آِ فہ (ع۱، ع۲، ع۳، ....، عن)

عن کا ایک غیر متغیر ہے جبکہ فہ ایک ہی نمونہ کی رقموں سے ترکیب پاتا ہے اور ان میں سے ہر رقم میں تمام اصلیں موجود ہوتی ہیں اور اصل کا درجہ وہی ھ ہوتا ہے۔

ان تعریفوں کا اطلاق اُس صورت پر بھی ہو سکتا ہے جبکہ فہ میں (113)
(جو فرقوں کا تفاعل ہے) متعدد مساواتوں عن = ۰، عق = ۰، عر = ۰ وغیرہ کی اصلیں علی الترتیب رتبوں ھ، ھَ، ھً وغیرہ میں متشاکلاً داخل ہوں۔ حسب سابق ہم اصل ع کی بجائے ۱/(ع - لا) درج کر سکتے ہیں اور عنٌ عقً عرً ..... سے ضرب دیکر کسریں دور کر سکتے ہیں۔ اگر نتیجہ میں متغیر لا رہ جائے تو کثیر رقمیوں عن، عق، عر وغیرہ کے نظام کا ایک ہم متغیر حاصل ہوگا اور اگر متغیر لا موجود نہ ہو تو نظام کا ایک غیر متغیر فہ ہوگا۔

۱۶۷ ۔ ہم متغیروں اور غیر متغیروں کی ساخت ۔ اب ہم یہ بتائینگے کہ کس طرح پچھلے باب کے استحالات کو آسانی کے ساتھ عمل میں لایا جا سکتا ہے اور کس طرح سروں کی رقوم میں ہم متغیروں اور غیر متغیروں کو محسوب کیا جا سکتا ہے۔ اس مقصد کے لئے فرض کرو کہ نیم غیر متغیر کو سروں کی رقوم میں حسب شکل ذیل بیان کیا گیا ہے:۔

اٹ فہ (عہ١، عہ٢، ... ، عہن) = فا (ا١، ا١، ا٢، ... ، ان)

اب اصلوں کو اِنکے متکافیوں میں بدلنے سے اور اسلئے ا١ کو ان میں، ا١ کو ان-١ میں، ... ، ان کو ا١ میں، ... بدلنے سے (یعنی لاحقوں کو اِنکی متمم قیمتیں دینے سے) ہمیں حاصل ہوتا ہے

اٹ سا (عہ١، عہ٢، ... ، عہن) = فا (ان، ان-١، ... ، ا١)

جہاں سا، اصلوں کا ایک صحیح متشاکل تفاعل ہے اور فا، سروں کی رقوم میں متناظر قیمت ہے۔ اس تفاعل کو ہم متغیر کا (جو اس سے اخذ کیا گیا ہو) ماخذ* کہتے ہیں۔

پھر اصلوں عہ١، عہ٢، ... ، عہن کی بجائے عہ١-لا، عہ٢-لا، ... عہن-لا درج کرو اور اسلئے ا١ وغیرہ کی بجائے ع١ وغیرہ (دفعہ ۳۵) تو

اٹ سا (عہ١-لا، عہ٢-لا، ... ، عہن-لا) = فا (عن، عن-١، ... ، ع١)

اس طرح ہم فرقوں کے تفاعل سے آسانی کے ساتھ ہم متغیر اخذ کر لیتے ہیں اور ساتھ ہی سروں کی رقوم میں اسکا معادل معلوم کر لیتے ہیں طریق عمل کو واضح کرنے کے لئے ہم کعبی کی صورت میں ذیل کی مثال لیتے ہیں:-

ا٢ Σ (عہ - بہ)٢ = ١٨ (ا١٢ - ا ا٢)

اصلوں کو انکے متکافیوں میں اور ا، ا١، ا٢، ا٣ کو ا٣، ا٢، ا١، ا میں بدلنے سے (114)

* اس اصطلاح 'ماخذ' (Source) کو ایم۔ رابرٹس نے جاری کیا۔

$$\text{اِ}^2 \sum \text{عہ}^2 (\text{بہ} - \text{جہ})^2 = 18 (\text{اِ}_2^2 - \text{اِ}_3 \text{اِ}_1)$$

پھر عہ، بہ، جہ، کو عہ - لا، بہ - لا، جہ - لا میں اور اِ، اِ_1، اِ_2، اِ_3 کو ع_1، ع_2، ع_3 میں بدلنے سے

$$\text{اِ}^2 \sum (\text{بہ} - \text{جہ})^2 (\text{لا} - \text{عہ})^2 = 18 (\text{ع}_2^2 - \text{ع}_3 \text{ع}_1)$$

اس مساوات کے دوسرے رکن کو پھیلانے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ع}_1 \text{ع}_3 - \text{ع}_2^2 \equiv (\text{اِ} \text{اِ}_2 - \text{اِ}_1^2) \text{لا}^2 + (\text{اِ} \text{اِ}_3 - \text{اِ}_1 \text{اِ}_2) \text{لا} + (\text{اِ}_1 \text{اِ}_3 - \text{اِ}_2^2)$$

اس ہم متغیر کو ع_3 کا "ہیسین" (Hessian) کہتے ہیں۔ ہم اسکو ھ لا سے تعبیر کرینگے کیونکہ اس کا صدر سر $(\text{اِ} \text{اِ}_2 - \text{اِ}_1^2)$ = ھ ہے

دوسری مثال کے طور پر ہم چار درجی کا ذیل کا تفاعل لیتے ہیں:-

$$\text{اِ}^2 \sum (\text{بہ} - \text{جہ})^2 (\text{عہ} - \text{ضہ})^2 = 24 (\text{اِ} \text{اِ}_4 - 4 \text{اِ}_1 \text{اِ}_3 + 3 \text{اِ}_2^2) \qquad (1)$$

اصلوں کو انکے متکافیوں میں اور اِ، اِ_1، اِ_2، اِ_3، اِ_4 کو اِ_4، اِ_3، اِ_2، اِ_1، اِ میں بدلنے سے

$$\text{اِ}_4^2 \sum (\text{جہ} - \text{بہ})^2 (\text{ضہ} - \text{عہ})^2 = 24 (\text{اِ}_4 \text{اِ} - 4 \text{اِ}_3 \text{اِ}_1 + 3 \text{اِ}_2^2)$$

اس لئے ان تبدیلیوں سے مساوات (۱) میں کوئی فرق نہیں آتا۔ پھر چونکہ اس صورت میں سا (عہ، بہ، جہ، ضہ) اصلوں کے فرقوں کا تفاعل ہے اس لئے سا نہیں بدلتا جبکہ عہ، بہ، جہ، ضہ کی بجائے عہ - لا، بہ - لا، وغیرہ درج کئے جاتے ہیں۔ اس لئے ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ ع_4 کا غیر متغیر $\text{اِ} \text{اِ}_4 - 4 \text{اِ}_1 \text{اِ}_3 + 3 \text{اِ}_2^2$ ہے۔ نیز دفعہ ۱۶۶ میں جو بات بیان کی گئی تھی اس کے بموجب ہم دیکھتے

ہیں کہ چونکہ

فہ ≡ (بہ - جہ)^{2}(عہ - ضہ)^{2} + (جہ - عہ)^{2}(بہ - ضہ)^{2} + (عہ - بہ)^{2}(جہ - ضہ)^{2}

اسلئے فہ کی تینوں رقموں میں سے ہر رقم میں ہر اصل کا درجہ ھہ ہے جو یہاں ٢ کے مساوی ہے۔

اسی طرح یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ چار درجی کا ایک غیر متغیر یہ بھی ہے:-

ا$_{0}^{3}$ {(جہ - عہ)(بہ - ضہ) - (عہ - بہ)(جہ - ضہ)} {(عہ - بہ)(جہ - ضہ)

- (بہ - جہ)(عہ - ضہ)} × {(بہ - جہ)(عہ - ضہ) - (جہ - عہ)(بہ - ضہ)}

= - ۴٣٢ (ا$_{0}$ ا$_{2}$ ا$_{4}$ + ٢ ا$_{1}$ ا$_{2}$ ا$_{3}$ - ا$_{0}$ ا$_{3}^{2}$ - ا$_{1}^{2}$ ا$_{4}$ - ا$_{2}^{3}$)

کسی مخصوص صورت میں یہ معلوم کر لینا کوئی مشکل کام نہیں کہ آیا فہ (115) سے ایک غیر متغیر حاصل ہوگا یا ہم متغیر۔ کیونکہ اگر فہ سے ایک غیر متغیر حاصل ہوتا ہے تو فہ = ± ںسا یعنے فہ نہیں بدلتا (سوائے علامت میں اور یہ اسوقت جبکہ اسکے نمونہ کی رقم اصلوں کے فرقوں کی ایک طاق تعداد کا حاصل ضرب ہو یعنی جبکہ اسکا وزن طاق ہو) اگر اصلوں کی بجائے انکے متکافی درج کئے جائیں اور سادہ ترین ضارب (عہ$_{1}$ عہ$_{2}$ عہ$_{3}$ . . . عہ$_{ن}$)^{ھہ} سے ضرب دیکر کسریں دور کی جائیں۔ وہ غیر متغیر جسکا وزن طاق ہو معوج غیر متغیر کہلاتا ہے۔

١٦٨ - ہم متغیروں اور غیر متغیروں کے خواص۔ فہ چونکہ اصلوں کا ایک متجانس تفاعل ہوتا ہے اسلئے اس سے اخذ کردہ ہم متغیر کو شکل

$\frac{\text{لا}^{عش}}{\text{لا}^{کہ}}$ فہ ($\frac{\text{لا}}{\text{عہ}_{1} - \text{لا}}$ ، $\frac{\text{لا}}{\text{عہ}_{2} - \text{لا}}$ ، . . . ، $\frac{\text{لا}}{\text{عہ}_{ن} - \text{لا}}$)

میں لکھا جا سکتا ہے جہاں فہ کا رتبہ ھ اور وزن کہ ہے۔

نیز فہ چونکہ فرقوں کا ایک تفاعل ہوتا ہے اسلئے ہم ہر جزو ترکیبی میں ایک جمع کر سکتے ہیں مثلاً ہم $\frac{لا}{عہ_ر - لا}$ میں ایک جمع کرکے $\frac{عہ_ر}{عہ_ر - لا}$ حاصل کر سکتے ہیں۔ پھر ہر عنصر کو لا سے ضرب دینے سے ہم متغیر ہو جاتا ہے

$$\frac{ع^{ھ}}{لا^{ھ کہ}} فہ \left(\frac{عہ_1 لا}{عہ_1 - لا}، \frac{عہ_2 لا}{عہ_2 - لا}، \ldots، \frac{عہ_ن لا}{عہ_ن - لا}\right)$$

اب لا، عہ$_1$، عہ$_2$، ... کے متکافیوں کے لئے ترقیم لاَ، عہَ$_1$، عہَ$_2$، .... استعمال کرو اور فرض کرو کہ عَ وہ تفاعل ہے جسکی اصلیں عہَ$_1$، عہَ$_2$، عہَ$_3$، ....، عہَ$_ن$ ہیں یعنی

$$عَ \equiv ا_ن لاَ^{ن} + ن ا_{ن-1} لاَ^{ن-1} + \ldots + ن ا_1 لاَ + ا_0 = 0$$

تو چونکہ

$$\frac{1}{عہَ_ر - لاَ} = \frac{-عہ_ر لا}{عہ_ر - لا}$$

اور $عَ = ا_ن لا^{ن} (لاَ - عہَ_1)(لاَ - عہَ_2)\ldots(لاَ - عہَ_ن) = لا^{ن} عَ$

اسلئے مندرجۂ بالا ہم متغیر آسانی کے ساتھ اس شکل

$$(-1)^{کہ} لا^{ن ھ - 2 کہ} عَ^{ھ} فہ \left(\frac{1}{عہَ_1 - لاَ}، \frac{1}{عہَ_2 - لاَ}، \ldots، \frac{1}{عہَ_ن - لاَ}\right)$$

میں تحویل ہو جاتا ہے۔ پس یہ ثابت ہو گیا کہ ہم متغیر نہیں بدلتا جبکہ لا، عہ$_1$، ... عہ$_ن$ کی بجائے انکے متکافی درج کئے جاتے ہیں اور نتیجہ کو $(-1)^{کہ} لاَ^{ن ھ - 2 کہ}$

سے ضرب دیا جاتا ہے ۔ یہ استحالہ اَر کو اَن۔ر میں بدلدیتا ہے یعنے ہر سر کا لاحقہ اپنے متمم میں بدل جاتا ہے ۔

اب اگر ہم کسی ہم متغیر کو جسکا درجہ م ہے شکل

$$(\text{ب}_\text{.}، \text{ب}_\text{۱}، \text{ب}_\text{۲}، \ldots، \text{ب}_\text{م})(\text{لا}، \text{۱})^{\text{م}} \quad \ldots\ldots (\text{۱})$$

میں لکھیں تو $\text{ا}_\text{.}، \text{ا}_\text{۱}، \ldots، \text{ا}_\text{ن}$، لا کو $\text{ا}_\text{ن}، \text{ا}_{\text{ن-۱}}، \ldots، \text{ا}_\text{.}$، $\frac{\text{۱}}{\text{لا}}$ میں بدلنے سے اس ہم متغیر کی دوسری شکل حاصل ہوتی ہے یعنے شکل ذیل

$$(-\text{۱})^{\text{ک}}\, \text{لا}^{\text{ن ھ} - \text{۲ک}} (\text{ج}_\text{.}، \text{ج}_\text{۱}، \text{ج}_\text{۲}، \ldots، \text{ج}_\text{م})(\tfrac{\text{۱}}{\text{لا}}، \text{۱})^{\text{م}}$$

یہ شکل چونکہ (۱) جیسے نمونہ کا لا کا ایک صحیح تفاعل ہے اس لئے دونوں شکلوں کا مقابلہ کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{م} = \text{ن ھ} - \text{۲ک}،\quad \text{ب}_\text{.} = (-\text{۱})^{\text{ک}} \text{ج}_\text{م}، \ldots، \text{ب}_\text{ر} = (-\text{۱})^{\text{ک}} \text{ج}_{\text{م-ر}}$$

اس طرح ہم متغیر کا درجہ تفاعل فہ کے وزن اور رتبہ کی رقوم میں متعین ہو جاتا ہے اور یہ معلوم ہوتا ہے کہ مزدوج سر (یعنے وہ سر جو تفاعل کے ابتدائی اور آخری رقموں سے متساوی الفصل ہوتے ہیں) حسب ذیل طریقہ پر مربوط ہیں :-

اگر ہم متغیر کا کوئی سر فا $(\text{ا}_\text{.}، \text{ا}_\text{۱}، \text{ا}_\text{۲}، \ldots، \text{ا}_\text{ن})$ ہو تو اسکا مزدوج $(-\text{۱})^{\text{ک}}$ فا $(\text{ا}_\text{ن}، \text{ا}_{\text{ن-۱}}، \ldots، \text{ا}_\text{.})$ ہے ۔

یہ خاصیت ہم متغیروں کے ساتھ مخصوص ہے اور نیم ہم متغیروں میں نہیں پائی جاتی اگرچہ عامل عف سے دونوں قسم کے تفاعلوں کو

بنانے کا طریقہ ایک ہی ہے جیسا کہ دفعہ آئندہ سے معلوم ہوگا۔
ہم متغیر کے درجہ کے لئے ھ اور کہ کی رقوم میں جو جملہ اوپر حاصل ہوا ہے اُس سے یعنی ن ھ - ۲ کہ سے حسب ذیل اہم نتیجے اخذ کئے جا سکتے ہیں:-

(۱) اگر اً فہ ایک غیر متغیر ہے تو ن ھ = ۲ کہ

کیونکہ اِس صورت میں فہ اور سا ایک ہی تفاعل ہیں اور اسلئے اِن کے اوزان کہ اور ن ھ - کہ مساوی ہیں۔

(۲) طاق درجوں کے کثیر رقمیوں کے تمام غیر متغیر جفت رتبہ کے ہوتے ہیں۔

کیونکہ اگر ن طاق ہو تو مساوات ن ھ = ۲ کہ سے ظاہر ہے کہ ھ جفت ہونا چاہیئے اور کہ، ن کا ضِعف۔

(۳) جفت درجوں کے کثیر رقمیوں کے تمام ہم متغیر (117)
جفت درجہ کے ہوتے ہیں۔

کیونکہ اس صورت میں ن ھ - ۲ کہ جفت ہے۔

(۴) طاق درجوں کے کثیر رقمیوں کے ہم متغیر جفت یا طاق درجہ کے ہوتے ہیں بموجب اسکے کہ اِنکے سروں کا رتبہ جفت یا طاق ہو۔

(۵) دو ہم متغیروں کا حاصل ہمیشہ ابتدائی کثیر رقمی کے سروں میں جفت رتبہ کا ہوتا ہے۔

کیونکہ حاصل کا رتبہ ہم متغیروں کے رتبوں اور اوزان کی رقوم میں

حسب ذیل ہے:۔

$$\text{ه}(\text{ن}\,\text{هَ} - ۲\,\text{کَ}) + \text{هَ}(\text{ن}\,\text{ه} - ۲\,\text{ک}) \equiv ۲(\text{ن}\,\text{ه}\,\text{هَ} - \text{ه}\,\text{کَ} - \text{هَ}\,\text{ک})$$

۱۶۹ ۔ عامل عف کے ذریعہ سے ہم متغیروں کی ساخت

دفعہ ۱۶۴ سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ $\text{فا}(\text{ع}_{\text{ن}}، \text{ع}_{\text{ن}-۱}، \ldots، \text{ع}_۰)$ کا پھیلاؤ تفرقی احصاء کے ذریعہ شکل

$$\text{فا}_۰ + \text{لا}\,\text{عف}\,\text{فا}_۰ + \frac{\text{لا}^۲}{۲\times۱}\,\text{عف}^۲\,\text{فا}_۰ + \ldots + \frac{\text{لا}^{\text{ر}}}{\text{ر}\times\ldots\times۳\times۲\times۱}\,\text{عف}^{\text{ر}}\,\text{فا}_۰ + \ldots$$

میں بیان کیا جاسکتا ہے جہاں $\text{فا}(\text{ع}_{\text{ن}}، \text{ع}_{\text{ن}-۱}، \ldots، \text{ع}_۰)$ میں $\text{لا} = ۰$ رکھنے سے $\text{فا}_۰$ حاصل ہوتا ہے یعنے

$$\text{فا}_۰ = \text{فا}(\text{ل}_{\text{ن}}، \text{ل}_{\text{ن}-۱}، \ldots، \text{ل}_۰)$$

اور

$$\text{عف} \equiv \text{ل}_۰\frac{\text{جف}}{\text{جف}\,\text{ل}_۱} + ۲\,\text{ل}_۱\frac{\text{جف}}{\text{جف}\,\text{ل}_۲} + ۳\,\text{ل}_۲\frac{\text{جف}}{\text{جف}\,\text{ل}_۳} + \ldots + \text{ن}\,\text{ل}_{\text{ن}-۱}\frac{\text{جف}}{\text{جف}\,\text{ل}_{\text{ن}}}$$

اس طریقہ سے ہم تغیر بنانے میں ماخذ فا جس سے ہم نے ابتدا کی ہے عف کے متواتر اعمال سے بدل جاتا ہے چنانچہ ہر عمل وزن کو بقدر ایک کے گھٹا دیتا ہے یہاں تک کہ ہم اصلی تفاعل $\text{فا}(\text{ل}_۰، \text{ل}_۱، \ldots، \text{ل}_{\text{ن}})$ پر پہنچتے ہیں جس سے ماخذ بنایا گیا تھا۔ چونکہ یہ فرقوں کا تفاعل ہے اس لئے وہ جملہ جو عف کے دوبارہ عمل سے حاصل ہوتا ہے معدوم ہو جاتا ہے اور ہم متغیر مکمل طور پر حاصل ہوتا ہے۔ عف کے اعمال کے جواب میں متشاکل تفاعل سا پر مف کے اعمال کا یہ اثر ہوگا کہ ہر قدم پر اصلوں کا درجہ بقدر

ایک کے گھٹ جائیگا اور آخری متشاکل تفاعل میں صرف اصلوں کے فرق شامل ہونگے۔ اس طرح متواتر اعمال سے ایک ہم متغیر کیلئے ہمیں دو جملے ملینگے، ایک اصلوں کی رقوم میں اور دوسرا سروں کی رقوم میں۔

یہ ظاہر ہے کہ ہم متغیر کا درجہ م، اُن اعمال مف کی تعداد (118)
کے مساوی ہوتا ہے جو سا کو فہ میں تحویل کرنے میں کرنے پڑتے ہیں یعنے ہم متغیر کا درجہ م ابتدائی اور آخری سروں کے اوزان کے فرق کے مساوی ہوتا ہے۔ نیز چونکہ

$$\text{سا} = (\text{ع}_1 \text{ع}_2 \ldots \text{ع}_{\text{ن}})^{\text{ھ}}\, \text{فہ}\left(\frac{1}{\text{ع}_1}, \frac{1}{\text{ع}_2}, \ldots, \frac{1}{\text{ع}_{\text{ن}}}\right)$$

اسلئے سا کا وزن ن ھ - کہ ہے جہاں فہ $(\text{ع}_1, \text{ع}_2, \ldots, \text{ع}_{\text{ن}})$ کا وزن کہ ہے۔ پس ہم متغیر جسکا صدر سر $\text{ا}_0^{\text{ھ}}$ فہ ہے درجہ ن ھ - ۲ کہ کا ہے اور یہ وہی قیمت ہے جو پہلے حاصل ہوئی تھی۔

اس طریقہ کی وضاحت کے لئے ہم چند سادہ مثالیں دیتے ہیں۔

امثلہ

۱۔ کعبی

$$\text{ا}_0 \text{لا}^3 + 3\text{ا}_1 \text{لا}^2 + 3\text{ا}_2 \text{لا} + \text{ا}_3 = 0$$

کا (ہیسوی) بناؤ۔

تفاعل $\text{ھ} \equiv \text{ا}_0 \text{ا}_2 - \text{ا}_1^2$ لینے سے دفعہ ۱۶۷ کے مطابق ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{ا}_0^2\, \Sigma\, \text{ع}^2 (\text{ب} - \text{ج})^2 = 18(\text{ا}_2^2 - \text{ا}_1 \text{ا}_3)$$

داہنی طرف کے جملہ پر مف کا اور بائیں طرف کے جملہ پر عف کا عمل کرنے سے

$$\text{ا}_0^2\, \Sigma\, 2\text{ع}(\text{ب} - \text{ج})^2 = 18(\text{ا}_1 \text{ا}_2 - \text{ا}_0 \text{ا}_3)$$ ۔

اور پھر اسی طرح عمل کرنے سے

$$ا_۰^۲ \equiv ۲(ب - ج)^۲ = ۳۶(ا_۱^۲ - ا_۰ ا_۲)$$

اب اس مساوات پر پھر اسی طرح عمل کرنیکا نتیجہ یہ ہوگا کہ مساوات کی دونوں طرف کے جملے معدوم ہو جائینگے - پس مطلوبہ ہم متغیر دفعہ ۱۶۷ کے مطابق یہ ہے

$$(ا_۰ ا_۲ - ا_۱^۲) + (ا_۰ ا_۳ - ا_۱ ا_۲) لا + (ا_۱ ا_۳ - ا_۲^۲) لا^۲$$

اسی کے ساتھ لا اور اصلوں کی رقوم میں متناظر جملہ ملجاتا ہے -

۲ - چار درجی

$$ا_۰ لا^۴ + ۴ ا_۱ لا^۳ + ۶ ا_۲ لا^۲ + ۴ ا_۳ لا + ا_۴ = ۰$$

کا (ہیسوی) بناؤ -

وہ ہم متغیر چار درجی کا ہیسوی) کہلاتا ہے جسکا صدر سر $ھ \equiv ا_۰ ا_۲ - ا_۱^۲$ ہے - اسکا درجہ ۴ ہے کیونکہ $ھ = ۲$ اور $ک = ۲$ اور اسلئے $ن ھ - ۲ک = ۴$ - سروں کو ان کے متمم میں بدلنے سے ہم متغیر کا ماخذ $ا_۲ ا_۴ - ا_۳^۲$ ملتا ہے اور ہمیں آسانی کے ساتھ حاصل ہوتا ہے

(119) $$ھ_{لا} \equiv (ا_۰ ا_۲ - ا_۱^۲) لا^۴ + ۲(ا_۰ ا_۳ - ا_۱ ا_۲) لا^۳ + (ا_۰ ا_۴ + ۲ ا_۱ ا_۳ - ۳ ا_۲^۲) لا^۲ + ۲(ا_۱ ا_۴ - ا_۲ ا_۳) لا + (ا_۲ ا_۴ - ا_۳^۲)$$

۳ - کعبی کا وہ ہم متغیر بناؤ جسکا صدر سر غیر متغیر گ ہو -

گ میں جو سر شامل ہوتے ہیں ان کو انکے متمموں میں بدلنے سے ہمیں ہم متغیر کا ماخذ ملتا ہے

$$ا_۰^۲ ا_۳ - ۳ ا_۰ ا_۱ ا_۲ + ۲ ا_۱^۳$$

اور عف کا عمل کرنے سے ہمیں آسانی کے ساتھ ہم متغیر ذیل کی شکل میں حاصل ہوتا ہے :-

$$(ا_۰^۲ ا_۳ - ۳ ا_۰ ا_۱ ا_۲ + ۲ ا_۱^۳) + ۳(ا_۰ ا_۱ ا_۳ + ا_۱^۲ ا_۲ - ۲ ا_۰ ا_۲^۲) لا - ۳(ا_۰ ا_۲ ا_۳ + ا_۱ ا_۲^۲ - ۲ ا_۱^۲ ا_۳) لا^۲$$
$$- (ا_۰ ا_۳^۲ - ۳ ا_۱ ا_۲ ا_۳ + ۲ ا_۲^۳) لا^۳$$

اس میں مذدوج سر علامت اور تیز متمموں کے باہمی تبادلہ کے لحاظ سے مثبت ہیں اور گ کا وزن طاق ہے۔ طالب علم اس ہم متغیر کو لا اور اصلوں کی رقوم میں گ کی اس قیمت کی مدد سے جو مثال ۵ دفعہ ۲۷ میں دیگئی ہے آسانی کے ساتھ بیان کرسکتا ہے۔

۱۷۰ - مسئلہ ہم متغیر یا نیم متغیر کی اصلوں کے فرقوں کا کوئی تفاعل اصلی مساوات کی اصلوں کے فرقوں کا ایک تفاعل ہوتا ہے

فرض کرو کہ ہم متغیر یا نیم ہم متغیر ہے

$$\text{فہ}(\text{لا}) \equiv (\text{لا} - \text{غہ}_1)(\text{لا} - \text{غہ}_2)\ldots(\text{لا} - \text{غہ}_\text{ق})$$

چونکہ فہ تفاعل ہے لا، غہ$_1$، غہ$_2$، ... غہ$_\text{ق}$ کے فرقوں کا اسلئے

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} - \text{مف فہ} \equiv ۰،$$

یعنی $\text{فَہ}(\text{لا}) + \Sigma\, (\text{لا} - \text{غہ}_1)(\text{لا} - \text{غہ}_2)\ldots(\text{لا} - \text{غہ}_\text{ق})\,\text{مف غہ}_1 \equiv ۰$

اب لا کی بجائے ہر اصل غہ$_1$، غہ$_2$، ... ترتیب وار درج کرو تو

$\text{فَہ}(\text{غہ}_1)(۱ + \text{مف غہ}_1) = ۰، \ \text{فَہ}(\text{غہ}_2)(۱ + \text{مف غہ}_2) = ۰،$ وغیرہ

اسلئے $\text{مف غہ}_1 + ۱ = ۰، \ \text{مف غہ}_2 + ۱ = ۰، \ldots، \text{مف غہ}_\text{ر} + ۱ = ۰، \ldots$

اور اسلئے $\text{مف}(\text{غہ}_\text{ر} - \text{غہ}_\text{ی}) = ۰$

جس سے مسئلہ ثابت ہے۔

صفحات گذشتہ میں بہت سی مثالیں دی گئی ہیں جنمیں ہم متغیروں یا نیم ہم متغیروں کی اصلوں کو اصلی مساوات کی اصلوں کی رقوم میں بیان کیا گیا ہے اور طالب علم آسانی کے ساتھ اس بات کی تصدیق کرسکتا ہے

کسی ایسے جملہ پر مف کے عمل کا نتیجہ ۔ ا ہے ۔ پچھلی دفعہ کی مثالوں ۱ اور ۳ کے ہم متغیروں کی اصلیں مثال ۲۵ صفحہ ۷۹ اور مثال ۱۳ صفحہ ۱۲۷ جلد اول میں دی گئی ہیں اور نیم ہم متغیروں کی اصلیں امثلہ ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۴ صفحات ۱۲۵ تا ۱۲۷ جلد اول میں ملینگی۔ (120)

اوپر کا ثابت شدہ مسئلہ دو یا زیادہ ہم متغیروں یا نیم ہم متغیروں کی اصلوں کے فرقوں کے کسی تفاعل کے لئے صریحاً درست ہے۔

۱۷ ا ۔ دوہرے خطی استحالہ کا استعمال ہم متغیروں کے نظریہ پر

ابتک ہم نے ہم متغیروں اور غیر متغیروں کے نظریہ پر مساواتوں کی اصلوں کے واسطے سے بحث کی ہے۔ اب ہم ایک جداگانہ اور عام تر طریقہ کا کچھ ذکر کرینگے جسکی مدد سے اس نظریہ کی توسیع ایسے کثیر رقمیوں کیلئے ہوسکتی ہے جو دو سے زیادہ متغیروں میں متجانس ہیں مثلاً وہ کثیر الارقام جو اس نظریہ کے متعدد اہم ہندسی اطلاقات میں پیش ہوتے ہیں۔ اگرچہ اس مضمون کی اسقدر توسیع کرنا اس کتاب کی حدود کے باہر ہے لیکن ہم مناسب سمجھتے ہیں کہ جو طریقہ ہم نے اختیار کیا ہے اور جس عام تر طریقہ کا حوالہ دیا ہے ان دونوں کے درمیان جو تعلق ہے اسکو دکھادیا جائے۔

مسئلہ ا ۔ فرض کرو کہ کوئی کثیر رقمی

ع ن ≡ ا۰ (لا − ع۱ ما) (لا − ع۲ ما) .... (لا − عن ما)

ابدال

لا = لہ لاَ + مہ ماَ ، ما = لَہ لاَ + مَہ ماَ

کے ذریعہ مستحیل کیا گیا ہے۔ تب اگر ان دونوں شکلوں

ع ن اور عَ ن کے جواب میں غیر متغیر ع اور عَ ہوں تو

عَ = (لہ مہَ - لَہ مہ)^کہ ع

اس کو ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ

ع = اُ ∑ (عہ۱ - عہ۲)^ک (عہ۱ - عہ۳)^ب .... (عہ - عن)^ل

جہاں ∑ کی ہر رقم میں ہر اصل قوت ھ میں داخل ہوتی ہے۔ جب عن کے کسی جزو ضربی مثلاً لا - عہ۱ ما کو مستحیل کیا جاتا ہے تو

لا - عہ۱ ما = (لہ - لَہ عہ۱) (لاَ - عہَ۱ ماَ)، جہاں عہَ۱ = (مہَ عہ۱ - مہ) / (لہ - لَہ عہ۱)،

اسلئے

عَن = اَ (لاَ - عَہ۱ ماَ) (لاَ - عَہ۲ ماَ) . . . (لاَ - عَن ماَ)

(121) جہاں اَ = اُ (لہ - لَہ عہ۱) (لہ - لَہ عہ۲) . . . (لہ - لَہ عن)

نیز عَن کی کسی دو اصلوں کے فرق کیلئے

عَق - عَق = (لہ مہَ - لَہ مہ) (عق - عق) / ((لہ - لَہ عق) (لہ - لَہ عق))

اب اَ کی بجائے اور عَ میں جو اصلوں کے فرق داخل ہوتے ہیں اُن سب کی بجائے اندراجات عمل میں لائے جائیں تو کسروں کے نسب نما جو استحالہ کی وجہ سے داخل ہوتے ہیں علیٰحدہ ہو جاتے ہیں اور بالآخر ہمیں حاصل ہوتا ہے

عَ = (لہ مہَ - لَہ مہ)^کہ ع

مسئلہ ۲ — اگر کثیر رقمی عن کا ایک ہم متغیر فہ (لا، ما) ہو تو خطی استحالہ کے بعد فہ کی نئی قیمت

(لہ مہَ - لَہ مہ)^کہ فہ (لا، ما)

ہوگی۔

اسکا ثبوت گذشتہ مسئلہ کے ثبوت کے مشابہ ہے۔ فرض کرو کہ

$$فہ\,(لا،\,ما) = ا_ن^ر \sum (عہ_۱ - عہ_۲)^ل\,(عہ_۱ - عہ_۳)^م \cdots (لا - عہ_۱\,ما)^ف\,(لا - عہ_۲\,ما)^ق \cdots$$

جہاں ہر اصل قوت ھ میں داخل ہوتی ہے۔

اب پچھلے مسئلہ کی طرح فہ (لا، ما) کی اس قیمت کو مستحیل کرو تو چونکہ نسب نما میں اجزائے ضربی $لہ - لہَ\,عہ_۱$، $لہ - لہَ\,عہ_۲$، .... سب کے سب ایک ہی درجہ ھ میں داخل ہوتے ہیں اسلئے وہ سب ضارب $لہ^ھ$ سے ضرب دینے پر علٰحدہ ہو جاتے ہیں اور فہ (لا، ما) کی استحالہ شدہ قیمت حاصل ہوتی ہے

$$(لہ\,مہَ - لہَ\,مہ)^ک\; فہ\,(لا،\,ما)$$

مقطع لہ مہَ − لہَ مہ کو جسکے عناصر وہ سر ہیں جو دوہرے خطی استحالہ میں داخل ہوتے ہیں **استحالہ کا مقیاس** کہتے ہیں۔

مساوات $ع_ن = ۰$ کی اصلوں کے حوالہ کے بغیر ہم یہ فرض کر سکتے ہیں کہ شکل

$$ع_ن \equiv ا_۰\,لا^ن + ن\,ا_۱\,لا^{ن-۱}\,ما + \frac{ن(ن-۱)}{۲\times۱}\,ا_۲\,لا^{ن-۲}\,ما^۲ + \cdots + ا_ن\,ما^ن$$

کے کثیر رقمی پر لا اور ما کا استحالہ عمل میں لایا گیا ہے۔

اوپر کے مسئلے جو اُن غیر متغیروں اور ہم متغیروں کے لحاظ سے ثابت کئے گئے ہیں جو اصلوں کے تفاعل ہیں اسوقت بھی درست رہینگے (122) جب ان تفاعلوں کو سروں کی رقوم میں انکی معادل اشکال میں بیان کیا جائے اسلئے ہم ان مسئلوں کو شکل ذیل میں بھی بیان کر سکتے ہیں:—

مسئلہ ۱ — غیر متغیر کثیر رقمی کے سروں کا ایک ایسا تفاعل ہے کہ جب متغیروں کے خطی استحالہ سے کثیر رقمی کو مستحیل کیا جاتا ہے تو

نئے سروں کا وہی تفاعل ابتدائی تفاعل اور استحالہ کے مقیاس کی ایک قوت کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔

مسئلہ ۲ — ہم متغیر کثیر رقمی کے سروں کا اور نیز متغیروں کا ایک ایسا تفاعل ہے کہ جب خطی استحالہ سے کثیر رقمی کو مستحیل کیا جاتا ہے تو نئے متغیروں اور سروں کا وہی تفاعل ابتدائی تفاعل اور استحالہ کے مقیاس کی ایک قوت کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔

اوپر کے مسئلوں میں جو تعریفیں دی گئی ہیں ان کا اطلاق صریحاً ان کثیر رقمیوں پر بھی ہو سکتا ہے جو کئی متغیروں میں متجانس ہوں اور اس لئے یہ تعریفیں ہم متغیروں اور غیر متغیروں کے اس وسیع تر نظریہ کی بنیاد قرار پاتی ہیں جس کا حوالہ دیا جا چکا ہے۔ امثلہ ذیل میں ایک مثال دی گئی ہے جس میں تین متغیروں والے کثیر رقمی کے لئے غیر متغیر حاصل کیا گیا ہے۔

مثالیں

۱ — خطی استحالہ

لا = لہ لا + مہ ما ، ما = لہ، لا + مہ، ما

سے اگر

ا لا^2 + ۲ ب لا ما + ج ما^2 = ا لا^2 + ۲ ب لا ما + ج ما^2

تو ثابت کرو کہ

ا ج − ب^2 = (لہ مہ، − لہ، مہ)^2 (ا ج − ب^2)

۲۔ اسی استحالہ سے اگر

(ا، ب، ج، د، س)(لا، ما)^{4} = (اَ، بَ، جَ، دَ، سَ)(لاَ، ماَ)^{4}

تو ثابت کرو کہ

اَسَ − ۴ بَ دَ + ۳ جَ^{2} = (لہ$_{1}$ مہ$_{2}$ − لہ$_{2}$ مہ$_{1}$)^{4} (ا س − ۴ ب د + ۳ ج^{2})

۳۔ اسی استحالہ سے اگر

ا لا^{2} + ۲ ب لا ما + ج ما^{2} = اَ لاَ^{2} + ۲ بَ لاَ ماَ + جَ ماَ^{2}،

اور ا$_{1}$ لا^{2} + ۲ ب$_{1}$ لا ما + ج$_{1}$ ما^{2} = اَ$_{1}$ لاَ^{2} + ۲ بَ$_{1}$ لاَ ماَ + جَ$_{1}$ ماَ^{2}

تو ثابت کرو کہ

اَ جَ$_{1}$ + اَ$_{1}$ جَ − ۲ بَ بَ$_{1}$ = (لہ$_{1}$ مہ$_{2}$ − لہ$_{2}$ مہ$_{1}$)^{2} (ا ج$_{1}$ + ا$_{1}$ ج − ۲ ب ب$_{1}$)

دو درجی اشکال

(ا + ک ا$_{1}$) لا^{2} + ۲ (ب + ک ب$_{1}$) لا ما + (ج + ک ج$_{1}$) ما^{2}

= (اَ + ک اَ$_{1}$) لاَ^{2} + ۲ (بَ + ک بَ$_{1}$) لاَ ماَ + (جَ + ک جَ$_{1}$) ماَ^{2}

میں مثال (۱) کی مدد سے نتیجہ اخذ کرو اور پھر طرفین میں "ک" کے سروں کا مقابلہ کرو تو مطلوبہ نتیجہ حاصل ہو جاتا ہے۔

(123) پس ہم یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ اگر دو درجہ دوم کے جملوں سے ایک موسیقی نظام متعین ہو تو خطی استحالہ سے حاصل شدہ نئے درجہ دوم کے جملوں سے بھی ایک موسیقی نظام بنتا ہے۔ کیونکہ اگر انکی اصلیں عہ، بہ اور عہ$_{1}$، بہ$_{1}$ ہیں تو

ا ا$_{1}$ {(عہ − عہ$_{1}$)(بہ − بہ$_{1}$) + (عہ − بہ$_{1}$)(بہ − عہ$_{1}$)} = ۲ (ا ج$_{1}$ + ا$_{1}$ ج − ۲ ب ب$_{1}$)

۴۔ اگر خطی استحالہ

لا = لہ$_{1}$ لاَ + مہ$_{1}$ ماَ + نہ$_{1}$ سےَ، ما = لہ$_{2}$ لاَ + مہ$_{2}$ ماَ + نہ$_{2}$ سےَ،

ی = ل$_3$ لا + م$_3$ ما + ن$_3$ ے

سے تین متغیروں کا متجانس دو درجی تفاعل

ا لا^2 + ب ما^2 + ج ی^2 + ۲ ف ما ی + ۲ گ ی لا + ۲ ھ لا ما

ذیل کے تفاعل

ا لا$'^2$ + ب ما$'^2$ + ج ے^2 + ۲ ف ما ے + ۲ گ ے لا + ۲ ھ لا ما

میں تحویل ہو جائے تو ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ھ} & \text{گ} \\ \text{ھ} & \text{ب} & \text{ف} \\ \text{گ} & \text{ف} & \text{ج} \end{vmatrix} = (\text{ل}_1 \, \text{م}_2 \, \text{ن}_3)^2 \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ھ} & \text{گ} \\ \text{ھ} & \text{ب} & \text{ف} \\ \text{گ} & \text{ف} & \text{ج} \end{vmatrix}$$

جہاں مقطع (ل$_1$ م$_2$ ن$_3$) استحالہ کا مقیاس ہے۔

استحالہ کے مقیاس کو شکل

$$\begin{vmatrix} \text{ل}_1 & \text{ل}_2 & \text{ل}_3 \\ \text{م}_1 & \text{م}_2 & \text{م}_3 \\ \text{ن}_1 & \text{ن}_2 & \text{ن}_3 \end{vmatrix}$$

میں لکھو اور اصلی سروں کے مجوزہ مقطع کو استحالہ کے اس مقیاس سے علی الترتیب دو مرتبہ ضرب دو۔ حاصل ہونے والے مقطع کے عناصر اور لا^2، ما^2، وغیرہ کے پھیلائے ہوئے سروں میں مقابلہ کرو تو مطلوبہ نتیجہ کی تصدیق ہو جاتی ہے۔

پس یہ معلوم ہوتا ہے کہ وہ مقطع جس پر یہاں بحث کی گئی ہے تین متغیروں کے دئے ہوئے تفاعل کا ایک غیر متغیر ہے۔

۱۷۲ - خطی استحالہ سے اخذ شدہ ہم متغیروں کے خواص۔

اب ہم دفعہ ۱۷۱ کے مسئلہ ۲ کی دوسری شکل کو ہم متغیر کی تعریف کے طور پر لے کر یہ بتائینگے کہ سروں کو معلوم کرنے کا وہ قانون جو دفعہ ۱۶۹ میں

دیا گیا ہے کس طرح فوراً حاصل ہوتا ہے یعنی ہم یہ بتائینگے کہ اگر کوئی ایک سر دیا جائے تو باقی تمام سر متعین کئے جا سکتے ہیں۔

اس مقصد کے لئے خطی استحالہ

لا = لاَ + ھ ما ، ما = ۰ × لا + ما

کو عمل میں لانے سے (جسکا مقیاس ایک ہے) کثیر رقمی

(ا۰ ، ا۱ ، ا۲ ، ..... ، ان) (لا ، ما)ن

بدلکر

(اَ۰ ، اَ۱ ، اَ۲ ، .... ، اَن) (لاَ ، ما)ن

ہو جاتا ہے جہاں

اَ۰ = ا۰ ، اَ۱ = ا۱ + ا۰ ھ ، اَ۲ = ا۲ + ۲ا۱ ھ + ا۰ ھ۲ ، وغیرہ

(دفعہ ۳۵)

(124) اب اگر اس کثیر رقمی کا کوئی ہم متغیر فہ (ا۰ ، ا۱ ، ا۲ ، .... ، ان ، لا ، ما) ہو تو تعریف کی رو سے

فہ (ا۰ ، ا۱ ، ا۲ ، .... ، ان ، لا ، ما) = فہ (اَ۰ ، اَ۱ ، اَ۲ ، .... ، اَن ، لاَ ، ما)

یعنی فہ (ا۰ ، ا۱ ، ا۲ ، .... ، ان ، لا ، ما) = فہ (اَ۰ ، اَ۱ ، اَ۲ ، .... ، اَن ، لا ـ ھ ما ، ما)

اس مساوات کے دوسرے رکن کو پھیلاؤ اور صرف اُن رقموں تک اپنی توجہ محدود رکھو جو ھ سے مضروب ہیں تو چونکہ جف اَر / جف ھ = ر ار-۱ جبکہ وہ ارقام نظر انداز کر دیجائیں جو نتیجہ میں ھ۲ ، ھ۳ ، وغیرہ سے مضروب ہیں اسلئے ہمیں پھیلاؤ حاصل ہوتا ہے

$$\text{فہ} + \text{ھ}\left(\text{۱} - \text{ما}\,\frac{\text{جز فہ}}{\text{جز لا}} + \text{عف فہ}\right) + \text{ھ}^{۲}\left(\quad\right) + \ldots \equiv \text{فہ}$$

جسکو درست رہنا چاہیئے خواہ ھ کی قیمت کچھ ہی ہو ۔ پس

$$\text{ا}\,\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرلا}} \equiv \text{ا}_{\text{۱}}\,\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرا}_{\text{۱}}} + \text{۲ا}_{\text{۲}}\,\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرا}_{\text{۲}}} + \text{۳ا}_{\text{۳}}\,\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرا}_{\text{۳}}} + \ldots + \text{ن ا}_{\text{ن-۱}}\,\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرا}_{\text{ن}}} \qquad (\text{۱})$$

اور فہ کی بجائے قیمت

$$(\text{ب}_{\text{۰}}\text{، ب}_{\text{۱}}\text{، ب}_{\text{۲}}\text{، } \ldots \text{، ب}_{\text{م}})(\text{لا، ما})^{\text{م}}$$

درج کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{م ب}_{\text{۰}}\,\text{لا}^{\text{م-۱}}\,\text{ما} + \text{م(م - ۱) ب}_{\text{۱}}\,\text{لا}^{\text{م-۲}}\,\text{ما}^{\text{۲}} + \ldots + \text{م ب}_{\text{م-۱}}\,\text{ما}^{\text{م}}\text{،}$$

$$\equiv \text{عف ب}_{\text{۰}}\,\text{لا}^{\text{م}} + \text{م عف ب}_{\text{۱}}\,\text{لا}^{\text{م-۱}}\,\text{ما} + \ldots + \text{عف ب}_{\text{م}}\,\text{ما}^{\text{م}}$$

اور اس میں سروں کا مقابلہ کرنے سے ہمیں حسب ذیل مساواتیں ملتی ہیں :-

$$\text{عف ب}_{\text{۰}} = \text{۰، عف ب}_{\text{۱}} = \text{ب}_{\text{۰}}\text{، عف ب}_{\text{۲}} = \text{۲ ب}_{\text{۱}}\text{، } \ldots\ldots$$

$$\text{عف ب}_{\text{م}} = \text{م ب}_{\text{م-۱}}$$

یہ مساواتیں ماخذ $\text{ب}_{\text{م}}$ سے سروں کو معلوم کرنیکا قانون متعین کرتی ہیں ۔ صدر سر $\text{ب}_{\text{۰}}$ فرقوں کا ایک تفاعل ہے کیونکہ $\text{عف ب}_{\text{۰}} = \text{۰}$،

سروں کو محسوب کرنیکے عمل میں ذیل کے مسئلہ سے سہولت پیدا ہوتی ہے ۔ یہ مسئلہ مختلف اصولوں پر قبل ازیں ثابت کیا جا چکا ہے

ہم متغیر کے دو سر جو ابتدائی اور آخری رقموں سے متساوی الفصل ہوں مساوی (مثبت یا منفی) ہو جاتے ہیں جب ان میں سے کسی ایک میں $\text{ا}_{\text{۰}}\text{، ا}_{\text{۱}}\text{، } \ldots$ کی جگہ علی الترتیب $\text{ا}_{\text{ن}}\text{، ا}_{\text{ن-۱}}\text{، } \ldots\text{، ا}_{\text{۰}}$ رکھے جائیں ۔

اِسکو ثابت کرنیکے لئے فرض کرو کہ کثیر رقمی کو خطی استحالہ

لا = ۰ × لا + ما ، ما = لا + ۰ × ما　(جسکا مقیاس = -۱)

سے مستحیل کیا گیا ہے ۔ اس طرح

(ا۰، ا۱، ا۲، .....، ان)(لا، ما)^ن = (ان، ان-۱، .....، ا۰)(لا، ما)^ن

لیکن تعریف کی رو سے کوئی ہم متغیر

فہ (ان، ان-۱، .....، ا۰، لا، ما) = (-۱)^ک فہ (ا۰، ا۱، ا۲، .....، ان، لا، ما)

≡ (-۱)^ک فہ (ا۰، ا۱، ا۲، .....، ان، ما، لا)

پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ہم متغیر کے سر جو ابتدائی اور انتہائی رقموں سے متساوی الفصل ہیں شکل میں مشابہ ہیں اور مماثل ہو جاتے ہیں (سوائے علامت میں اگر ک طاق ہو) جبکہ لاحقوں کی بجائے اِنکی متمم قیمتیں درج کیجاتی ہیں ۔

اسی طرح یہ بھی آسانی کے ساتھ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ کوئی ہم متغیر ذیل کی تفرقی مساوات

لا (جف فہ / جف ما) ≡ ان (جف فہ / جف ان-۱) + ۲ ان-۱ (جف فہ / جف ان-۲) + ۳ ان-۲ (جف فہ / جف ان-۳) + ...

..... + ن ا۱ (فر فہ / فر ا۰)　　(۲)

کو اور مساوات (۱) کو پورا کرتا ہے ۔

نیز اگر کثیر رقمی کا ایک غیر متغیر فہ (ا۰، ا۱، ا۲، .....، ان) ہو تو اس دفعہ کے پہلے استحالہ سے دفعہ ۱۷۱ کی تعریف کو استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

فہ (ا۰، ا۱، ا۲، .....، ان) = فہ (ا۰، ا۱، ا۲، .....، ان)

اور حسب سابق عمل کرنے سے ہم ثابت کرتے ہیں کہ غیر متغیر کو یہ دونوں تفرقی مساواتیں

$$\text{ا}_0 \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ا}_1} + ۲\,\text{ا}_1 \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ا}_2} + ۳\,\text{ا}_2 \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ا}_3} + \dots + \text{ن ا}_{\text{ن}-1} \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ا}_{\text{ن}}} = ۰ ،$$

$$\text{ا}_{\text{ن}} \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ا}_{\text{ن}-1}} + ۲\,\text{ا}_{\text{ن}-1} \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ا}_{\text{ن}-2}} + ۳\,\text{ا}_{\text{ن}-2} \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ا}_{\text{ن}-3}} + \dots + \text{ن ا}_1 \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ا}_0} = ۰ ،$$

پوری کرنی چاہئیں جنمیں سے کوئی ایک دوسری میں شامل سمجھی جا سکتی ہے کیونکہ اگر ہم خطی استحالہ

$$\text{لا} = \text{ما} ، \text{ما} = \text{لا} ، \quad (\text{جسکا مقیاس} = -۱)$$

کو عمل میں لائیں تو غیر متغیر کی تعریف کی رو سے

$$\text{فہ}(\text{ا}_{\text{ن}} ، \text{ا}_{\text{ن}-1} ، \text{ا}_{\text{ن}-2} ، \dots ، \text{ا}_0) = (-۱)^{\text{ک}}\, \text{فہ}(\text{ا}_0 ، \text{ا}_1 ، \text{ا}_2 ، \dots ، \text{ا}_{\text{ن}})$$

جس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ غیر متغیر کثیر رقمی کے سروں کا ایک ایسا تفاعل ہے جو نہیں بدلتا (سوائے علامت میں اگر وزن طاق ہو) جبکہ سر سیدھی یا الٹی ترتیب میں لکھے جاتے ہیں۔ (126)

اب غیر متغیروں اور نیم غیر متغیروں، ہم متغیروں اور نیم ہم متغیروں کے درمیان جو ربط ہے وہ واضح ہے۔ کثیر رقمی $(\text{ا}_0 ، \text{ا}_1 ، \text{ا}_2 ، \dots ، \text{ا}_{\text{ن}})(\text{لا} ، \text{ما})^{\text{ن}}$ کے غیر متغیر اوپر لکھی ہوئی دونوں تفرقی مساواتوں کو پورا کرتے ہیں لیکن $(\text{ا}_0 ، \text{ا}_1 ، \dots ، \text{ا}_{\text{ن}})(\text{لا} ، ۱)^{\text{ن}}$ کے نیم غیر متغیر انمیں سے صرف پہلی مساوات کو پورا کرتے ہیں۔ اسی طرح $(\text{ا}_0 ، \text{ا}_1 ، \dots ، \text{ا}_{\text{ن}})(\text{لا} ، ۱)^{\text{ن}}$ کے نیم ہم متغیر صرف مساوات (۱) کو پورا کرتے ہیں لیکن ہم متغیر دونوں مساواتوں (۱) اور (۲) کو پورا کرتے ہیں۔

کثیر رقمیوں کے ہم متغیروں اور غیر متغیروں کی نوعیت کو اوپر جن دو طریقوں سے ان دو تفاعلوں پر بحث کی جا سکتی ہے ان کا درمیانی تعلق سمجھا دینے کے بعد اب ہم چند مسئلے ثابت کرینگے جو کثیر رقمیوں کے ہم متغیروں اور غیر متغیروں کی ساخت میں (جب کثیر رقمیوں کو خطی ابدال کے ذریعہ مستحیل کیا جاتا ہے) کثرت سے استعمال ہوتے ہیں۔ وہ طلباء جو اس مضمون کا مطالعہ پہلی مرتبہ کر رہے ہوں اسکو یہیں چھوڑ کر اگلا باب پڑھ سکتے ہیں جسمیں دو درجی، تین درجی، چار درجی کی صورتوں میں وہ اصول استعمال ہوئے ہیں جنکی صراحت کیجا چکی ہے۔

۱۷۳۔ مسئلہ ۱۔ فرض کرو کہ ن ویں درجہ کا کوئی متجانس کثیر رقمی ف (لا، ما) استحالہ

لا = ل لاَ + م ماَ ، ما = لَ لاَ + مَ ماَ

سے فا (لاَ، ماَ) ہو جاتا ہے اور نیز فرض کرو کہ لا، ما کا کوئی اور تفاعل ع اسی استحالہ سے عَ ہو جاتا ہے تو

م^ن ف (جف ع / جف ما ، − جف ع / جف لا) = فا (جف عَ / جف ماَ ، − جف عَ / جف لاَ)　(۱)

جہاں م استحالہ کا مقیاس ہے۔

ثبوت:۔ مساواتوں

لا = ل لاَ + م ماَ ، ما = لَ لاَ + مَ ماَ

کو حل کرنے سے

م لاَ = مَ لا − م ما ، م ماَ = − لَ لا + ل ما

اسلئے　م جف لاَ / جف لا = مَ ، م جف لاَ / جف ما = − م ، م جف ماَ / جف لا = − لَ ، م جف ماَ / جف ما = ل

لیکن

$$\frac{\text{جف ء}}{\text{جف لاَ}} = \frac{\text{جف ء}}{\text{جف لا}} \times \frac{\text{جف لا}}{\text{جف لاَ}} + \frac{\text{جف ء}}{\text{جف ما}} \times \frac{\text{جف ما}}{\text{جف لاَ}}$$

$$= \frac{1}{\text{مر}} \left(\text{مَ} \frac{\text{جف ء}}{\text{جف لا}} - \text{لَ} \frac{\text{جف ء}}{\text{جف ما}} \right)،$$

$$\frac{\text{جف ء}}{\text{جف ماَ}} = \frac{\text{جف ء}}{\text{جف لا}} \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ماَ}} + \frac{\text{جف ء}}{\text{جف ما}} \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ماَ}}$$

$$= \frac{1}{\text{مر}} \left(- \text{مہ} \frac{\text{جف ء}}{\text{جف لا}} + \text{لہ} \frac{\text{جف ء}}{\text{جف ما}} \right)$$

اِن مساواتوں کو اِس شکل میں رکھا جا سکتا ہے

$$\frac{\text{جف ء}}{\text{جف ماَ}} = \text{لہ} \left(\frac{1}{\text{مر}} \frac{\text{جف ء}}{\text{جف ما}} \right) + \text{مہ} \left(- \frac{1}{\text{مر}} \frac{\text{جف ء}}{\text{جف لا}} \right)،$$

$$\frac{\text{جف ء}}{\text{جف لاَ}} = \text{لَ} \left(\frac{1}{\text{مر}} \frac{\text{جف ء}}{\text{جف ما}} \right) + \text{مَ} \left(- \frac{1}{\text{مر}} \frac{\text{جف ء}}{\text{جف لا}} \right)$$

اور چونکہ

$$\text{ف} (\text{لہ لا} + \text{مہ ما}،\ \text{لَ لا} + \text{مَ ما}) \equiv \text{فا} (\text{لا}، \text{ما})$$

اسلئے لا اور ما کو علی الترتیب $\frac{1}{\text{مر}} \frac{\text{جف ء}}{\text{جف ما}}$ اور $- \frac{1}{\text{مر}} \frac{\text{جف ء}}{\text{جف لا}}$ میں بدلنے سے مسئلہ ثابت ہو جاتا ہے۔

بالکل اسی طرح لا اور ما کو

$$\frac{1}{\text{مر}} \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}،\ - \frac{1}{\text{مر}} \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}$$

میں بدل کر یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ

$$\text{مر}^{n}\ \text{ف} \left(\frac{\text{جف}}{\text{جف ماَ}}،\ - \frac{\text{جف}}{\text{جف لاَ}} \right) \text{ء} = \text{فا} \left(\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}،\ - \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} \right) \text{ء} \quad ...(۲)$$

نتائج (۱) اور (۲) کو ہم متغیروں اور غیر متغیروں کے بنانے میں استعمال کیا جا سکتا ہے جیسا کہ اب ہم بیان کریں گے۔

فرض کرو کہ ف (لا، ما) اور ع کسی تیسرے کثیر رقمی و کے ہم متغیر ہیں جہاں و مخصوص صورت کے طور پر ان میں سے کسی ایک کے ساتھ متماثل ہو سکتا ہے۔ خطی استحالہ کے ذریعہ کثیر رقمی و کو تحویل کرو اور فرض کرو کہ و کے نئے سروں اور لا، ما کی رقوم میں بیان شدہ وہی ہم متغیر $\text{فا}_{\text{ج}}$ (لا، ما) اور $\text{ع}_{\text{ج}}$ سے تعبیر ہوتے ہیں۔ تب دفعہ ۱۷۱ مسئلہ ۲ کی رو سے

$$\text{م}^{\text{ت}}\ \text{فا}\,(\text{لا، ما}) \equiv \text{فا}_{\text{ج}}\,(\text{لا، ما})$$

اور

$$\text{م}^{\text{ق}}\ \text{ع} = \text{ع}_{\text{ج}}$$

(128) پس ان مساواتوں سے (۱) میں اندراج کرنے سے

$$\text{م}\ \text{ف}\left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\,،\ -\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\right) = \text{فا}_{\text{ج}}\left(\frac{\text{جف ع}_{\text{ج}}}{\text{جف ما}}\,،\ -\frac{\text{جف ع}_{\text{ج}}}{\text{جف لا}}\right)$$

جس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ $\text{ف}\left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\,،\ -\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\right)$

و کا ایک ہم متغیر ہے۔

اور اسی طرح (۲) سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ

$$\text{ف}\left(\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\,،\ -\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\right)\text{ع}$$

سے و کا ایک غیر متغیر یا ہم متغیر حاصل ہوتا ہے بموجب اسکے کہ ع، ن ویں یا اس سے اعلیٰ رتبہ کا ہو۔

غیر متغیروں اور ہم متغیروں کو اس طریقہ سے بنانے کی چند مثالیں

ذیل میں دیجاتی ہیں —

مثالیں

۱— اگر کثیر رقمی (ا، ب، ج، د، س)(لا، ما)^۴ = ۶ میں لا اور ما کی بجائے جف/جف ما ، −جف/جف لا درج کئے جائیں اور حاصل ہونیوالے عمل کی تکمیل خود کثیر رقمی پر کی جائے تو ثابت کرو کہ غیر متغیر ع حاصل ہوتا ہے۔
ہم معلوم کرتے ہیں

(ا، ب، ج، د، س)(جف/جف ما ، −جف/جف لا)^۴ ۶ = ۴۸ (ا س − ۴ ب د + ۳ ج^۲)

۲— چار درجے کے ہیسوی ھ (مثال ۲ دفعہ ۱۶۹) پر اسی عمل کی تکمیل کرنے سے ثابت کرو کہ غیر متغیر ح حاصل ہوتا ہے —
یہاں ہم معلوم کرتے ہیں

(ا، ب، ج، د، س)(جف/جف ما ، −جف/جف لا)^۴ ھ =
۲۴ (ا ج س + ۲ ب ج د − ا د^۲ − س ب^۲ − ج^۳)

۳— ثابت کرو کہ

(ا، ب، ج، د)(جف/جف ما ، −جف/جف لا)^۳ گ
= −۱۲ (ا^۲ د^۲ − ۶ ا ب ج د + ۴ ا ج^۳ + ۴ ب^۳ د − ۳ ب^۲ ج^۲)

جہاں کعبی (ا، ب، ج، د)(لا، ما)^۳ کا کعبی ہم متغیر گ ہے (مثال ۳ دفعہ ۱۶۹)

۴— (ا ج − ب^۲)(جف^۲/جف ما^۲) − (ا د − ب ج) جف^۲/(جف ما جف لا)
+ (ب د − ج^۲)(جف^۲/جف لا^۲)

کی قیمت معلوم کرو جہاں ع ≡ (ا، ب، ج، د)(لا، ما)^۳

جواب :- ۹۰ ھ^۲

۱۷۴ — مسئلہ ۲ — اگر (ا۰، ا۱، ا۲، .... ان)(لا، ما)^ن کا (129)
ایک غیر متغیر ف (ا۰، ا۱، ا۲، ... ان) ہو اور ن دو یا
اس سے اعلیٰ تر درجہ کا کوئی کثیر رقمی ع تو

ف (جف^ن ع / جف لا^ن ، جف^ن ع / جف لا^{ن-۱} جف ما ، جف^ن ع / جف لا^{ن-۲} جف ما^۲ ، ... ، جف^ن ع / جف ما^ن)

ع کا ایک غیر متغیر یا ہم متغیر ہے ـ

ثبوت :- فرض کرو

لا = ل لاَ + م ماَ ، لاَ = لَ لاَ + مَ ماَ ،

ما = لَ لاَ + مَ ماَ ، ماَ = لَ لاَ + مَ ماَ

تو پچھلے مسئلے کی طرح تحلیل کرنے سے

لاَ جف / جف لا + ماَ جف / جف ما = لاَ جف / جف لاَ + ماَ جف / جف ماَ

اور نیز ع کو تحلیل کرنے سے

ع = ع

اسلئے

(لاَ جف / جف لا + ماَ جف / جف ما)^ن ع = (لاَ جف / جف لاَ + ماَ جف / جف ماَ)^ن ع

اس مساوات کو پھیلا کر شکل

(عف، عف۱، عف۲، ...، عف_ن)(لاَ، ماَ)^ن

$$= (\text{عف}, \text{عف}_1, \text{عف}_2, \ldots \text{عف}_n)(\text{لا}', \text{ما}')^n$$

میں لکھنے سے غیر متغیر کی تعریف کی رو سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{ف}(\text{عف}, \text{عف}_1, \text{عف}_2, \ldots) = \text{م}^{\text{ق}}\,\text{ف}(\text{عف}', \text{عف}'_1, \text{عف}'_2, \ldots \text{عف}'_n)$$

جس سے یہ ثابت ہے کہ ف $(\text{عف}, \text{عف}_1, \text{عف}_2, \ldots \text{عف}_n)$ ایک غیر متغیر یا ہم متغیر ہے۔

جب اس طرح لا، ما اور لا'، ما' کو تبدیل کیا جاتا ہے جس طرح اس مسئلہ میں کیا گیا ہے تو ہم کہتے ہیں کہ یہ متغیر ہم استحالہ متغیر ہیں۔ اور عام صورت میں متغیروں کی کسی تعداد کے لئے جبکہ وہ سب جو ایک جٹ کے استحالہ میں داخل ہوتے ہیں (یعنی ہوں) جو دوسر جٹ کے استحالہ میں داخل ہوتے ہیں تو ہم کہتے ہیں کہ یہ دونوں جٹ ہم استحالہ ہیں۔ وہ تفاعل جو مساوات (۱) میں واقع ہوتے ہیں متغیر جات کہلاتے ہیں۔ اس مساوات کی بائیں جانب کا جملہ ع کا ن واں تحریجہ ہے۔ (180)

مثالیں

۱۔ فرض کرو کہ دو درجی

$$\text{ا}\,\text{لا}^2 + 2\,\text{ا}_1\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ا}_2\,\text{ما}^2$$

بدل کر

$$\text{ا}'\,\text{لا}'^2 + 2\,\text{ا}'_1\,\text{لا}'\,\text{ما}' + \text{ا}'_2\,\text{ما}'^2$$

ہو جاتا ہے تو مثال ۱ دفعہ ۱۰۱ کے مطابق

$$\text{ا}\,\text{ا}_2 - \text{ا}_1^2 = \text{م}^2(\text{ا}'\,\text{ا}'_2 - \text{ا}'^2_1)$$

اب چونکہ

$$\text{لا}'^2 \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف}\,\text{لا}'^2} + 2\,\text{لا}'\,\text{ما}' \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف}\,\text{لا}'\,\text{جف}\,\text{ما}'} + \text{ما}'^2 \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف}\,\text{ما}'^2}$$

$$= \text{لاَ}^2 \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2} + ۲\,\text{لاَ ماَ} \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا جف ما}} + \text{ماَ}^2 \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما}^2}$$

اسلئے اس آخری نتیجہ میں لاَ ، ماَ اور لا ، ما کو متغیر سمجھنے سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2} \cdot \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما}^2} - \left(\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا جف ما}}\right)^2$$

$$= \text{م}^2 \left\{ \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2} \cdot \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما}^2} - \left(\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا جف ما}}\right)^2 \right\}$$

اس سے دو درجی کا ایک غیر متغیر اور کسی اعلیٰ کثیر رقمی کا ایک ہم متغیر (جس کو ہیسوی کہتے ہیں) حاصل ہوتا ہے ۔

۲ ۔ اگر ع ، تفاعلوں

$$(\text{ا ، ب ، ج ، د})(\text{لا ، ما})^3 \text{ اور } (\text{ا ، ب ، ج ، د ، س})(\text{لا ، ما})^4$$

کو تعبیر کرے تو پچھلی مثال کے عمل سے کونسے ہم متغیر اخذ ہوتے ہیں ۔

(دیکھو مسئلہ ۱ ، ۲ دفعہ ۱۶۹) ۔

جواب :- (۱) $(\text{اج} - \text{ب}^2)\text{لا}^2 + (\text{اد} - \text{ب ج})\text{لا ما} + (\text{ب د} - \text{ج}^2)\text{ما}^2$

(۲) $(\text{اج} - \text{ب}^2)\text{لا}^4 + ۲(\text{اد} - \text{ب ج})\text{لا}^3\text{ما}$

$+ (\text{اس} + ۲\,\text{ب د} - ۳\,\text{ج}^2)\text{لا}^2\text{ما}^2$

$+ ۲(\text{ب س} - \text{ج د})\text{لا ما}^3 + (\text{ج س} - \text{د}^2)\text{ما}^4$

۱۷۵ ۔ مسئلہ ۳ ۔ اگر لا ، ما کے کثیر رقمی کا کوئی غیر متغیر

$$\text{ع} + \text{ک}\,(\text{لا ماَ} - \text{لاَ ما})^{\text{ن}}$$

بنایا جائے تو ک کی مختلف قوتوں کے سر جنکو متغیروں لاَ ، ماَ کے متجانس تفاعلوں کے طور پر سمجھا گیا ہو ع کے ہم متغیر ہوتے ہیں ۔

ع کو خطی استحالہ کے ذریعہ مستحیل کرو اور فرض کرو

(ا$_{۰}$، ا$_{۱}$، ا$_{۲}$، ... ا$_{ن}$)(لا، ما)^{ن} = (اَ$_{۰}$، اَ$_{۱}$، اَ$_{۲}$، ... اَ$_{ن}$)(لاَ، ماَ)^{ن}

نیز اگر لا، ما اور لاَ، ماَ ہم استحالہ متغیر ہوں تو

لا ماَ - لاَ ما = مہ (لاَ ماَ - لاَ ما)

اسلئے (ا$_{۰}$، ا$_{۱}$، ا$_{۲}$، ... ا$_{ن}$)(لا، ما)^{ن} + ک (لا ماَ - لاَ ما)^{ن}

کو مستحیل کرنے سے یہ ہو جاتا ہے (131)

(اَ$_{۰}$، اَ$_{۱}$، اَ$_{۲}$، ... اَ$_{ن}$)(لاَ، ماَ)^{ن} + ک مہ^{ن} (لاَ ماَ - لاَ ما)^{ن}

اور ان دونوں شکلوں کا کوئی غیر متغیر فہ بنانے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

(فہ$_{۰}$، فہ$_{۱}$، ... فہ$_{ق}$)(ا، ک)^{ف}

= مہ^{ک} (فا$_{۰}$، فا$_{۱}$، فا$_{۲}$، ... فا$_{ق}$)(ا، مہ^{ن} ک)^{ف}

جس سے ثابت ہوتا ہے کہ

فہ$_{ر}$ = مہ^{ق} فا$_{ر}$

یعنی فہ$_{ر}$ ہم متغیر ہے۔

جب (لا ماَ - لاَ ما)^{ن} کی بجائے (ب$_{۰}$، ب$_{۱}$، ب$_{۲}$، ... ب$_{ن}$)(لا، ما)^{ن}

کو رکھا جاتا ہے تو ہمیں ذیل کا مسئلہ ملتا ہے جسکو اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے

اگر (ا$_{۰}$، ا$_{۱}$، ا$_{۲}$، ... ا$_{ن}$)(لا، ما)^{ن} کا ایک غیر متغیر

فہ (ا$_{۰}$، ا$_{۱}$، ا$_{۲}$، ... ا$_{ن}$) ہو تو

فہ (ا$_{۰}$ + ک ب$_{۰}$، ا$_{۱}$ + ک ب$_{۱}$، ... ا$_{ن}$ + ک ب$_{ن}$)

میں ک کے تمام سر اِن دو کثیر رقمیوں

$(\text{ا}_0 ، \text{ا}_1 ، \ldots ، \text{ا}_{\text{ن}})(\text{لا} ، \text{ما})^{\text{ن}} ، (\text{ب}_0 ، \text{ب}_1 ، \text{ب}_2 ، \ldots ، \text{ب}_{\text{ن}})(\text{لا} ، \text{ما})^{\text{ن}}$

کے نظام کے ہم متغیر ہوتے ہیں۔

اِس مسئلہ کو کئی متغیروں والے ایک ہی درجہ کے کثیر رقمیوں کی کسی تعداد کیلئے توسیع دیجا سکتی ہے۔ نیز اگر ۶ کی بجائے ف ویں درجہ کا ایک ہم متغیر و رکھا جائے تو ہم

$$\text{و} + \text{ک}(\text{لا}\,\text{ماَ} - \text{لاَ}\,\text{ما})^{\text{ف}}$$

کا کوئی غیر متغیر بنا کر نئے ہم متغیر پیدا کر سکتے ہیں۔

۱۷۶ا۔ مسئلہ ۴۔ اگر فہ (لا، ما) اور پہ (لا، ما) ہم جنس کثیر رقمی ہوں تو مقطع

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} & \dfrac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} \\[2ex] \dfrac{\text{جف پہ}}{\text{جف لا}} & \dfrac{\text{جف پہ}}{\text{جف ما}} \end{vmatrix}$$

اِن کثیر رقمیوں کا ایک ہم متغیر ہے۔

فہ اور پہ کو خطی استحالہ (131)

$$\text{لا} = \text{لہ}\,\text{لاَ} + \text{مہ}\,\text{ماَ} ، \quad \text{ما} = \text{لَہ}\,\text{لاَ} + \text{مَہ}\,\text{ماَ}$$

کے ذریعہ تبدیل کرو تو

$$\text{فا}(\text{لاَ} ، \text{ماَ}) = \text{فہ}(\text{لا} ، \text{ما}) ، \quad \text{پا}(\text{لاَ} ، \text{ماَ}) = \text{پہ}(\text{لا} ، \text{ما})$$

جن سے

$$\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لاَ}} = \text{لہ}\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} + \text{لَہ}\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} ، \quad \frac{\text{جف پا}}{\text{جف لاَ}} = \text{لہ}\frac{\text{جف پہ}}{\text{جف لا}} + \text{لَہ}\frac{\text{جف پہ}}{\text{جف ما}} ،$$

$$\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ماَ}} = \text{مہ}\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} + \text{مَہ}\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} ، \quad \frac{\text{جف پا}}{\text{جف ماَ}} = \text{مہ}\frac{\text{جف پہ}}{\text{جف لا}} + \text{مَہ}\frac{\text{جف پہ}}{\text{جف ما}} ،$$

اسلئے

$$\begin{vmatrix} \frac{\text{جف قا}}{\text{جف لا}} & \frac{\text{جف قا}}{\text{جف ما}} \\ \frac{\text{جف پا}}{\text{جف لا}} & \frac{\text{جف پا}}{\text{جف ما}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ل}\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} + \text{لَہ}\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} & \text{مہ}\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} + \text{مَہ}\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} \\ \text{لہ}\frac{\text{جف پہ}}{\text{جف لا}} + \text{لَ}\frac{\text{جف پہ}}{\text{جف ما}} & \text{مہ}\frac{\text{جف پہ}}{\text{جف لا}} + \text{مَہ}\frac{\text{جف پہ}}{\text{جف ما}} \end{vmatrix}$$

جو ذیل کی شکل میں تحویل ہو جاتا ہے

$$\text{مہ}\left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}}\,\frac{\text{جف پہ}}{\text{جف ما}} - \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}}\,\frac{\text{جف پہ}}{\text{جف لا}}\right)$$

اور مسئلہ ثابت ہو جاتا ہے۔

اس ہم متغیر کو فہ اور پہ کا جیکوبین کہتے ہیں اور اسکو اکثر شکل جے (فہ، پہ) میں لکھتے ہیں۔ ن متغیروں والے ن تفاعلوں کا جیکوبین اسی قسم کی شکل کا ایک مقطع ہے اور اسکا ہم متغیر ہونا بالکل اسی طرح کے ثبوت سے دکھایا جا سکتا ہے۔

۱۷۷۔ تفرقی علامتوں کے ذریعہ غیر متغیروں اور ہم متغیروں کا اخذ کرنا۔ اگر ہم استحالہ متغیروں (مثلاً ن نقطوں کے محدد) کا ایک سلسلہ لا، ما، لا، ما، لا، ما، ..... لان، مان ہو تو تفاعل (لا ما − لا ما)، ..... (لان مان − لان مان) خطی استحالہ سے غیر متبدل رہتے ہیں۔ اور چونکہ $\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}_{\text{خ}}}$، $\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}_{\text{خ}}}$ اسی خطی استحالہ سے مستحیل ہوتے ہیں جس سے کہ لاخ، ماخ (دیکھو دفعہ ۱۷۳) اس لئے ہم تفرق کی علامتوں کا ایک سلسلہ اخذ کر سکتے ہیں جنکو اوپر کی طرح ترکیب دینے سے حسب ذیل

علامتیں حاصل ہوتی ہیں:-

$$\left(\frac{\text{جف جف}}{\text{جف لا}_1\,\text{جف ما}_1},\ \frac{\text{جف جف}}{\text{جف لا}_1\,\text{جف ما}_2},\ \frac{\text{جف جف}}{\text{جف لا}_2\,\text{جف ما}_1}\right),\ \ldots,\ \left(\frac{\text{جف جف}}{\text{جف لا}_\text{ق}\,\text{جف ما}_\text{ق}}\right)\ \text{وغیرہ}$$

ان علامتوں کو صرف (۱، ۲)، ...، (ف، ق)، وغیرہ سے (133)
تعبیر کیا جا سکتا ہے اور انکی مدد سے ہم متغیروں اور غیر متغیروں کی ساخت اور مقابلہ کے لئے ایک مکمل نظم اصطلاح حاصل کیا جا سکتا ہے۔ مثلاً ف، چ کے جیکوبین کو شکل

$$(۱،۲)\ \text{ف}_1\ \text{چ}_2$$

میں لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\text{ف}_1 = \text{ف}(\text{لا}_1،\text{ما}_1)،\quad \text{چ}_2 = \text{چ}(\text{لا}_2،\text{ما}_2)$$

اور لاحقوں کو عمل تفرق کی تکمیل کے بعد ترک کر دیا گیا ہے۔ اسی طرح علامتی شکل

$$(۱،۲)^2\ \text{ف}_1\ \text{چ}_2$$

کو پھیلا کر ہم متغیر

$$\frac{\text{جف}^2\text{ف}\ \text{جف}^2\text{چ}}{\text{جف لا}_1^2\ \text{جف ما}_2^2} - 2\,\frac{\text{جف}^2\text{ف}}{\text{جف لا}_1\,\text{جف ما}_1}\,\frac{\text{جف}^2\text{چ}}{\text{جف لا}_2\,\text{جف ما}_2} + \frac{\text{جف}^2\text{ف}\ \text{جف}^2\text{چ}}{\text{جف ما}_1^2\ \text{جف لا}_2^2}$$

حاصل کیا جا سکتا ہے۔ عمل تفرق کی تکمیل سے بعد متغیروں کے درمیان امتیاز باقی نہیں رہتا۔

ایک تنہا کثیر رقمی کے غیر متغیر اور ہم متغیر اس طریقہ سے تحقیق کرنے میں نتیجۂ ذیل کی علامتی شکل میں حاصل ہوتا ہے:-

$$(۱،۲)^{\text{ع}_{12}}\,(۲،۳)^{\text{ع}_{23}}\,(۳،۴)^{\text{ع}_{34}}\ldots\ldots(\text{ف}،\text{ق})^{\text{ع}_\text{فق}}\ \text{ع}_1\,\text{ع}_2\,\text{ع}_3\ldots\text{ع}_\text{ن}\,\text{ع}_\text{ق}$$

جہاں (مثلاً) ع۱ اس کثیر رقمی کو تعبیر کرنے کے لئے استعمال کیا گیا ہے جو

ع میں لا اور ما کی بجائے لاز اور ماز درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے اگر اس عمل کی تکمیل کے بعد لا اور ما غائب ہو جائیں تو ہمیں ایک غیر متغیر حاصل ہوتا ہے اور اس صورت میں یہ دیکھنا آسان ہے کہ اعداد ۱، ۲، ۳، ...، ف، ق سب کو ایسی رقموں میں جیسی کہ (خ، ز) ہے ٹھیک ن مرتبہ واقع ہونا چاہیئے۔ مثلاً ضابطہ

$$(۱،۲)^{ن}\ ع_۱\ ع_۲$$

سے تمام جفت کثیر رقموں کے لئے ثنائی غیر متغیروں کا ایک سلسلہ حاصل ہوتا ہے اور بالعموم غیر متغیر کا رتبہ اجزائے ضربی ع۱، ع۲، وغیرہ کی تعداد کے مساوی ہوتا ہے۔ اسی طرح ضابطہ

$$(۲۱)^{۲}\ (۳۲)^{۲}\ (۱۳)^{۲}\ ع_۱\ ع_۲\ ع_۳$$

سے ہم درجہ ۴ م کے کثیر رقمیوں کے لئے ثلاثی غیر متغیروں کا ایک سلسلہ اخذ کر سکتے ہیں۔ چار درجی کی صورت میں عمل $(۲۱)^{۲}(۳۲)^{۲}(۱۳)^{۲}$ سے غیر متغیر

$$ا_۰ ا_۲ ا_۴ + ۲ ا_۱ ا_۲ ا_۳ - ا_۰ ا_۳^{۲} - ا_۴ ا_۱^{۲} - ا_۲^{۳}$$

حاصل ہوتا ہے۔

یہ دیکھ لیا جا سکتا ہے کہ متغیروں کا یہ باہمی تبادلہ ایک تفرقی عامل (134)
کے ذریعہ سے پورا کیا جا سکتا ہے۔ مثلاً

$$\left(لا \frac{جف}{جف\ لاز} + ما \frac{جف}{جف\ ماز}\right) ع_ز = ۱ \times ۲ \times ۳ \times \cdots \times ن\ ع_ی$$ وغیرہ وغیرہ

غیر متغیروں کو بنانے کا مصرحہ بالا طریقہ پروفیسر کیلے سے منسوب ہے۔

غیر متغیروں اور ہم متغیروں کو محسوب کرنے کا مندرجہ بالا طریقہ آسانی کے ساتھ ثلاثی اشکال پر جاری کیا جا سکتا ہے۔ کیونکہ اگر لا۱ ما۱ ی، لا۲ ما۲ ی، لا۳ ما۳ ی ہم استحالہ متغیر ہوں تو مقطعات کو ضرب

دینے کا جو قاعدہ ہے اُس سے یہ فوراً معلوم ہوتا ہے کہ اگر ہم $\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}_1}$ ، $\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}_1}$ ، $\frac{\text{جف}}{\text{جف ے}_1}$ کو $\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}_1}$ ، $\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}_1}$ ، $\frac{\text{جف}}{\text{جف ی}_1}$ کی رقوم میں بیان کریں اور دوسرے جزوی تفرقی سروں کے ساتھ بھی یہی عمل کریں تو تفرق کی علامتوں میں حسب ذیل رشتے ہوتے ہیں :-

$$\begin{vmatrix} \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}_1} & \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}_1} & \frac{\text{جف}}{\text{جف ے}_1} \\ \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}_2} & \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}_2} & \frac{\text{جف}}{\text{جف ے}_2} \\ \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}_3} & \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}_3} & \frac{\text{جف}}{\text{جف ے}_3} \end{vmatrix} = \text{م} \begin{vmatrix} \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}_1} & \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}_1} & \frac{\text{جف}}{\text{جف ی}_1} \\ \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}_2} & \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}_2} & \frac{\text{جف}}{\text{جف ی}_2} \\ \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}_3} & \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}_3} & \frac{\text{جف}}{\text{جف ی}_3} \end{vmatrix}$$

$$= \text{م} \quad (۳۲۱)$$

جہاں م استحالہ کا مقیاس ہے۔

۱۷۸ — آرنہولڈ (Aronhold) اور کلبش (Clebsch) کی ترقیم

آرنہولڈ اور کلبش نے غیر متغیروں اور ہم متغیروں کو بنانے کا ایک طریقہ بہت کامیابی کے ساتھ استعمال کیا ہے۔ یہ طریقہ کیلی کے طریقہ کے ساتھ قریب کا تعلق رکھتا ہے۔ اسلئے یہ مناسب معلوم ہوتا ہے کہ انکی ترقیم کو واضح کیا جائے اور طریق عمل کے دونوں طریقوں کا ربط دکھایا جائے۔

آرنہولڈ ن ویں درجہ کے ثنائی کثیر رقمی کو رمزاً $\text{ا}_{\text{لا}}^{\text{ن}} \equiv (\text{ا}_1 \text{لا}_1 + \text{ا}_2 \text{لا}_2)^{\text{ن}}$ سے بیان کرتا ہے۔ حاصل ضرب $\text{ا}_1^{\text{ف}} \text{ا}_2^{\text{ق}}$ فوراً ع کے سروں سے بیان ہو سکتے ہیں جبکہ ف + ق = ن۔ مثلاً

(136) ع میں $\text{لا}_1^{\text{ن}}$ کا سر $\text{ا}_1^{\text{ن}}$ سے بیان ہوتا ہے، $\text{لا}_1^{\text{ن}-1}\,\text{لا}_2$ کا سر $\text{ا}_1^{\text{ن}-1}\,\text{ا}_2$ ہے
اور علیٰ ہذا القیاس۔ لیکن جب حاصل ضرب میں قوتوں کا مجموعہ ف + ق، ن
کا ضعف نہیں ہوتا تو کوئی تعبیر حاصل نہیں ہوتی۔
اب چونکہ

$$\text{ع} = \frac{1}{1\times 2\times 3\times\cdots\times \text{ن}}\left(\text{لا}_1\frac{\text{جف}}{\text{جف}\,\text{لا}_1}+\text{لا}_2\frac{\text{جف}}{\text{جف}\,\text{لا}_2}\right)^{\text{ن}}\text{ع} = (\text{ا}_1\,\text{لا}_1+\text{ا}_2\,\text{لا}_2)^{\text{ن}}$$

اسلئے ا_1 اور ا_2 کے ن ویں درجے کے کسی متجانس تفاعل میں ہم
ا_1 اور ا_2 کی بجائے تفرقی علامتیں $\frac{\text{جف}}{\text{جف}\,\text{لا}_1}$ اور $\frac{\text{جف}}{\text{جف}\,\text{لا}_2}$ جو ع پر عمل
کرتی ہیں رکھ سکتے ہیں۔ یہاں عددی جزو ضربی کا کوئی لحاظ نہیں
رکھا گیا ہے۔

مزید براں ع میں متغیروں کے مختلف جوڑے درج کرنے کی
بجائے اور اس طرح ع_1، ع_2، ع_3 ... بنانے کی بجائے (جیسا کہ
کیلی کے طریقے میں کیا گیا ہے) آرنہولڈ کثیر دفعہ ع کو مختلف
اشکال $(\text{ا}_1\,\text{لا}_1+\text{ا}_2\,\text{لا}_2)^{\text{ن}}$، $(\text{ب}_1\,\text{لا}_1+\text{ب}_2\,\text{لا}_2)^{\text{ن}}$، $(\text{ج}_1\,\text{لا}_1+\text{ج}_2\,\text{لا}_2)^{\text{ن}}$،
.... میں لکھتا ہے جہاں $\text{ا}_1^{\text{ف}}\,\text{ا}_2^{\text{ن}-\text{ف}} = \text{ب}_1^{\text{ف}}\,\text{ب}_2^{\text{ن}-\text{ف}} = \text{ج}_1^{\text{ف}}\,\text{ج}_2^{\text{ن}-\text{ف}} = \ldots$

ع میں $\text{لا}_1^{\text{ف}}\,\text{لا}_2^{\text{ن}-\text{ف}}$ کا سر۔ کسی غیر متغیر یا ہم متغیر کے سروں کا رتبہ اس
(غیر متغیر یا ہم متغیر) کے جملے میں علامتوں ا، ب، ج، ... کی تعداد کے
مساوی ہوتا ہے۔ غیر متغیر کی ساخت میں تفرقی علامات $\left(\frac{\text{جف}}{\text{جف}\,\text{لا}_1}\frac{\text{جف}}{\text{جف}\,\text{ما}_2}-\frac{\text{جف}}{\text{جف}\,\text{لا}_2}\frac{\text{جف}}{\text{جف}\,\text{ما}_1}\right)$
جو کیلی کے طریقہ میں دی گئی ہے آرنہولڈ کی ترقیم میں اب اس علامت

(ا ب) ≡ (ا۱ ب۲ - ا۲ ب۱) سے بدلجاتی ہے۔
اس طرح، مثلاً، چار درجی کے غیر متغیر، آرنہولڈ کی ترقیم میں، یوں لکھے جاتے ہیں:-

۲ ع = (ا ب)^۴، ۶ ج = (ب ج)^۲ (ج ا)^۲ (ا ب)^۲

اور ہم متغیر جنکے صدر سر ھ اور گ ہیں یوں لکھے جاتے ہیں:-

۲ ھ = (ا ب)^۲ ا^۲ ب^۲ ، گ = (ا ب)^۲ (ج ا) ا ب^۲ ج^۳

ان جملوں کی تصدیق (ا ب) وغیرہ کی بجائے (ا۱ ب۲ - ا۲ ب۱) وغیرہ رکھنے اور پھر پھیلانے اور ع کے سر داخل کرنے سے ہو سکتی ہے۔ یہ عمل کیا جا سکتا ہے کیونکہ یہ جملے حرفوں ا۱، ا۲ کے ہر جوڑے میں چوتھے درجہ کے متجانس تفاعل ہیں۔ یہ طریقہ کیلی کے طریقہ کی طرح ایک کثیر رقمی ع پر استعمال کیا جا سکتا ہے جو متغیروں کی کسی تعداد پر مشتمل ہو۔

اب ہم اس باب کو چند مثالوں کے ساتھ جو مصرحہ صدر نظریہ کو واضح کرنے کے لئے منتخب کی گئی ہیں ختم کرتے ہیں۔ مزید معلومات کیلئے (136)
طالب علم کو حسب ذیل کتابوں کا حوالہ دیا جاتا ہے:-

سا : *Lessons Introductory to the Modern Higher Algebra*

گارڈن : *Vorlesungen uber Invariantenentheorie*

کلبش : *Theorie der binaren algebraischen Formen*

اس آخری کتاب میں علامتی طریقہ شروع سے آخر تک اختیار کیا گیا ہے۔

مثالیں

۱- کسی کثیر رقمی کا ممیز ایک غیر متغیر ہوتا ہے۔

۲- دو کثیر رقمیوں کا حاصل اسقاط اس نظام کا ایک غیر متغیر ہوتا ہے۔

۳ — دفعہ ۱۶۶ کی تعریفوں سے ثابت کرو کہ کثیر رقمی ۶ (لاماً - لاَ ما) کے تمام غیر متغیر ۶ کے ہم متغیر ہیں جہاں متغیر لاَ : ماَ ہے۔

اسکے ذریعہ سے کعبی کے ہم متغیر چار درجی کے غیر متغیروں سے جو اصلوں کی رقم میں بیان کئے گئے ہوں اخذ کرو۔

۴ — اگر کثیر رقمیوں

$$\frac{\text{فہ}(\text{لا})}{\text{لا}-\text{عہ}_1}،\ \frac{\text{فہ}(\text{لا})}{\text{لا}-\text{عہ}_2}،\ \frac{\text{فہ}(\text{لا})}{\text{لا}-\text{عہ}_3}،\ \dots،\ \frac{\text{فہ}(\text{لا})}{\text{لا}-\text{عہ}_{\text{ن}}}$$

میں سے ہر ایک کیلئے $\text{ع}_1،\ \text{ع}_2،\ \dots،\ \text{ع}_{\text{ن}}$ رتبہ ھ کا وہی غیر متغیر ہو جہاں $\text{عہ}_1،\ \text{عہ}_2،\ \dots،\ \text{عہ}_{\text{ن}}$ مساوات فہ(لا) = ۰ کی اصلیں ہیں تو ثابت کرو کہ فہ(لا) کا ایک ہم متغیر

$$\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\text{ن}} \text{ع}_{\text{ر}} (\text{لا}-\text{عہ}_{\text{ر}})^{\text{ھ}}$$

ہے۔

مثلاً اگر ج_1 سے اُس غیر متغیر ج کی تعبیر کی جائے جو چار اصلوں $\text{عہ}_2،\ \text{عہ}_3،\ \text{عہ}_4،\ \text{عہ}_5$ سے ترکیب پایا ہے (دیکھو دفعہ ۱۶۷) اور اسی طرح کی قیمتیں $\text{ج}_2،\ \text{ج}_3،\ \text{ج}_4،\ \text{ج}_5$ کے لئے استعمال کی جائیں تو ہمیں پانچ درجی کا حسب ذیل ہم متغیر ملتا ہے :-

$$\text{ج}_1(\text{لا}-\text{عہ}_1)^3+\text{ج}_2(\text{لا}-\text{عہ}_2)^3+\text{ج}_3(\text{لا}-\text{عہ}_3)^3+\text{ج}_4(\text{لا}-\text{عہ}_4)^3+\text{ج}_5(\text{لا}-\text{عہ}_5)^3$$

۵ — مساوات

$$(\text{ا}_0،\ \text{ا}_1،\ \text{ا}_2،\ \dots،\ \text{ا}_{\text{ن}})(\text{لا}،\ 1)^{\text{ن}} = 0$$

کی اصلیں $\text{عہ}_1،\ \text{عہ}_2،\ \dots،\ \text{عہ}_{\text{ن}}$ ہیں اور

$$\text{ا}_0^{\text{ن}}\ \text{قہ}_1\ \text{قہ}_2 \dots \text{قہ}_{\text{م}} = \text{فا}(\text{ا}_0،\ \text{ا}_1،\ \text{ا}_2،\ \dots،\ \text{ا}_{\text{ن}})$$

جہاں فہ۱، فہ۲، ....، فہم چند یا سب اصلوں کے ایک منطق صحیح تفاعل کی قیمتیں ہیں جو اندراج سے حاصل ہوئی ہیں۔ وہ مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں، − فہ / مف فہ کی م قیمتیں ہیں۔ یہ دیا گیا ہے کہ مف۲ فہ = ۰، (دیکھو امثلہ ۱۲، ۱۳، ۱۴ صفحہ ۱۲۶ جلد اول)

جواب :- فا(ع۱، ع۲، ع۳ ....، ع ن) = ۰

۶ — تین دو درجیوں کے درمیان متماثلہ رشتہ کو ان کے غیر متغیروں کی رقوم میں بیان کرو۔

فرض کرو

(137)

ع = ا۱ لا۲ + ۲ ب۱ لا ما + ج۱ ما۲،

و = ا۲ لا۲ + ۲ ب۲ لا ما + ج۲ ما۲،

ط = ا۳ لا۲ + ۲ ب۳ لا ما + ج۳ ما۲،

تو دو مقطعات

ا۱	ب۱	ج۱	۰
ا۲	ب۲	ج۲	۰
ا۳	ب۳	ج۳	۰
ما۲	−لا ما	لا۲	۰

ج۱	−۲ب۱	ا۱	۰
ج۲	−۲ب۲	ا۲	۰
ج۳	−۲ب۳	ا۳	۰
لا۲	۲ لا ما	ما۲	۰

کو باہم ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے

۴

ع۱۱	ع۲۱	ع۳۱	ع
ع۲۱	ع۲۲	ع۳۲	و
ع۳۱	ع۳۲	ع۳۳	ط
ع	و	ط	۰

= ۰، جہاں ۲ ع ق ن = ا ق ج ن + ا ن ج ق − ۲ ب ق ب ن،

اس مقطع کو پھیلانے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(\text{ع}_{22}\text{ع}_{33}-\text{ع}_{32}^{2})\text{ع}^{2}+(\text{ع}_{33}\text{ع}_{11}-\text{ع}_{13}^{2})\text{و}^{2}+(\text{ع}_{11}\text{ع}_{22}-\text{ع}_{21}^{2})\text{ط}^{2}$$

$$+2(\text{ع}_{13}\text{ع}_{21}-\text{ع}_{11}\text{ع}_{32})\text{و}\text{ط}+2(\text{ع}_{32}\text{ع}_{21}-\text{ع}_{22}\text{ع}_{13})\text{ط}\text{ع}$$

$$+2(\text{ع}_{32}\text{ع}_{13}-\text{ع}_{33}\text{ع}_{21})\text{ع}\text{و}\equiv 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

اب دو صورتیں قابل توجہ ہیں :-

(۱) جب تینوں دو درجی باہم موسیقی ہوتے ہیں۔ اس صورت میں $\text{ع}_{32}=0$، $\text{ع}_{13}=0$، $\text{ع}_{21}=0$ اور متماثلہ مساوات شکل ذیل اختیار کرتی ہے:-

$$\left(\frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ع}_{11}}}\right)^{2}+\left(\frac{\text{و}}{\sqrt{\text{ع}_{22}}}\right)^{2}+\left(\frac{\text{ط}}{\sqrt{\text{ع}_{33}}}\right)^{2}\equiv 0$$

(۲) جب ایک دو درجی م = ۰ سے اُن نقطوں کے درمیان کے ماسکے متعین ہوتے ہیں جو دوسرے دو ع = ۰ اور و = ۰ سے حاصل ہوتے ہیں۔ اس صورت میں $\text{ع}_{31}=0$ اور $\text{ع}_{32}=0$ اور عام مساوات (۱) میں یہ درج کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(\text{ع}_{21}^{2}-\text{ع}_{11}\text{ع}_{22})\text{ط}^{2}=\text{ع}_{33}(\text{ع}_{22}\text{ع}^{2}-2\text{ع}_{21}\text{ع}\text{و}+\text{ع}_{11}\text{و}^{2})$$

لیکن مساواتوں $\text{ع}_{31}=0$ اور $\text{ع}_{32}=0$ سے ہمیں معلوم ہوتا ہے

$$\text{ا}_{3}=\text{ک}(\text{ا}_{1}\text{ب}_{2})،\quad -2\text{ب}_{3}=\text{ک}(\text{ج}_{1}\text{ا}_{2})،\quad \text{ج}_{3}=\text{ک}(\text{ب}_{1}\text{ج}_{2})$$

اسلئے

$$۴(ا_۰ ج_۲ - ب_۱^۲) = ک^۲ \{۴(ا_۰ ب_۲)(ب_۱ ج_۰) - (ج_۰ ا_۲)^۲\}$$

یا $ع_{۲۲} = ک^۲ \{ع_{۱۱} ع_{۲۲} - ع_{۲۱}^۲\}$

اور تحویل کرنے سے، جبکہ ک = ا، ا، ط = ب(ع، و)، تو

$$ع_{۲۲} ع^۲ - ۲ ع_{۲۱} ع و + ع_{۱۱} و^۲ = -\{ب(ع، و)\}^۲$$

(۷) ثابت کرو کہ چار درجی کا ایک ہم متغیر

$\nabla(عـ_۲، عـ_۳، عـ_۴)(لا - عـ_۱)^۴$ ہے

ہے جہاں عـ۱، عـ۲، عـ۳، ...، عـر کے مربع دار فرقوں کے حاصل ضرب کو $\nabla(عـ_۱، عـ_۲، ...، عـ_ر)$ سے تعبیر کیا گیا ہے۔

(138) (۸) ثابت کرو کہ یہ شرط کہ ن ویں درجہ کی مساوات کی چار اصلیں ایک خط مستقیم پر نقطوں کا ایک موافقی نظام متعین کریں $\frac{۱}{۲}(ن-۱) \times (ن-۲)(ن-۳)$ ویں درجہ کے ایک غیر متغیر کو صفر کے مساوی رکھکر بیان کیجا سکتی ہے۔

(۹) اگر کثیر رقمی $(ا_۰، ا_۱، ...، ا_ن)(لا، ۱)^ن$ کا کوئی نیم غیر متغیر $ف(ا_۰، ا_۱، ا_۲، ...، ا_ن)$ ہو تو ثابت کرو کہ $\frac{جف}{جا_ن}$ بھی ایک نیم غیر متغیر ہے۔

(۱۰) ثابت کرو کہ کثیر رقمی $(ا_۰، ا_۱، ا_۲، ...، ا_ن)(لا، ۱)^ن$ کے نیم غیر متغیروں

$$ا_۰ ا_۲ - ا_۱^۲،\quad ا_۰ ا_۴ - ۴ ا_۱ ا_۳ + ۳ ا_۲^۲،\quad ا_۰^۲ ا_۳ - ۳ ا_۰ ا_۱ ا_۲ + ۲ ا_۱^۳$$

سے وہ ہم متغیر پیدا ہوتے ہیں جنکے درجے

۲ن − ۴، ۲ن − ۸، ۳ن − ۶

ہیں۔

۱۱ — ثابت کرو کہ کسی کثیر رقمی کی اصلوں کے فرقوں کے مربعوں کی مساوات میں یا بالفاظ آخر رقم کے سر سے متغیروں میں چوتھے درجہ کا ایک ہم متغیر حاصل ہوتا ہے۔

۱۲ — ثابت کرو کہ ایک ہی کثیر رقمی کے دو ہم متغیروں کا حاصل ضرب اس شکل

$$\text{فہ پہ} + \text{لا}\,\text{عف}(\text{فہ پہ}) + \frac{\text{لا}^{2}}{2\times 1}\,\text{عف}^{2}(\text{فہ پہ}) + \dots$$

میں لکھا جا سکتا ہے جہاں فہ اور پہ ہم متغیروں کے ماخذ ہیں۔

(دیکھو دفعہ ۱۴۹) مسٹر ایم۔ رابرٹس

۱۳ — بالخصوص ثابت کرو کہ کثیر رقمی

$$(\text{ا}_0، \text{ا}_1، \text{ا}_2، \dots، \text{ا}_{\text{ن}})(\text{لا}، 1)^{\text{ن}}$$

کی م ویں قوت جملہ

$$\text{ا}_{\text{ن}}^{\text{م}} + \text{لا}\,\text{عف}(\text{ا}_{\text{ن}}^{\text{م}}) + \frac{\text{لا}^{2}}{2\times 1}\,\text{عف}^{2}(\text{ا}_{\text{ن}}^{\text{م}}) + \frac{\text{لا}^{3}}{3\times 2\times 1}\,\text{عف}^{3}(\text{ا}_{\text{ن}}^{\text{م}}) + \dots$$

سے تعبیر کیا جا سکتی ہے۔

۱۴ — ہم متغیر کی دونوں تعریفوں سے ثابت کرو کہ کسی ہم متغیر کا ہم متغیر اصلی کثیر رقمی یا کثیر رقمیوں کا ہم متغیر ہے۔

۱۵ — اگر مساواتوں

$$\text{ع} \equiv (\text{ا}_0، \text{ا}_1، \text{ا}_2، \dots، \text{ا}_{\text{م}})(\text{لا}، 1)^{\text{م}} = 0، \quad \text{و} \equiv (\text{ب}_0، \text{ب}_1، \text{ب}_2، \dots، \text{ب}_{\text{ن}})(\text{لا}، 1)^{\text{ن}} = 0$$

کی اصلیں $\text{عہ}_1، \text{عہ}_2، \dots، \text{عہ}_{\text{م}}$ اور $\text{بہ}_1، \text{بہ}_2، \text{بہ}_3، \dots، \text{بہ}_{\text{ن}}$ ہوں تو نظام ع اور و کا ایک ہم متغیر ان کی اصلوں کے فرقوں کے سادہ ترین تفاعل سے یعنی

$$\Sigma(\text{عہ}_{\text{ق}} - \text{بہ}_{\text{ق}}) = \text{ن}\,\Sigma\,\text{عہ} - \text{م}\,\Sigma\,\text{بہ}$$

سے ماخذ کرو۔

یہ سوال حل ہو جائیگا اگر ہم جملہ

$$\text{ع و} \equiv \frac{\text{عف} - \text{ہق}}{(\text{لا} - \text{عق})(\text{لا} - \text{ہق})}$$

کو ع اور و کے سروں کی رقوم میں بیان کریں۔
اس مقصد کے لئے ہم لکھ سکتے ہیں

$$\equiv \frac{\text{عق} - \text{ہق}}{(\text{لا} - \text{عق})(\text{لا} - \text{ہق})} \equiv \frac{\text{ع}}{\text{لا} - \text{ع}} \equiv \frac{1}{\text{لا} - \text{ہ}} - \equiv \frac{\text{ہ}}{\text{لا} - \text{ہ}} \equiv \frac{1}{\text{لا} - \text{ع}}$$

اور اگر ع اور و کو لا اور ما کے متجانس تفاعلوں کے طور پر لکھا جائے تو

$$\equiv \frac{1}{\text{لا} - \text{ع ما}} = \frac{\text{جف لوک ع}}{\text{جف لا}} ، \equiv \frac{\text{ع}}{\text{لا} - \text{ع ما}} = -\frac{\text{جف لوک ع}}{\text{جف ما}} ، \text{وغیرہ}$$

(139) اسلئے ان قیمتوں کو آخری مساوات میں لکھنے سے

$$\text{ع و} \equiv \frac{\text{عق} - \text{ہق}}{(\text{لا} - \text{عق ما})(\text{لا} - \text{ہق ما})} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} - \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}$$

جو ع اور و کا جیکوبین ہے۔ یہ بھی دیکھ لینا چاہئے کہ ج (ع ، و) کا صدر سر م ن (اب − اب) ہے۔

۱۶ — ثابت کرو کہ دو کثیر رقمیوں کے مشترک اجزائے ضربی انکے جیکوبین ج (ع ، و) کے دوہرے اجزائے ضربی ہوتے ہیں جب کثیر رقمی ایک ہی درجہ ن کے ہوں۔

فرض کرو ع ≡ پ ق ، و ≡ پ ہ جہاں پ = ل لا + م ما۔ ان کثیر رقمیوں کا جیکوبین ج (ع ، و) بناؤ تو معلوم ہوگا کہ اسکا ایک حصہ پ^2 سے تقسیم پذیر ہے اور دوسرا حصہ جو ظاہرا صرف پ سے تقسیم پذیر معلوم ہوتا ہے شکل ذیل میں لکھا جا سکتا ہے (یولر کا متجانس تفاعلوں کا

مسئلہ استعمال کرنے اور عددی جزو ضربی کو ترک کرنے سے):—

$$\left(\text{لا}\,\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} + \text{ما}\,\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}}\right)\left(\text{ل}\,\frac{\text{جف پہ}}{\text{جف ما}} - \text{م}\,\frac{\text{جف پہ}}{\text{جف لا}}\right) + \left(\text{لا}\,\frac{\text{جف پہ}}{\text{جف لا}}\right.$$

$$\left.+\ \text{ما}\,\frac{\text{جف پہ}}{\text{جف ما}}\right)\left(\text{م}\,\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} - \text{ل}\,\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}}\right)$$

اور یہ ' (ل لا + م ما) سبجے (فہ ' پہ) سے حاصل ہے —

۱۷ — ثابت کرو کہ لہ ۶ + مہ و کے ۲ (ن - ۱) دوہرے اجزائے ضربی جو لہ اور مہ کو بدلنے سے حاصل ہوتے ہیں سبجے (۶ ' و) کے اجزائے ضربی ہیں جہاں ۶ اور و دونوں ن ویں درجہ کے ہیں۔

۱۸ — ۶ = . ' و = . ' $\frac{\text{جف سبجے (۶ ' و)}}{\text{جف لا}}$ = . ' $\frac{\text{جف سبجے (۶ ' و)}}{\text{جف ما}}$ = .

کے درمیان میں تحلیلی طور پر اسقاط کرنے سے دکھاؤ کہ ۶ اور و کا حاصل اسقاط معلوم کرو —

۱۹ — اگر

(اٖ ' اٖ ' اٖ ' ... ' اٖ) (لا ' ما)$^{\text{ن}}$ '

(ب ' ب ' ب ' ... ' ب) (لا ' ما)$^{\text{ق}}$ '

عن کے دو ہم متغیر ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے جیکوبین کا پہلا سر

ن ق (اٖ ب - اٖ ب)

ہے —

۲۰ — اگر

(اٖ ' اٖ ' اٖ ' ... ' اٖن) (لا ' ما)$^{\text{ق}}$ '

(ب ' ب ' ب ' ... ' بن) (لا ' ما)$^{\text{ف}}$ '

(ج ' ج ' ج ' ... ' جن) (لا ' ما)$^{\text{ف}}$ '

۶ ن کے تین ہم متغیر ہوں تو ثابت کرو کہ مقطع

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_2 & \text{ا}_1 & \text{ا} \\ \text{ب}_2 & \text{ب}_1 & \text{ب} \\ \text{ج}_2 & \text{ج}_1 & \text{ج} \end{vmatrix}$$

ایک نیم غیر متغیر ہے۔

(140)

ستر ہواں باب

دو درجی، تین درجی اور چار درجی کے ہم متغیر اور غیر متغیر

۱۷۹ — دو درجی ۔ دو درجی کا صرف ایک غیر متغیر ہوتا ہے اور خود دو درجی کے علاوہ کوئی دوسرا ہم متغیر نہیں ہوتا۔

کیونکہ اگر دو درجی مساوات

$$\text{ع} \equiv \text{ا لا}^{۲} + ۲\,\text{ب لا} + \text{ج} = ۰$$

کی اصلیں عہ اور بہ ہوں تو اِنکے فرقوں کے تفاعل جن سے غیر متغیر اور ہم متغیر حاصل ہو سکتے ہیں صرف (عہ - بہ) کی جفت قوتیں ہیں جن کا نمونہ $(\text{عہ} - \text{بہ})^{۲\text{ف}}$ ہے۔ (عہ - بہ) کی طاق قوتیں سروں کی رقوم میں منطق شکل میں بیان نہیں ہو سکتیں۔

اسلئے جملہ

$$\text{ع}^{۲\text{ف}}\left(\frac{1}{\text{عہ} - \text{لا}} - \frac{1}{\text{بہ} - \text{لا}}\right)^{۲\text{ف}}$$

کو سروں کی رقوم میں بیان کر کے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ دو درجی کا صرف ایک خاص غیر متغیر $\text{ا ج} - \text{ب}^{۲}$ ہے اور خود ع سے جداگانہ ہم متغیر موجود نہیں ہے۔

۱۸۰ — تین درجی اور اسکے ہم متغیر — دفعہ ہذا میں کعبی کے ہم متغیروں پر ان اصولوں کے تحت بحث کیجائیگی جو قبل ازیں سمجھا دئے گئے ہیں اور دفعہ آئندہ میں غیر متغیروں اور ہم متغیروں کی ٹھیک ٹھیک تعداد معلوم کیجائیگی —

کعبی کی صورت میں ہم متغیر حاصل کرنیکا سب سے آسان طریقہ یہ ہے کہ اصلوں کے فرقوں کے تفاعل میں

عہ، بہ، جہ کی بجائے بہ جہ + عہ لا، جہ عہ + بہ لا، عہ بہ + جہ لا درج کیا جائے۔ ایسا کرنے میں کسروں سے واسطہ نہ پڑیگا کیونکہ عہ - بہ کو مستحیل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{\text{عہ} - \text{لا}} - \frac{1}{\text{بہ} - \text{لا}} = \frac{-(\text{بہ جہ} + \text{عہ لا}) + (\text{جہ عہ} + \text{بہ لا})}{(\text{لا} - \text{عہ})(\text{لا} - \text{بہ})(\text{لا} - \text{جہ})}$$

اور کسروں کو دور کرنے سے ہم اوپر کے استحالہ پر پہنچتے ہیں (فرقوں کے (141)
تفاعل ھ یا گ دونوں کے لئے رتبہ اور وزن مساوی ہیں)۔ فرقوں کے تفاعلوں کو مستحیل کرنیکا یہ طریقہ اب کعبی کے ہم متغیروں پر استعمال کیا جائیگا —

(۱) دو درجی ہم متغیر یا ھیسوی $\text{ھہ}_{\text{لا}}$ —

مساوات

$$\text{ا}_۰^۲(\text{عہ} + \text{سہ بہ} + \text{سہ}^۲\text{جہ})(\text{عہ} + \text{سہ}^۲\text{بہ} + \text{سہ جہ}) = ۹(\text{ا}_۱^۲ - \text{ا}_۰\text{ا}_۲)$$

کی دونوں جانبوں کو مستحیل کرنے سے

$$\text{ا}_۰^۲\left\{(\text{عہ} + \text{سہ بہ} + \text{سہ}^۲\text{جہ})\,\text{لا} + \text{بہ جہ} + \text{سہ جہ عہ} + \text{سہ}^۲\text{عہ بہ}\right\}$$

$$\times\left\{(\text{عہ} + \text{سہ}^۲\text{بہ} + \text{سہ جہ})\,\text{لا} + \text{بہ جہ} + \text{سہ}^۲\text{جہ عہ} + \text{سہ عہ بہ}\right\} = ۹(\text{ع}_۲^۲ - \text{ع}_۳\text{ع}_۱)$$

اس طرح ثابت ہوتا ہے کہ

$$ھ_{لا} \equiv (ا_{۰} ا_{۲} - ا_{۱}^{۲}) لا^{۲} + (ا_{۰} ا_{۳} - ا_{۱} ا_{۲}) لا + (ا_{۱} ا_{۳} - ا_{۲}^{۲})$$

کے اجزائے ضربی

$$ل لا + ل_{۱} \quad \text{اور} \quad م لا + م_{۱} \qquad (\text{دفعہ } ۵۹)$$

ہیں جہاں

$$ل_{۱} \equiv ب ج + س ج ع + س^{۲} ع ب ، \quad م_{۱} \equiv ب ج + س^{۲} ج ع + س ع ب$$

سروں کی رقوم میں ہیسوی کی شکل سے یا دفعہ ۴۳ کے رشتوں سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ جب کعبی کامل مکعب ہوتا ہے تو ہیسوی کا ہر سر تماثلاً معدوم ہو جاتا ہے۔

(۲) کعبی ہم متغیر $گ_{لا}$۔

دفعہ ۵۹ سے ہمیں معلوم ہے کہ

$$ا_{۰}^{۳} \{ (ع + س ب + س^{۲} ج)^{۳} + (ع + س^{۲} ب + س ج)^{۳} \}$$
$$= -۲۷ (ا_{۰}^{۲} ا_{۳} + ۲ ا_{۱}^{۳} - ۳ ا_{۰} ا_{۱} ا_{۲})$$

اس مساوات کی دونوں جانبوں کو حسب سابق مستحیل کرنے سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ

$$ا_{۰}^{۳} \{ (ل لا + ل_{۱})^{۳} + (م لا + م_{۱})^{۳} \} = -۲۷ (ع_{۰}^{۲} ع_{۳}$$
$$+ ۲ ع_{۱}^{۳} - ۳ ع_{۰} ع_{۱} ع_{۲}) = ۲۷ گ_{لا} ،$$

جہاں گ سے وہ ہم متغیر تعبیر ہوتا ہے جو فرقوں کے تفاعل گ سے اسطرح بنتا ہے کہ گ_لا سے اخذ کردہ ماخذ پر دفعہ ۱۶۹ کی طرح عمل کیا جائے (علامت بدل دیگئی ہے تاکہ گ صدر سر ہو سکے) ہم آسانی کے ساتھ حاصل کرتے ہیں (دیکھو مثال ۳ دفعہ ۱۶۹)

$$\text{گ}_{\text{لا}} = (\text{ا}_{\text{ب}}^{۲}\,\text{ا}_{۳} - ۳\,\text{ا}_{\text{ب}}\,\text{ا}_{۱}\,\text{ا}_{۲} + ۲\,\text{ا}_{۱}^{۳})\,\text{لا}^{۳} + ۳(\text{ا}_{\text{ب}}\,\text{ا}_{۱}\,\text{ا}_{۳} + \text{ا}_{۱}^{۲}\,\text{ا}_{۲} - ۲\,\text{ا}_{\text{ب}}\,\text{ا}_{۲}^{۲})\,\text{لا}^{۲}$$

$$-(\text{ا}_{۳}^{۲}\,\text{ا}_{\text{ب}} - ۳\,\text{ا}_{۳}\,\text{ا}_{۲}\,\text{ا}_{۱} + ۲\,\text{ا}_{۲}^{۳}) - ۳(\text{ا}_{۳}\,\text{ا}_{۲}\,\text{ا}_{\text{ب}} + \text{ا}_{۲}^{۲}\,\text{ا}_{۱} - ۲\,\text{ا}_{۳}\,\text{ا}_{۱}^{۲})\,\text{لا}$$

$(\text{ل}\,\text{لا} + \text{ل}_{۱})^{۳} + (\text{م}\,\text{لا} + \text{م}_{۱})^{۳}$ کو تحلیل کرنے سے ہم $\text{گ}_{\text{لا}}$ کے (142)

اجزائے ضربی حاصل کر سکتے ہیں۔ یہ اجزائے ضربی زیادہ آسانی کے ساتھ اس طرح حاصل کئے جا سکتے ہیں:- چونکہ گ کے اجزائے ضربی ب + ج − ۲ع، ج + ع − ۲ب، ع + ب − ۲ج ہیں اسلئے

$\text{گ}_{\text{لا}}$ کے اجزائے ضربی ہیں

$$\frac{۱}{\text{ب}-\text{لا}} + \frac{۱}{\text{ج}-\text{لا}} - \frac{۲}{\text{ع}-\text{لا}}،\quad \frac{۱}{\text{ج}-\text{لا}} + \frac{۱}{\text{ع}-\text{لا}} - \frac{۲}{\text{ب}-\text{لا}}،\quad \frac{۱}{\text{ع}-\text{لا}} + \frac{۱}{\text{ب}-\text{لا}} - \frac{۲}{\text{ج}-\text{لا}}$$

جبکہ کسریں دور کردیجائیں۔

مساوات $\text{گ}_{\text{لا}} = ۰$ کی ہندسی تعبیر صریحاً حسب ذیل ملتی ہے:-

اگر ایک خط مستقیم پر تین نقطے ا، ب، ج لئے جائیں جو مساوات ع = ۰ سے متعین ہوتے ہیں، اور تین نقطے اَ، بَ، جَ ایسے لئے جائیں کہ اَ کا موسیقی مزدوج بلحاظ ب اور ج کے ا ہے، بَ کا بلحاظ ج اور ا کے بَ، جَ کا بلحاظ ا اور ب کے جَ

تو یہ تین نقطے ا، ب، ج مساوات $گ_{لا} = ۰$ سے متعین ہوتے ہیں۔ (دیکھو مثال ۱۳ صفحہ ۱۲۰ جلد اول)۔

(۳) کعبی کو دو مکعبوں کے فرق کے طور پر بیان کرنا۔

ھیسوی کے اجزائے ضربی کے ذریعہ کعبی کو دو مکعبوں کے فرق میں حسب ذیل طریقہ پر بیان کیا جا سکتا ہے:۔

$$(ل\,لا + ل_{۱})^{۳} - (م\,لا + م_{۱})^{۳} = ۲۷\ ۶ \frac{\sqrt{\text{ھ}}}{\text{ا}^{۳}}،$$

کیونکہ مثال ۶ صفحہ ۱۶۹ جلد اول کے مطابق

$$ل^{۳} - م^{۳} = \sqrt{-۲۷}\ (بہ - جہ)(جہ - عہ)(عہ - بہ)$$

اس مساوات کو حسب سابق تحویل کرنے سے اسکی دائیں جانب ہو جاتی ہے

$$(ل\,لا + ل_{۱})^{۳} - (م\,لا + م_{۱})^{۳}$$

اور مساوات کی بائیں جانب ہو جاتی ہے

$$\sqrt{-۲۷}\ (بہ - جہ)(جہ - عہ)(عہ - بہ)(لا - عہ)(لا - بہ)(لا - جہ)$$

اوپر پہلی مساواتوں سے اندراج کرنے سے

$$(ل\,لا + ل_{۱})^{۳} - (م\,لا + م_{۱})^{۳} = ۲۷ \frac{۶}{\text{ا}^{۳}} \sqrt{گ^{۲} + ۴\,\text{ھ}^{۳}}$$

$$= ۲۷ \frac{۶\sqrt{\text{ھ}}}{\text{ا}^{۳}}$$

(۴) کعبی اور اسکے ہم متغیروں کے درمیان رشتہ۔

انمیں ذیل کا ربط موجود ہوتا ہے:۔

(143)

گ۲لا + ۴ ھ۳لا = Δ ع۲

کیونکہ مثال ۶ صفحہ ۱۶۹ جلد اول سے

ا۴ (ب - ج)۲ (ج - ع)۲ (ع - ب)۲ = - ۲۷ (گ۲ + ۴ ھ۳) = - ۲۷ ا۴ Δ

اور اس مساوات کو حسب سابق مستحیل کرنے سے

ا۶ (ب - ج)۲ (ج - ع)۲ (ع - ب)۲ (لا - ع)۲ (لا - ب)۲ (لا - ج)۲ = - ۲۷ (گ۲لا + ۴ ھ۳لا)

اسلئے

Δ ع۲ = گ۲لا + ۴ ھ۳لا

تماثل گ۲ + ۴ ھ۳ = ا۴ Δ میں ا، ا، وغیرہ کی بجائے ع، ع۱، ع۲ وغیرہ درج کرنے سے بھی مندرجہ بالا نتیجہ فوراً حاصل ہوتا ہے۔

(۵) کعبی کا حل۔

جملہ

(ع √Δ + گلا)^(۱/۳) + (ع √Δ - گلا)^(۱/۳)

ع کا ایک خطی جزو ضربی ہے۔

کیونکہ (۲) اور (۳) کے روابط سے

۲ ا۳ (ل لا + ل۱)۳ = ۲۷ (ع √Δ + گلا)،

-۲ ا۳ (م لا + م۱)۳ = ۲۷ (ع √Δ - گلا)

اور چونکہ ع کا ایک جزو ضربی

(ل لا + ل۱) - (م لا + م۱)

ہے اسلئے مسئلہ ثابت ہے۔

کعبی کے حل کی یہ شکل پروفیسر کیلی نے حاصل کی تھی۔

۱۸۱ — کعبی کے غیر متغیروں اور ہم متغیروں کی تعداد۔ چار درجی کی بحث شروع کرنے سے پیشتر ہم وہ مسئلہ لیتے ہیں جسکا حوالہ دفعہ ۱۶۲ میں دیا گیا تھا یعنے غیر تابع ہم متغیروں اور غیر متغیروں کی تعداد کی تعیین۔ اس مقصد کے لئے کعبی کی صورت میں ہمیں حسب ذیل مسئلہ ملتا ہے :-

کعبی کے صرف دو ہم متغیر ہوتے ہیں جنکی صدر رقمیں ھ اور گ ہیں۔ اور صرف ایک غیر متغیر یعنے ممیز △ جہاں

$$\text{ا}^2\,\Delta = \text{گ}^2 + 4\,\text{ھ}^3 \text{ ، یا } \Delta = \text{ا}^2\text{د}^2 + 4\,\text{ا}\,\text{ج}^3 - 6\,\text{ا}\,\text{ب}\,\text{ج}\,\text{د} + 4\,\text{د}\,\text{ب}^3 - 3\,\text{ب}^2\text{ج}^2$$

اس کا ثبوت دفعہ ۱۶۲ کے مسئلہ سے فوراً اخذ ہو سکتا ہے۔ فرض کرو کہ اصلوں کے فرقوں کا کوئی صحیح متشاکل تفاعل (ھ رتبہ کا) ف(عہ، ب، جہ) ہے جو سروں کے ذریعہ منطق شکل میں بیان ہو سکتا ہے۔ اس مسئلہ میں جسکا حوالہ اوپر دیا گیا ہے یہ ثابت کیا گیا ہے کہ اھ ف کی شکل

گ فا(ا، ھ، △)، یا فا(ا، ھ، △)

ہے بموجب اسکے کہ ف، اصلوں کا طاق یا جفت تفاعل ہو۔ اسلئے پہلی صورت میں یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اصلوں میں طاق درجہ کا غیر متغیر نہیں ہو سکتا کیونکہ گ فا(ا، ھ، △) وہی تفاعل نہیں رہتا جب، ا، ب، ج، د کو علی الترتیب د، ج، ب، ا میں بدلا جاتا ہے۔ (144)

دوسری صورت میں جفت درجہ کا غیر متغیر صرف ایک ہو گا جس کو △ کی قوت ہونا چاہیے، کیونکہ اگر فا(ا، ھ، △) میں △ کے علاوہ ا یا ھ شامل ہوں تو یہ وہی تفاعل نہیں رہ سکتا جبکہ سروں کا باہمی تبادلہ اوپر کی طرح عمل میں آتا ہے۔

نیز کعبی صرف دو جداگانہ ہم متغیر رکھتا ہے کیونکہ یہ ثابت کردیا گیا ہے کہ ہر ثیم غیر متغیر ا۰^ھ فہ کی شکل

$$\text{فا}(\text{ا}_0,\ \text{ھ},\ \Delta)\ \text{یا}\ \text{گ}\ \text{فا}(\text{ا}_0,\ \text{ھ},\ \Delta)$$

ہے اور اسلئے متناظر ہم متغیر جو ثیم غیر متغیر کو صدر رقم قرار دیکر بنایا گیا ہو

$$\text{فا}(\text{ع},\ \text{ھ}_{\text{لا}},\ \Delta)\ \text{یا}\ \text{گ}_{\text{لا}}\ \text{فا}(\text{ع},\ \text{ھ}_{\text{لا}},\ \Delta)$$

کے طور پر بیان ہو سکنا چاہئے ۔ یعنے ہر ہم متغیر $\text{ھ}_{\text{لا}}$ اور $\text{گ}_{\text{لا}}$ کی رقوم میں ع اور ∆ کے ساتھ منطق صحیح شکل میں بیان ہو سکتا ہے یا دوسرے الفاظ میں صرف دو جداگانہ ہم متغیر ہیں ۔

۱۸۲ ۔ چار درجی ۔ اسکے ہم متغیر اور غیر متغیر ۔ ہم یہ بتا چکے ہیں کہ چار درجی کے دو غیر متغیر ع اور جے ہیں (دفعہ ۱۶۷)۔ اصلو فرقوں کے تفاعلوں ھ اور گ سے ہم دو ہم متغیر $\text{ھ}_{\text{لا}}$ اور $\text{گ}_{\text{لا}}$ اخذ کر سکتے ہیں جنکے صدر سر ھ اور گ ہیں ۔ کیونکہ ربط

$$\text{ا}_0^2 \sum (\text{عہ}-\text{بہ})^2 = -48(\text{ا}_0\text{ا}_2-\text{ا}_1^2)$$

سے دفعہ ۱۶۷ کے عمل کے ذریعہ ہم اخذ کرتے ہیں

$$\text{ا}_0^2 \sum (\text{عہ}-\text{بہ})^2(\text{لا}-\text{جہ})^2(\text{لا}-\text{ضہ})^2 = -48(\text{ع}\,\text{ع}_4-\text{ع}_2^2)$$

اور $\text{ع}\,\text{ع}_4-\text{ع}_2^2$ کو پھیلانے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{ھ}_{\text{لا}} = (\text{ا}_0\text{ا}_2-\text{ا}_1^2)\text{لا}^4 + 2(\text{ا}_0\text{ا}_3-\text{ا}_1\text{ا}_2)\text{لا}^3 + (\text{ا}_0\text{ا}_4+2\text{ا}_1\text{ا}_3-3\text{ا}_2^2)\text{لا}^2 + 2(\text{ا}_1\text{ا}_4-\text{ا}_2\text{ا}_3)\text{لا} + (\text{ا}_2\text{ا}_4-\text{ا}_3^2)$$

اسی طرح چونکہ

$$گ \equiv ا_۰^۲ ا_۳ + ۲ ا_۱^۳ - ۳ ا_۰ ا_۱ ا_۲$$

اسلئے ہم متغیر

$$-گ_{لا} \equiv ع_۰^۲ ع_۳ + ۲ ع_۱^۳ - ۳ ع_۰ ع_۱ ع_۲ \qquad (145)$$

حاصل ہوتا ہے جو چھٹے درجہ میں تحویل ہو جاتا ہے، اور اگر اس کو اس طرح لکھا جائے

$$گ_{لا} \equiv ا_۰ لا^۶ + ا_۱ لا^۵ + ا_۲ لا^۴ + ا_۳ لا^۳ + ا_۴ لا^۲ + ا_۵ لا + ا_۶$$

تو اوپر کی قیمت کو پھیلانے سے یا، زیادہ آسانی کے ساتھ، ماخذ $ا_۶$ بنانے سے اور دفعہ ۱۶۹ کے متواتر اعمال کی تکمیل کرنے سے سروں کی حسب ذیل قیمتیں حاصل ہوتی ہیں :-

$$ا_۶ = -ا_۱ ا_۴^۲ + ۳ ا_۲ ا_۳ ا_۴ - ۲ ا_۳^۳ ،\quad ا_۵ = -ا_۰ ا_۴^۲ - ۲ ا_۱ ا_۳ ا_۴ - ۶ ا_۲ ا_۳^۲ + ۹ ا_۲^۲ ا_۴ ،$$

$$ا_۴ = -۵ ا_۰ ا_۳ ا_۴ - ۱۰ ا_۱ ا_۳^۲ + ۱۵ ا_۱ ا_۲ ا_۴ ،\quad ا_۳ = -۱۰ ا_۰ ا_۳^۲ + ۱۰ ا_۱^۲ ا_۴ ،$$

$$ا_۲ = ۵ ا_۰ ا_۱ ا_۴ + ۱۰ ا_۱^۲ ا_۳ - ۱۵ ا_۰ ا_۲ ا_۳ ،\quad ا_۱ = ا_۰^۲ ا_۴ + ۲ ا_۰ ا_۱ ا_۳ + ۶ ا_۱^۲ ا_۲ - ۹ ا_۰ ا_۲^۲ ،$$

$$ا_۰ = ا_۰^۲ ا_۳ - ۳ ا_۰ ا_۱ ا_۲ + ۲ ا_۱^۳ ،$$

یہاں یہ بات دیکھی جا سکتی ہے کہ جب، $ا_۳$ معلوم ہو جاتا ہے تو $ا_۴$، $ا_۵$ اور $ا_۶$ سے لاحقوں کو انکی متمم قیمتوں میں بدل کر اور پورے جملہ کی علامت دفعہ ۱۶۸ کے مطابق تبدیل کرکے $ا_۲$، $ا_۱$ اور $ا_۰$ حاصل کئے جا سکتے ہیں ۔

اب ہم دفعات آئندہ میں چار درجی کے اِن دو ہم متغیروں کے اہم خواص پر بحث کرینگے ۔*

۱۸۳ — چھ درجی ہم متغیر کے دو درجی اجزائے ضربی

چونکہ $گ_{لا}$ کے دو درجی اجزائے ضربی ذیل کی بحث میں نمایاں حصہ لیتے ہیں اسلئے پہلے ہم اِن اجزائے ضربی کے لئے چار درجی کی اصلوں کی رقوم میں جملے معلوم کرتے ہیں اور انکے اہم خواص اخذ کرتے ہیں

عہ، بہ، جہ، ضہ کی رقوم میں گ کے اجزائے ضربی چونکہ یہ ہیں

بہ + جہ − عہ − ضہ، جہ + عہ − بہ − ضہ، عہ + بہ − جہ − ضہ،

اسلئے اِن سے $گ_{لا}$ کے اجزائے ضربی عہ، بہ، جہ، ضہ کی بجائے علی الترتیب $\frac{1}{لا - عہ}$، $\frac{1}{لا - بہ}$، $\frac{1}{لا - جہ}$، $\frac{1}{لا - ضہ}$ درج کرکے اور کسروں کو دور کرنے کے لئے $\frac{ع}{ا}$ سے ہر جزو ضربی کو ضرب دیکر حاصل کئے جاتے ہیں ۔

(140) پس اِن اجزائے ضربی کو ء، و، ط سے تعبیر کریں تو

$$\left.\begin{aligned} اء &= ع\left(\frac{1}{لا-بہ} + \frac{1}{لا-جہ} - \frac{1}{لا-عہ} - \frac{1}{لا-ضہ}\right) \\ او &= ع\left(\frac{1}{لا-جہ} + \frac{1}{لا-عہ} - \frac{1}{لا-بہ} - \frac{1}{لا-ضہ}\right) \\ اط &= ع\left(\frac{1}{لا-عہ} + \frac{1}{لا-بہ} - \frac{1}{لا-جہ} - \frac{1}{لا-ضہ}\right) \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (1)$$

* دیکھو پروفیسر بال کا مضمون، کوارٹرلی جرنل آف میتھامیٹکس جلد ہفتم صفحہ ۳۲۸ میں ۔ اس مضمون میں چار درجی کے مختلف حلوں پر کامل اور اہم بحث کیگئی ہے ۔

اب اگر ع، و، ط کی قیمتوں کو لا کی قوتوں میں ترتیب دیا جائے تو

ع = (بہ + جہ − عہ − ضہ) لا^{۲} − ۲ (بہ جہ − عہ ضہ) لا + بہ جہ (عہ + ضہ) − عہ ضہ (بہ + جہ)

و = (جہ + عہ − بہ − ضہ) لا^{۲} − ۲ (جہ عہ − بہ ضہ) لا + جہ عہ (بہ + ضہ) − بہ ضہ (جہ + عہ)   (۲)

ط = (عہ + بہ − جہ − ضہ) لا^{۲} − ۲ (عہ بہ − جہ ضہ) لا + عہ بہ (جہ + ضہ) − جہ ضہ (عہ + بہ)

اور اس لئے

۳۲ گ$_{لا}$ = ا^{۳} ع و ط ،

مساواتوں (۱) سے ہم آسانی کے ساتھ معلوم کرتے ہیں

و = (عہ − ضہ)(لا − بہ)(لا − جہ) − (بہ − جہ)(لا − عہ)(لا − ضہ)،

ط = (عہ − ضہ)(لا − بہ)(لا − جہ) + (بہ − جہ)(لا − عہ)(لا − ضہ)

ان سے اور متشابہ مساواتوں سے ہمیں حاصل ہوتا ہے:

(و^{۲} − ط^{۲}) / (مہ − نہ) = (ط^{۲} − ع^{۲}) / (نہ − لہ) = (ع^{۲} − و^{۲}) / (لہ − مہ) = ۴ ع / ا ،   (۳)

جہاں لہ، مہ، نہ کے وہی معمولی معنے ہیں (مثال ۱۷ دفعہ ۲۷)۔
اور اسلئے

(مہ − نہ) ع^{۲} = (لہ − نہ) و^{۲} − (لہ − مہ) ط^{۲}

پس (مہ − نہ) ع^{۲} = (و $\sqrt{}$(لہ − نہ) + ط $\sqrt{}$(لہ − مہ)) (و $\sqrt{}$(لہ − نہ) − ط $\sqrt{}$(لہ − مہ))

اب جیسا کہ اس متماثلہ مساوات سے ظاہر ہے چونکہ دوسری جانب کے اجزائے ضربی دونوں کامل مربع ہیں اس لئے ہم مان سکتے ہیں

و $\sqrt{}$(لہ − نہ) + ط $\sqrt{}$(لہ − مہ) ≡ ۲ ع$_{۱}^{۲}$ ،

و $\sqrt{}$(لہ − نہ) − ط $\sqrt{}$(لہ − مہ) ≡ ۲ ع$_{۲}^{۲}$ ،

اسلئے ط $\sqrt{}$(لہ − مہ) ≡ ع$_{۱}^{۲}$ − ع$_{۲}^{۲}$ (147)

$$\text{و}\sqrt{\text{لہ} - \text{نہ}} = \text{ع}_1^2 + \text{ع}_2^2$$

$$\text{ع}\sqrt{\text{مہ} - \text{نہ}} = 2\,\text{ع}_1\text{ع}_2$$

اِن قیمتوں سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ $\text{گ}_{\text{لا}}$ کے دو درجی اجزائے ضربی ع، و، ط باہم موسیقی ہیں۔

مساوات $\text{گ}_{\text{لا}} = 0$ کی ہندسی تعبیر کے لئے دفعہ ۶۵ دیکھو۔

۱۸۴۔ $\text{گ}_{\text{لا}}$ کے دو درجی اجزائے ضربی کی رقوم میں ھیسوی کو بیان کرنا۔

چونکہ

$$\frac{\text{ھ}_{\text{لا}}}{\text{ا}^2} = \Sigma (\text{عہ} - \text{بہ})^2 (\text{لا} - \text{جہ})^2 (\text{لا} - \text{ضہ})^2 \qquad -۴۸$$

اسلئے رقموں کو ازواج میں ملانے سے اور یہ دیکھنے سے کہ

$$\Sigma (\text{بہ} - \text{جہ})(\text{عہ} - \text{ضہ}) \equiv 0 ،$$

$$\Sigma (\text{عہ} - \text{بہ})^2 (\text{لا} - \text{جہ})^2 (\text{لا} - \text{ضہ})^2$$
$$= \Sigma \left\{ (\text{بہ} - \text{جہ})(\text{لا} - \text{عہ})(\text{لا} - \text{ضہ}) + (\text{عہ} - \text{ضہ})(\text{لا} - \text{بہ})(\text{لا} - \text{جہ}) \right\}^2$$

ہمیں حاصل ہوتا ہے (کیونکہ خطوط وحدانی کے اندر کی مقداریں ع، و، ط ہیں)

$$\frac{\text{ھ}_{\text{لا}}}{\text{ا}^2} = \text{ع}^2 + \text{و}^2 + \text{ط}^2 \qquad -۴۸$$

جو $\text{ھ}_{\text{لا}}$ کے لئے مطلوبہ ربط ہے۔

۱۸۵ - خود چار درجی کو $گ_{لا}$ کے دو درجی اجزائے ضربی کی رقوم میں بیان کرنا۔ مساواتوں (۳) سے ع کے لئے ایک متشاکل قیمت حاصل کیجا سکتی ہے - ان مساواتوں میں ل، م، ن کی بجائے انکی قیمتیں، مساوات $۴ غہ^۳ - ع غہ + ج = ۰$ کی اصلوں $غہ_۱$، $غہ_۲$، $غہ_۳$ کی رقوم میں درج کرو تو

$$ا^۲(و^۲ - ط^۲) = ۱۶(غہ_۲ - غہ_۳)ع، \quad ا^۲(ط^۲ - ع^۲) = ۱۶(غہ_۳ - غہ_۱)ع،$$

$$ا^۲(ع^۲ - و^۲) = ۱۶(غہ_۱ - غہ_۲)ع،$$

ان مساواتوں سے $ھ_{لا}$ کی اس قیمت کے ذریعہ جو دفعہ ماسبق میں درج ہے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(ا ع)^۲ = ۱۶(غہ_۱ ع - ھ_{لا})، \quad (ا و)^۲ = ۱۶(غہ_۲ ع - ھ_{لا})،$$

$$(ا ط)^۲ = ۱۶(غہ_۳ ع - ھ_{لا})، \qquad (۴)$$

(148) اب ہم ابدالات

$$ع^۲ = \Delta_۱ لا^۲، \quad و^۲ = \Delta_۲ ما^۲، \quad ط^۲ = \Delta_۳ ے^۲$$

عمل میں لاتے ہیں جہاں $\Delta_۱$، $\Delta_۲$، $\Delta_۳$ ممیز ہیں ع، و، ط کے۔ اس طرح ع، و، ط کی بجائے تین دو درجی لا، ما، ے جنکے ممیز ایک کے مساوی ہیں داخل ہو جاتے ہیں - اس استحالہ کے ذریعہ دو درجیوں کی شکلیں بھی متعین ہو جاتی ہیں اور ان کے مربعوں کو ملانیوالا متماثل رشتہ (دیکھو مثال ۶ (۱) صفحہ ۲۱۰) اپنی سادہ ترین

شکل میں بیان ہو جاتا ہے۔ میزوں کو محسوب کرنے سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ

Δ_1 = (بہ+جہ-غہ-ضہ){بہ جہ (عہ+ضہ) - عہ ضہ (بہ+جہ)} - (بہ جہ - عہ ضہ)^2

اور متشابہ قیمتیں Δ_2 اور Δ_3 کے لئے۔ اسلئے

Δ_1 = -(لہ-مہ)(لہ-نہ)، Δ_2 = -(مہ-نہ)(مہ-لہ)، Δ_3 = -(نہ-لہ)(نہ-مہ)،

اِن ابدالات کو عمل میں لانے سے پچھلی مساواتیں

ع - غہ$_1$ ھ$_{لا}$ = لا^2 (غہ$_1$ - غہ$_3$)(غہ$_1$ - غہ$_2$)،

ع - غہ$_2$ ھ$_{لا}$ = ما^2 (غہ$_2$ - غہ$_1$)(غہ$_2$ - غہ$_3$)، (۵)

ع - غہ$_3$ ھ$_{لا}$ = ے^2 (غہ$_3$ - غہ$_2$)(غہ$_3$ - غہ$_1$)،

ہو جاتی ہیں۔ اِن سے ھ$_{لا}$ اور ع کی حسب ذیل قیمتیں اور لا، ما، ے کو ملانیوالا اتماثل رشتہ آسانی کے ساتھ اخذ ہوتے ہیں:

ھ$_{لا}$ = غہ$_1^2$ لا^2 + غہ$_2^2$ ما^2 + غہ$_3^2$ ے^2،

-ع = غہ$_1$ لا^2 + غہ$_2$ ما^2 + غہ$_3$ ے^2، (۶)

۱ = لا^2 + ما^2 + ے^2،

جہاں جیسا کہ ثابت کر دیا گیا ہے لا، ما، ے، تین باہم موسیقی دو درجی ہیں جنکے میزہر صورت میں اکائی میں تحویل ہوتے ہیں۔ گ$_{لا}$ کی قیمت، لا، ما، ے کی رقوم میں اس طرح بیان ہو سکتی ہے:

چونکہ ۳۲ گ$_{لا}$ = اَ^{3} ع د ط اور

$$\text{ع}^2\,\text{و}^2\,\text{ط}^2 = (\text{مہ}-\text{نہ})^2(\text{نہ}-\text{لہ})^2(\text{لہ}-\text{مہ})^2\,\text{لا}^2\,\text{ما}^2\,\text{ے}^2$$

$$= \frac{۲۵۶}{\text{ا}^2}(\text{ع}^3 - ۲۷\,\text{جے}^2)\,\text{لا}^2\,\text{ما}^2\,\text{ے}^2،$$

اسلئے
$$\text{گ}_{\text{لا}} = \tfrac{۱}{۲}\sqrt{\text{ع}^3 - ۲۷\,\text{جے}^2}\;\text{لا}\,\text{ما}\,\text{ے}$$

۱۸۶ — چار درجی کی تحلیل — مساواتوں (149)

$$-\text{ع} = \text{غہ}_1\,\text{لا}^2 + \text{غہ}_2\,\text{ما}^2 + \text{غہ}_3\,\text{ے}^2،$$

$$\text{ن} = \text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ے}^2،$$

سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ

$$\text{ع} = (\text{غہ}_1-\text{غہ}_2)\,\text{ما}^2 + (\text{غہ}_1-\text{غہ}_3)\,\text{ے}^2،\quad \text{ع} = (\text{غہ}_2-\text{غہ}_3)\,\text{ے}^2$$
$$+ (\text{غہ}_2-\text{غہ}_1)\,\text{لا}^2،\quad \text{ع} = (\text{غہ}_3-\text{غہ}_1)\,\text{لا}^2 + (\text{غہ}_3-\text{غہ}_2)\,\text{ما}^2$$

جہاں لا^2، ما^2، ے^2 کی قیمتیں مساواتوں (۵) سے متعین ہوتی ہیں۔ ع کی اِن قیمتوں کو اِنکے اجزائے ضربی میں تحویل کرنے سے ہمیں ع کو تحلیل کرنے کے تین طریقے ملتے ہیں جو مساوات

$$۴\,\text{غہ}^3 - \text{ع}\,\text{غہ} + \text{جے} = ۰$$

کے حل پر منحصر ہیں۔

پروفیسر کیلی نے چار درجی کی تحلیل ایک متشاکل شکل میں پیش کی ہے جو ع اور $\text{ھ}_{\text{لا}}$ کے لئے دئے ہوئے جملوں سے آسانی کے ساتھ ماخوذ ہوسکتی ہے۔ چونکہ بالعموم

$$\text{ل}(\text{ا}_1\text{لا}^2 + ۲\text{ب}_1\text{لاما} + \text{ج}_1\text{ما}^2) + \text{م}(\text{ا}_2\text{لا}^2 + ۲\text{ب}_2\text{لاما} + \text{ج}_2\text{ما}^2) + \text{ن}(\text{ا}_3\text{لا}^2 + ۲\text{ب}_3\text{لاما} + \text{ج}_3\text{ما}^2)$$

ایک کامل مربع ہوتا ہے جبکہ

$$\Sigma\, \text{ل}^{2}(\text{ا}_{1}\text{ج}_{1} - \text{ب}_{1}^{2}) + \Sigma\, \text{م}\text{ن}(\text{ا}_{2}\text{ج}_{3} + \text{ا}_{3}\text{ج}_{2} - ۲\text{ب}_{2}\text{ب}_{3}) = ۰$$

اسلئے

$$\text{ل}\,\text{لا} + \text{م}\,\text{ما} + \text{ن}\,\text{ے}$$

کامل مربع ہے جبکہ

$$\text{ل}^{2} + \text{م}^{2} + \text{ن}^{2} = ۰$$

جہاں لا ، ما ، ے باہم موسیقی ہیں اور انکے ممیز، ہر ایک اکائی میں تحویل ہوئے ہیں ۔

اس لئے ع کی تحلیل ل، م، ن کی ایسی قیمتیں معلوم کرنے پر منحصر ہوتی ہے کہ عام دو درجی

$$\text{ل}\,\text{لا} + \text{م}\,\text{ما} + \text{ن}\,\text{ے}$$

یا

$$\text{ل}\sqrt{\text{غ}_{2} - \text{غ}_{3}}\,\sqrt{\text{ھ}_{\text{لا}} - \text{غ}_{1}\text{ع}} + \text{م}\sqrt{\text{غ}_{3} - \text{غ}_{1}}\,\sqrt{\text{ھ}_{\text{لا}} - \text{غ}_{2}\text{ع}}$$

$$+ \text{ن}\sqrt{\text{غ}_{1} - \text{غ}_{2}}\,\sqrt{\text{ھ}_{\text{لا}} - \text{غ}_{3}\text{ع}}$$

ایک کامل مربع ہو اور وہ معدوم ہو جبکہ ع معدوم ہو جائے۔ کسی اصل لا = عہ کے جواب میں یہ قیمتیں اس طور پر معلوم ہو سکتی ہیں کہ $\sqrt{\text{غ}_{2} - \text{غ}_{3}}$ ، $\sqrt{\text{غ}_{3} - \text{غ}_{1}}$ ، $\sqrt{\text{غ}_{1} - \text{غ}_{2}}$ کے لئے قیمتوں کا کوئی نظام لیا جائے اور کامل مربعوں $\text{ھ}_{\text{لا}} - \text{غ}_{1}\text{ع}$ ، $\text{ھ}_{\text{لا}} - \text{غ}_{2}\text{ع}$ ، $\text{ھ}_{\text{لا}} - \text{غ}_{3}\text{ع}$ کے جذروں کے لئے ایسی قیمتیں لی جائیں کہ ان میں سے ہر جذر کی لا = عہ کے لئے ایک ہی قیمت حاصل ہو۔ پھر لا ، ما ، ے کیلئے ذیل کی معین قیمتیں لی جائیں (150)

$$\text{لا} = \sqrt{\text{غ}_۲ - \text{غ}_۴}\ \sqrt{\text{ھ}_{\text{لا}} - \text{غ}_۴ \text{ع}} \Big\backslash \sqrt{\text{غ}_۲ - \text{غ}_۳}\ \sqrt{\text{غ}_۳ - \text{غ}_۱}\ \sqrt{\text{غ}_۱ - \text{غ}_۲}$$

علی ہذالقیاس ما اور ے کے لئے۔

پس ل، م، ن کو ذیل کی مساواتیں پوری کرنی چاہئیں:—

$$\text{ل}\sqrt{\text{غ}_۳ - \text{غ}_۲} + \text{م}\sqrt{\text{غ}_۳ - \text{غ}_۱} + \text{ن}\sqrt{\text{غ}_۱ - \text{غ}_۲} = ۰،\ \text{ل}^۲ + \text{م}^۲ + \text{ن}^۲ = ۰$$

اب یہ مساواتیں صریحاً پوری ہوتی ہیں اگر

$$\frac{\text{ل}}{\sqrt{\text{غ}_۲ - \text{غ}_۳}} = \frac{\text{م}}{\sqrt{\text{غ}_۳ - \text{غ}_۱}} = \frac{\text{ن}}{\sqrt{\text{غ}_۱ - \text{غ}_۲}}،$$

اسلئے آخرالامر ع کے چار خطی اجزائے ضربی کے مربع ہونے چاہئیں

$$(\text{غ}_۲ - \text{غ}_۳)\sqrt{\text{ھ}_{\text{لا}} - \text{غ}_۱ \text{ع}} \pm (\text{غ}_۳ - \text{غ}_۱)\sqrt{\text{ھ}_{\text{لا}} - \text{غ}_۲ \text{ع}} \pm (\text{غ}_۱ - \text{غ}_۲)\sqrt{\text{ھ}_{\text{لا}} - \text{غ}_۳ \text{ع}}$$

جن کا حاصل ضرب $\Delta\ \text{ع}^۲$ ہے۔

اگر چار درجی ک ع - لہ ھ$_{\text{لا}}$ کو حل کرنا مطلوب ہو تو اسی طرح ہم ل، م، ن کی ایسی قیمتیں منتخب کر سکتے ہیں کہ ل لا + م ما + ن ے کامل مربع ہو جائے اور اسوقت معدوم ہو جبکہ ک ع - لہ ھ$_{\text{لا}}$ معدوم ہو جائے۔ یہ قیمتیں اس طرح معلوم ہو سکتی ہیں کہ

$\sqrt{\text{غ}_۲ - \text{غ}_۳}$، $\sqrt{\text{غ}_۳ - \text{غ}_۱}$، $\sqrt{\text{غ}_۱ - \text{غ}_۲}$ کے لئے قیمتوں کا ایک معین نظام لیا جائے اور

$$\text{ھ}_{\text{لا}} - \text{غ}_۱ \text{ع} = \frac{\text{ک} - \text{غ}_۱ \text{لہ}}{\text{ک}} \left\{ \text{ھ}_{\text{لا}} - \text{م}_۱ (\text{ک ع} - \text{لہ ھ}_{\text{لا}}) \right\}$$

لکھا جائے جہاں $\text{م}_۳ = \frac{\text{غ}_۱}{\text{ک} - \text{ل}\,\text{غ}_۱}$ ، $\text{م}\,\text{ھ}_{\text{لا}} - \text{غ}_۲\,\text{ع}$ اور $\text{ھ}_{\text{لا}} - \text{غ}\,\text{ع}$

کے لئے متشابہ قیمتوں کے کامل مربعوں

$$\text{ھ}_{\text{لا}} - \text{م}_۱(\text{ک}\,\text{ع} - \text{ل}\,\text{ھ}_{\text{لا}})،\quad \text{ھ}_{\text{لا}} - \text{م}_۲(\text{ک}\,\text{ع} - \text{ل}\,\text{ھ}_{\text{لا}})،\quad \text{ھ}_{\text{لا}} - \text{م}_۳(\text{ک}\,\text{ع} - \text{ل}\,\text{ھ}_{\text{لا}})$$

کے جذروں کے لئے ایسی قیمتیں انتخاب کی جائیں کہ وہ $\text{ک}\,\text{ع} - \text{ل}\,\text{ھ}_{\text{لا}}$ کی ایک معین اصل عہ کے لئے مساوی ہوں، اور

$$\text{لا} = \frac{\sqrt{\text{غ}_۲ - \text{غ}_۳}\,\sqrt{\text{ک} - \text{ل}\,\text{غ}_۱}\,\sqrt{\text{ھ}_{\text{لا}} - \text{م}_۱(\text{ک}\,\text{ع} - \text{ل}\,\text{ھ}_{\text{لا}})}}{\sqrt{\text{ک}}\,\sqrt{\text{غ}_۲ - \text{غ}_۳}\,\sqrt{\text{غ}_۳ - \text{غ}_۱}\,\sqrt{\text{غ}_۱ - \text{غ}_۲}}$$

رکھا جائے $\text{م}_۱$ کی متشابہ قیمتوں کے۔ تب ل، م، ن کو ذیل کی مساواتیں پوری کرنی چاہئیں:—

$$\text{ل}^۲ + \text{م}^۲ + \text{ن}^۲ = ۰،$$

$$\text{ل}\sqrt{(\text{غ}_۲ - \text{غ}_۳)(\text{ک} - \text{غ}_۱\,\text{ل})} + \text{م}\sqrt{(\text{غ}_۳ - \text{غ}_۱)(\text{ک} - \text{غ}_۲\,\text{ل})} + \text{ن}\sqrt{(\text{غ}_۱ - \text{غ}_۲)(\text{ک} - \text{غ}_۳\,\text{ل})} = ۰$$

یہ مساواتیں صریحاً پوری ہوتی ہیں اگر (151)

$$\frac{\text{ل}}{\sqrt{(\text{غ}_۲ - \text{غ}_۳)(\text{ک} - \text{غ}_۱\,\text{ل})}} = \frac{\text{م}}{\sqrt{(\text{غ}_۳ - \text{غ}_۱)(\text{ک} - \text{غ}_۲\,\text{ل})}} = \frac{\text{ن}}{\sqrt{(\text{غ}_۱ - \text{غ}_۲)(\text{ک} - \text{غ}_۳\,\text{ل})}}$$

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ $\text{ک ع} - \text{له ه}_{\text{لا}} = 0$ کے ایک خطی جزو ضربی کا مربع $\text{ل لا} + \text{م ما} + \text{ن ے}$ ہے۔

۱۸۶ - $\text{ک ع} - \text{له ه}_{\text{لا}}$ کے غیر متغیر اور ہم متغیر۔ دفعہ ۱۸۵

کی مساواتیں (٦) استعمال کرکے اور $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ے}^2$ کو و سے تعبیر کرکے ہم $\text{له ه}_{\text{لا}} - \text{ک ع}$ میں $- \frac{\text{له ع}}{6}$ و جمع کرنے سے اسکو شکل

$$\text{ر}_1 \text{لا}^2 + \text{ر}_2 \text{ما}^2 + \text{ر}_3 \text{ے}^2$$

میں تحویل کرسکتے ہیں جہاں $\text{ر}_1 + \text{ر}_2 + \text{ر}_3 = 0$، جب وہ اس شکل میں تحویل ہو جائے تو ہمیں ر_1، ر_2، ر_3 کی حسب ذیل تحویل شدہ قیمتیں ملتی ہیں:-

$$3\,\text{ر}_1 = \text{ک}(2\,\text{غ}_1 - \text{غ}_2 - \text{غ}_3) + \text{له}(2\,\text{غ}_2\text{غ}_3 - \text{غ}_3\text{غ}_1 - \text{غ}_1\text{غ}_2),$$

$$3\,\text{ر}_2 = \text{ک}(2\,\text{غ}_2 - \text{غ}_3 - \text{غ}_1) + \text{له}(2\,\text{غ}_3\text{غ}_1 - \text{غ}_1\text{غ}_2 - \text{غ}_2\text{غ}_3),$$

$$3\,\text{ر}_3 = \text{ک}(2\,\text{غ}_3 - \text{غ}_1 - \text{غ}_2) + \text{له}(2\,\text{غ}_1\text{غ}_2 - \text{غ}_2\text{غ}_3 - \text{غ}_3\text{غ}_1),$$

شکلوں $\text{غ}_1 \text{لا}^2 + \text{غ}_2 \text{ما}^2 + \text{غ}_3 \text{ے}^2$ اور $\text{ر}_1 \text{لا}^2 + \text{ر}_2 \text{ما}^2 + \text{ر}_3 \text{ے}^2$ کی مشابہت کی وجہ سے جو ایک ہی نمونہ کی ہیں یہ ظاہر ہے کہ لا ما ے بھی $\text{ک ع} - \text{له ه}_{\text{لا}}$ کے چھ درجی ہم متغیر کے اجزائے ضربی ہیں اور اسکا ہیسوی $\text{ر}_1 \text{لا}^2 + \text{ر}_2 \text{ما}^2 + \text{ر}_3 \text{ے}^2$ ہے۔ اس کی تصدیق ہم راست حساب لگا کر کرسکتے ہیں۔ اسلئے ہم $\text{ک ع} - \text{له ه}_{\text{لا}}$ کے غیر متغیر اور ہم متغیر اس طرح محسوب کرتے ہیں کہ ع کے غیر متغیروں اور ہم متغیوں کے جملوں میں

$\text{غ}_{۱}$، $\text{غ}_{۲}$، $\text{غ}_{۳}$ کو $\text{ں}_{۱}$، $\text{ں}_{۲}$، $\text{ں}_{۳}$ سے بدل دیتے ہیں۔

اب چونکہ

$$\text{ع} = \frac{۲}{۳}\left\{(\text{غ}_{۲}-\text{غ}_{۳})^{۲}+(\text{غ}_{۳}-\text{غ}_{۱})^{۲}+(\text{غ}_{۱}-\text{غ}_{۲})^{۲}\right\}،$$

$$\text{ج} = -۴\,\text{غ}_{۱}\text{غ}_{۲}\text{غ}_{۳}،$$

اور $\text{ں}_{۲}-\text{ں}_{۳}=(\text{غ}_{۲}-\text{غ}_{۳})(\text{ک}-\text{ل}\,\text{غ}_{۱})$، $\text{ں}_{۳}-\text{ں}_{۱}=(\text{غ}_{۳}-\text{غ}_{۱})(\text{ک}-\text{ل}\,\text{غ}_{۲})$،

$$\text{ں}_{۱}-\text{ں}_{۲}=(\text{غ}_{۱}-\text{غ}_{۲})(\text{ک}-\text{ل}\,\text{غ}_{۳})،$$

(152) اسلئے ک ع - ل ھ کے غیر متغیروں کے لئے ہمیں حسب ذیل قیمتیں ملتی ہیں:—

$$\text{ع}_{(\text{ک}،\text{ل})} = \text{ع}\,\text{ک}^{۲} - ۳\,\text{ج}\,\text{ک}\,\text{ل} + \frac{\text{ع}^{۲}}{۱۲}\text{ل}^{۲}،$$

$$\text{ج}_{(\text{ک}،\text{ل})} = \text{ج}\,\text{ک}^{۳} - \frac{\text{ع}^{۲}}{۶}\text{ک}^{۲}\text{ل} + \frac{\text{ع}\,\text{ج}}{۴}\text{ک}\,\text{ل}^{۲} - \frac{۵۴\,\text{ج}^{۲}-\text{ع}^{۳}}{۲۱۶}\text{ل}^{۳}$$

اگر ہم و کے ہم متغیر $\text{ھ}_{(\text{ک}،\text{ل})}$ اور $\text{گ}_{(\text{ک}،\text{ل})}$ بنائیں جہاں

$$۴\,\text{و} \equiv ۴\,\text{ک}^{۳} - \text{ع}\,\text{ک}\,\text{ل}^{۲} + \text{ج}\,\text{ل}^{۳}$$

(جو محول کعبی ہے جسکو ک، ل میں متجانس بنایا گیا ہے) تو ایم ہرمٹ (M.Hermite) کے بیان کی بموجب ہمیں یہ معلوم ہوتا ہے کہ

$$\text{ع}_{(\text{ک}،\text{ل})} = -۱۲\,\text{ھ}_{(\text{ک}،\text{ل})}،\qquad \text{ج}_{(\text{ک}،\text{ل})} = ۴\,\text{گ}_{(\text{ک}،\text{ل})}،$$

نیز ک و - ل ھ کا ہیسوی محسوب کرنیکے لئے ہم

$$\text{ر}_{۱}\,\text{لا}^{۲} + \text{ر}_{۲}\,\text{ما}^{۲} + \text{ر}_{۳}\,\text{ے}^{۲}$$

کو ابدالات

$$\text{غ}^{۳}_{۱}\,\text{لا}' + \text{غ}^{۳}_{۲}\,\text{ما}' + \text{غ}^{۳}_{۳}\,\text{ے}' \equiv -\tfrac{۱}{۴}\,\text{ع}\,\text{ع}'\text{،}$$

$$\text{غ}^{۴}_{۱}\,\text{لا}' + \text{غ}^{۴}_{۲}\,\text{ما}' + \text{غ}^{۴}_{۳}\,\text{ے}' \equiv \tfrac{۱}{۴}(\text{ع}\,\text{ھ}_{\text{لا}} + \text{جے}\,\text{ع}')$$

کے ذریعہ تحویل کرتے ہیں۔ یہ متماثلہ مساواتیں، مساواتوں

$$\text{غ}^{۲}_{۱} = \text{غ}_{۲}\text{غ}_{۳} + \tfrac{۱}{۴}\,\text{ع}\text{،}\quad \text{غ}^{۲}_{۲} = \text{غ}_{۳}\text{غ}_{۱} + \tfrac{۱}{۴}\,\text{ع}\text{،}\quad \text{غ}^{۲}_{۳} = \text{غ}_{۱}\text{غ}_{۲} + \tfrac{۱}{۴}\,\text{ع}\text{،}$$

کو علی الترتیب پہلے $\text{غ}_{۱}\,\text{لا}'$، $\text{غ}_{۲}\,\text{ما}'$، $\text{غ}_{۳}\,\text{ے}'$ سے اور پھر $\text{غ}_{۲}\,\text{لا}'$، $\text{غ}_{۳}\,\text{ما}'$، $\text{غ}_{۱}\,\text{ے}'$ سے ضرب دیکر جمع کرنے سے حاصل ہوئی ہیں۔

اس طرح $\text{ک}\,\text{ع} - \text{لہ}\,\text{ھ}_{\text{لا}}$ کے ہیسوی کیلئے ہمیں حسب ذیل شکل ملتی ہے:-

$$\tfrac{۱}{۴}\left\{\text{ھ}_{\text{لا}}(۲\,\text{ک}^{۲} - \tfrac{۱}{۲}\,\text{لہ}^{۲}) - \text{ع}(\tfrac{۲}{۳}\,\text{ع}\,\text{ک}\,\text{لہ} - \text{جے}\,\text{لہ}^{۲})\right\}$$

اس کو شکل

$$\tfrac{۱}{۳}\left(\text{ھ}_{\text{لا}}\frac{\text{جف}\,\text{و}}{\text{جف}\,\text{ک}} + \text{ع}\frac{\text{جف}\,\text{و}}{\text{جف}\,\text{لہ}}\right)$$

میں بیان کیا جا سکتا ہے اور یہ $\text{ک}\,\text{ع} - \text{لہ}\,\text{ھ}_{\text{لا}}$ اور ہیسوی کے جیکوبین کا ایک ضعف ہے جبکہ متغیر ک اور لہ ہوں۔

نیز چونکہ

$$ع^{۳} - ۲۷\,ب\,ج^{۲} = ۱۶\,(غ_{۲} - غ_{۳})^{۲}\,(غ_{۳} - غ_{۱})^{۲}\,(غ_{۱} - غ_{۲})^{۲}$$

اور $$گ_{لا} = \frac{۱}{۲}\sqrt{ع^{۳} - ۲۷\,ب\,ج^{۲}} \times لاماے،$$

اسلئے $غ_{۱}$، $غ_{۲}$، $غ_{۳}$ کو $کا_{۱}$، $کا_{۲}$، $کا_{۳}$ میں بدلنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ (153)

$$ع^{۳}_{(ک،ل)} - ۲۷\,ب\,ج^{۲}_{(ک،ل)} = و^{۲}\,(ع^{۳} - ۲۷\,ب\,ج^{۲})،$$

$$گ_{(ک،ل)لا} = و\,گ_{لا}$$

پس ہم نے ک ع ـ ل $ھ_{لا}$ کے غیر متغیروں اور ہم متغیروں کو غـ کے غیر متغیروں اور ہم متغیروں کی رقوم میں بیان کر دیا۔

۱۸۸ــ چار درجی کے ہم متغیروں اور غیر متغیروں کی تعداد۔

اب ہم مسئلہ ذیل ثابت کرتے ہیں جو اِن تفاعلوں کی تعداد معین کرتا ہے:

چار درجی کے صرف دو جداگانہ غیر متغیر ع اور ج ہوتے ہیں اور صرف دو جداگانہ ہم متغیر جنکے صدر سر ھ اور گ ہیں۔

یہ مسئلہ اس بات کو بیان کرتا ہے کہ ہر غیر متغیر، ع اور ج کا ایک منطق صحیح تفاعل ہے اور ہر ہم متغیر، ع، $ھ_{لا}$، $گ_{لا}$، ع، ج کا ایک منطق صحیح تفاعل ہے۔ حسب ذیل بحث کی بنیاد وہ اصول ہیں جو

کبھی کی صورت میں استعمال کردہ اصولوں کے مشابہ ہیں۔ دفعہ ۱۶۳ کے مسئلہ میں یہ ثابت ہو چکا ہے کہ اگر اصلیوں کے فرقوں کا کوئی صحیح تفاعل فہ (عہ، بہ، جہ، ضہ) ہو جو منطق شکل میں سروں کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے تو اسے فہ (عہ، بہ، جبہ، ضہ) کو شکل

گ فا (ا، ھ، ع، جے) یا فا (ا، ھ، ع، بے)

میں بیان کیا جا سکتا ہے بموجب اسکے کہ فہ طاق ہو یا جفت۔

اب اگر فا (ا، ھ، ع، جے) ایک غیر متغیر ہے تو ا اور ھ معدوم ہونے چاہئیں کیونکہ اگر وہ موجود ہوں تو یہ تفاعل وہی نہیں رہ سکتا جب سروں کو سیدھی یا الٹی ترتیب میں لکھا جاتا ہے۔ اسی طرح کسی طاق تفاعل سے جیسے گ فا (ا، ھ، ع، جے) غیر متغیر حاصل نہیں ہو سکتا۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ہر غیر متغیر ع اور جے کا تفاعل ہے۔

نیز چار درجی کے صرف دو جداگانہ ہم متغیر ہوتے ہیں کیونکہ ہم نے یہ ثابت کر دیا ہے کہ فرقوں کا ہر تفاعل

فا (ا، ھ، ع، جے)، گ فا (ا، ھ، ع، جے)

میں سے کوئی ایک شکل اختیار کرتا ہے۔

اب ان شکلوں کو ہم متغیروں کے قدر سروں کے طور پر لیکر یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ ہر ہم متغیر شکلوں

فا (ع، ھلا، ع، جے)، گلا فا (ع، ھلا، ع، جے)

میں سے کسی ایک شکل میں بیان ہو سکتا ہے یعنی ہر ہم متغیر ھلا، گلا، (154)
ع، جے کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے۔

پس مسئلہ بالا ثابت ہو چکا۔

مثالیں

۱ — اگر ع کوئی کعبی ہو اور $\text{گ}_{\text{لا}}$ اسکا کعبی ہم متغیر تو ثابت کرو کہ $\text{ل}\,\text{ع} + \text{م}\,\text{گ}_{\text{لا}}$ کے ھیسوی کی وہی اصلیں ہیں جو ع کے ھیسوی کی ہیں جہاں ل اور م مستقل ہیں —

۲ — ثابت کرو کہ کثیر رقمی کا کوئی ہم متغیر مساوات

$$\text{لا}\,\frac{\text{جفا فہ}}{\text{جفا ما}} = \text{ھ}\,\text{س}_1\,\text{فہ} - \sum \text{عہ}\,\frac{\text{جفا}^2\,\text{فہ}}{\text{جفا عہ}^2}$$

کو پورا کرتا ہے جہاں کثیر رقمی کی اصلیں عہ_1، عہ_2، .... ، $\text{عہ}_{\text{ن}}$ ہیں، سروں میں فہ کا درجہ ھ ہے، اور $\text{س}_1 = \sum \text{عہ}$ —

۳ — اگر کثیر رقمی کا ایک جزو ضربی مربع ہو تو اسکے ھیسوی میں یہی مربع جزو ضربی داخل ہوتا ہے —

۴ — اگر چار درجی کا ایک جزو ضربی مربع ہو تو ثابت کرو کہ یہ جزو ضربی ہم متغیر $\text{گ}_{\text{لا}}$ میں چہرے جزو ضربی کے طور پر داخل ہوتا ہے۔ اس صورت میں ع، د، ط کی قیمتیں معلوم کرو — (دیکھو دفعہ ۱۴۶)

۵ — اگر فہ (لا) اور پہ (لا)، ن ویں درجہ کے دو کثیر رقمی ہوں اور فہ (لا) کی اصلیں عہ_1، عہ_2، ... $\text{عہ}_{\text{ن}}$ ہوں تو بتاؤ کہ ان کا جیکوبین اس طرح بیان ہو سکتا ہے :—

$$\text{جے}(\text{فہ}،\text{پہ}) \equiv \text{ن}\,\text{فہ}^2 \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\text{ن}} \frac{\text{پہ}(\text{عہ}_{\text{ر}})}{\text{فہ}'(\text{عہ}_{\text{ر}})}\,\frac{1}{(\text{لا}-\text{عہ}_{\text{ر}})^2}$$

اور بالخصوص ثابت کرو کہ چار درجی فہ (لا) کا چھ درجی ہم متغیر $\text{گ}_{\text{لا}}$ شکل

$$\left\{ \text{فہ}\,(\text{لا}) \right\}^{۲} \equiv \frac{\text{فہَ}\,(\text{عہ})}{(\text{لا}-\text{عہ})^{۲}}$$

میں لکھا جا سکتا ہے۔

۶ — چار درجی ع کے لئے ثابت کرو کہ دو درجیوں

$$\frac{(\text{لا}-\text{عہ})^{۲}}{\text{فہَ}\,(\text{عہ})}،\quad \frac{(\text{لا}-\text{بہ})^{۲}}{\text{فہَ}\,(\text{بہ})}،\quad \frac{(\text{لا}-\text{جہ})^{۲}}{\text{فہَ}\,(\text{جہ})}،\quad \frac{(\text{لا}-\text{ضہ})^{۲}}{\text{فہَ}\,(\text{ضہ})}$$

میں سے کسی دو کا مجموعہ، ع کے چھہ درجی ہم متغیر کا ایک جزو ضربی ہے جہاں اسکو اصلوں کی رقوم میں بیان کیا گیا ہے۔

۷ — اگر

$$\text{فہ}\,(\text{لا}) \equiv \text{لَ}\,(\text{لا}-\text{عہ}_{۱})(\text{لا}-\text{عہ}_{۲})(\text{لا}-\text{عہ}_{۳})\ldots(\text{لا}-\text{عہ}_{ن})$$

کا ممیز Δ ہو تو ثابت کرو کہ وہ مساوات جس کی اصلیں غیر منطق ہم متغیر

$$\text{یَ}_{ر} \equiv \frac{\sqrt{\Delta}}{\text{فہَ}\,(\text{عہ}_{ر})}\,(\text{لا}-\text{عہ}_{ر})^{ن-۲}$$

کی ن قیمتیں ہیں فہ (لا) کے ہم متغیروں اور غیر متغیروں کی رقوم میں ایک منطق شکل میں بیان ہو سکتی ہے جبکہ $\sqrt{\Delta}$ کو ملحق کیا جاتا ہے بتاؤ کہ ی کی وہ قیمتیں جو علی الترتیب ن = ۳ اور ن = ۴ رکھنے سے حاصل ہوتی ہیں کعبی اور چار درجی کے اُن حلوں کے عددی اضعاف ہیں جنکو کیلی نے دریافت کیا ہے (دفعات ۱۸۰، ۱۸۶)۔

۸ — دفعہ ۱۸۸ کے اصولوں کو استعمال کر کے چار درجی لہ ع + مہ ھ$_{\text{لا}}$ کے چھہ درجی ہم متغیر کی شکل بغیر عمل حساب کے معلوم کرو۔ (155)

۹ — چار درجی کے عیسوی کیلئے ھ، ع، گ، ج کی قیمتیں محسوب کرو۔

جواب:- $\text{ھَ} = \dfrac{۳\,\text{ا ج} - \text{ھ ع}}{۱۲}$، $\text{عَ} = \dfrac{\text{ع}^{۲}}{۱۲}$، $\text{گَ} = -\dfrac{\text{ج گ}}{۴}$،

$$جَ = \frac{۵۴\,بَ^{۲} - ع^{۳}}{۲۱۶} ،$$

۱۰ ـــ وہ دو شرطیں معلوم کرو کہ اُس چار درجی کا مخصوصی جس میں دوسری رقم موجود نہیں ہے ایک کامل مربع ہو اور ثابت کرو کہ دونوں شرطوں میں جـ بطور جزو ضربی کے شامل ہوتا ہے ۔

جواب :- $جـ\, گ = ۰ ،\ ا\, جـ\,(۲\, ہ\, ع - ۳\, ا\, جـ) = ۰$

۱۱ ـــ مساوات

$$(ا_{۰} ، ا_{۱} ، ا_{۲} ، \ldots ، ا_{ن})(لا ، ۱)^{ن} = ۰$$

کا ایک نیم غیر متغیر جسکو لن کی قوتوں میں ترتیب دیا گیا ہے حسب ذیل ہے

$$ف \equiv ا_{ف} + ف\, ا_{ف-۱}\, لن + \frac{ف\,(ف-۱)}{۲ \times ۱}\, ا_{ف-۲}\, لن^{۲} + \ldots + ا_{۰}\, لن^{ف}$$

ثابت کرو کہ $عف\ ا_{ر} = - ن\, ا_{ن-۱}\, ر\, ا_{ر-۱}$ اور اسلئے بتاؤ کہ اگر یہ $(ا_{۰} ، ا_{۱} ، \ldots ، ا_{ر})$ ایک نیم غیر متغیر ہے تو یہ $(ا_{۰} ، ا_{۱} ، \ldots ، ا_{ر})$ بھی نیم غیر متغیر ہے ۔

۱۲ ـــ پچھلے سوال کے نتیجہ کی مدد سے یہ بتاؤ کہ کسی مساوات کیلئے مربع دار فرقوں کی مساوات کا آخری سر کس طرح معلوم کیا جا سکتا ہے جبکہ یہ سر اُس مساوات کے لئے معلوم ہو جائے جو عین نچلے رتبہ کی ہے ۔

۱۳ ـــ اگر ع ن کے دو نیم غیر متغیر جنکو لن کی قوتوں میں ترتیب دیا گیا ہے حسب ذیل ہوں

$$ف(لن) \equiv (ا_{۰} ، ا_{۱} ، \ldots ، ا_{ف})(لن ، ۱)^{ف} ،$$

$$پ(لن) \equiv (ب_{۰} ، ب_{۱} ، ب_{۲} ، \ldots ، ب_{ق})(لن ، ۱)^{ق} ،$$

تو ثابت کرو کہ نظام فہ (لا) اور پہ (لا) کا کوئی نیم غیر متغیر عن-۱ کا نیم غیر متغیر ہے۔

۱۴— اگر $ع_ن \equiv (ا_۰، ا_۱، ا_۲، ... ا_ن)(لا، ما)^ن$ کے دو غیر متغیر

$$ع_۱ \equiv (ا_۰، ا_۱، ا_۲ ... ا_ف)(لی، ۱)^ف،$$

$$ع_۲ \equiv (ب_۰، ب_۱، ب_۲ ... ب_ق)(لی، ۱)^ق،$$

ہوں تو ثابت کرو کہ $ع_۱$ اور $ع_۲$ کا حاصل اسقاط جبکہ لی کو ساقط کیا جاتا ہے $ع_{ن-۱}$ کے ایک ہم متغیر کا فائق عنصر ہے جسکا درجہ متغیروں میں حسب ذیل ہے

$$(ن+۱) ف ق - ف ٹ_۲ - ق ٹ_۱$$

جہاں $ٹ_۱$ اور $ٹ_۲$ رتبے ہیں $ع_۱$ اور $ع_۲$ کے۔

۱۵— اگر چار درجی کے ممیز کو شکل

$$(ا_۰، ا_۱، ا_۲)(لی_۲، ۱)^۳$$

میں لکھا جائے تو ثابت کرو کہ اس کعبی کا ممیز ہے

$$۲۷\, گ^۲ \Delta_۲^۳$$

جہاں $(ا_۰، ا_۱، ا_۲، ا_۳)(لا، ۱)^۳$ کا ممیز $\Delta_۲$ ہے۔ $ا_۳$ معلوم ہو جانے کے بعد $ا_۰$، $ا_۱$ اور $ا_۲$ معلوم کرو۔

۱۶— دو مساوات بناؤ جنکی اصلیں (156)

$فہ(ع_۱)، فہ(ع_۲)، ...، فہ(ع_ن)$

ہوں جہاں عہ۱، عہ۲، ....، عہن اصلیں ہیں ف(لا) = ۰ کی اور ف(لا)
اور فہ(لا) کا حاصل ر دیا گیا ہے ۔

فہ(لا) کے آخری سر بم کو بم ۔ غہ میں بدلو اور بم کی بجائے
یہ قیمت مساوات ر = ۰ میں درج کرو ۔

۱۷ ـــ اگر فہ(لا) ≡ (ا۰، ا۱، ا۲، ...، ان)(لا، ۱)^ن کی
اصلیں عہ۱، عہ۲، ....، عہن ہوں اور اگر فہ(لا) کا ایک ہم متغیر

پہ(لا) ≡ ا۰(لا − بہ۱)(لا − بہ۲) .... (لا − بہن-۲)

ہو جسکا درجہ (ن − ۲) ہے تو ثابت کرو کہ مقداروں

پہ(عہ۱) / فہ'(عہ۱) ، پہ(عہ۲) / فہ'(عہ۲) ، ....، پہ(عہن) / فہ'(عہن)

کا کوئی متشاکل تفاعل غیر متغیروں کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے (ہرسٹ)
فہ(لا) اور لہ فہ'(لا) + پہ(لا) کے حاصل کو فہ(لا) کی اصلوں کی
رقوم میں بیان کرو اور اسکو ر سے تعبیر کرو تو یہ مسئلہ صرف یہ دکھانے سے
ثابت ہو سکتا ہے کہ لہ کی وہ قیمتیں جو مساوات ر = ۰ سے ملتی ہیں نہیں
بدلتیں (سوائے علامت میں) جبکہ اصلوں عہ اور اصلوں بہ کی بجائے
اِنکے منکافی لکھے جاتے ہیں ۔ اصلوں عہ کے منکافی لینے میں یہ بات
شامل ہے کہ ار کی بجائے ان-ر درج ہو اور پہ(لا) کی اصلوں بہ
کا بھی منکافی لیا جائے ۔

۱۸ ـــ ثابت کرو کہ اگر ع۲ اور ھ۳ کو دفعہ ۱۸۳ کے ع۲ اور ع۳ کی

رقوم میں بیان کیا جائے تو دونوں اس شکل

(ا، ب، ا) (ع$_1^2$، ع$_2^2$)

کے ہیں۔

۱۹ — ثابت کرو کہ چار درجی

ف (لا، ما) = (ا، ب، ج، د، ص) (لا، ما)^4

ایک خطی استحالہ لا = لہ لا + مہ ما، ما = لَہ لا + مَہ ما کے ذریعہ شکل

ف (لہ، لَہ) لا^4 + ف (مہ، مَہ) ما^4 + ۶ غہ م^2 لا^2 ما^2

میں تحویل ہوسکتا ہے جہاں

۴ غہ^3 − ع غہ + ج = ۰، م = لہ مَہ − لَہ مہ،

(سلوسٹر)

۲۰ — پچھلی مثال کی ترقیم کو قائم رکھ کر ثابت کرو کہ چار درجی کے چھ درجی ہم متغیر کے اجزائے ضربی ع، و، ط میں سے ایک کی اصلیں

لہ/لَہ اور مہ/مَہ ہیں۔ (دفعہ ۱۸۳)

۲۱ — ثابت کرو کہ

(فر^2 ک$_{لا}$) / (فر لا^2) = ۲۰ (ع$_1^2$ ع$_2$ − ع ع$_3^2$)

یہ دفعہ ۶۵ کا محول کبھی ہے (دیکھو مثال ۵ صفحہ ۱۹۵ جلد اول)

۲۲ — ثابت کرو کہ

غہ$_1^{پ}$ لا^2 + غہ$_2^{پ}$ ما^2 + غہ$_3^{پ}$ ے^2 = Π$_{پ-۲}$ ھ$_{لا}$ − Π$_{پ-۱}$ ع

جہاں Π$_{پ-۱}$ اور Π$_{پ-۲}$ متجانس حاصل ضربوں کے مجموعے ہیں۔

(157)

۲۳ — ثابت کرو کہ

(۲۷ جے² - ع³) (ماَ سے + سے لاَ + لاَ ماَ)

≡ ع² ع′ - ۳۶ جے ۶ ھ + ۱۲ ھ² ع

جہاں اس متماثلہ کی دوسری جانب گ کا ضبسوی ہے۔

۲۴ — اگر ع ≡ طہ⁴ + یہ⁴ + ۶ م طہ² یہ²

جہاں طہ = لہ لا + مہ ما، یہ = لَہ لا + مَہ ما، مہ = لہ مَہ - لَہ مہ

تو ثابت کرو کہ ع ≡ مہ⁴ (۱ + ۳ م²)، جے ≡ مہ⁶ (م - م³)،

مہ² ≡ جے / ع ، (۱ + ۳ م²) / (م - م³) ، ۴ (مہ² م)³ - ع (مہ² م) + جے = ۰،

ھ ≡ مہ⁴ {م (طہ⁴ + یہ⁴) + (۱ - ۳ م²) طہ² یہ²}،

گ ≡ مہ⁶ (۱ - ۹ م²) طہ یہ (طہ⁴ - یہ⁴)

۲۵ — بتاؤ کہ (۱) مثال ۱۹ کے استحالہ کو عمل میں لانے کے دو حقیقی اور الگ الگ طریقے ہیں جبکہ چار درجی کی اصلیں سب کی سب حقیقی ہوں یا خیالی، اور (۲) صرف ایک حقیقی طریقہ ہے جبکہ دو اصلیں حقیقی اور دو خیالی ہوں۔

دفعہ ۱۸۵ کے ۵، ۵، ۵ کی قیمتیں محسوب کرو اور اس پر غور کرو کہ پہلی صورت میں محول کعبی کی تین اصلیں حقیقی ہیں اور دوسری صورت میں ایک حقیقی اور دو خیالی۔

(158)

اٹھارواں باب

مجتمع شکلوں کے ہم متغیر اور غیر متغیر

۱۸۹ - مجتمع شکلیں - اس باب میں ہم دو یا زیادہ کثیر رقمیوں کے نظاموں کے ہم متغیروں اور غیر متغیروں کے نظریہ کی وضاحت سادہ ترین صورتوں سے یعنی (۱) دو دو درجیوں (۲) دو درجی اور کعبی (۳) دو کعبیوں کے ذریعہ کرینگے - ہر صورت میں اُن شکلوں کا شمار کیا جائیگا جنکا بنیادی اہمیت رکھنا کلبش (Clebsch) گارڈن (Gordan) اور سلوسٹر (Sylvester) نے ثابت کیا ہے ہم یہ بتائینگے کہ یہ شکلیں کس طرح حاصل کیجا سکتی ہیں لیکن اس بات کی کوشش نہیں کرینگے کہ ان سے تمام دوسری شکلیں جو ان پر منحصر ہیں کس طرح تحویل کیجا سکتی ہیں - مجتمع نظام کے ہم متغیروں یا غیر متغیروں کی تعداد کی تخمین میں وہ غیر تابع اشکال جو ہر کثیر رقمی سے تعلق رکھتی ہیں (یعنی ہر کثیر رقمی کے اپنے غیر متغیر اور ہم متغیر) اس کل تعداد میں شامل کیجاتی ہیں جو نظام سے متعلق ہے - یہ سہولت بخش ہوگا کہ ہم اصطلاح "خاص" ان شکلوں کے موسوم کرنیکے لئے استعمال کریں جو دو کثیر رقمیوں سے (جنکو ایک نظام سمجھا گیا ہے) متعلق ہیں تاکہ اُن شکلوں سے تمیز ہو سکے جو علیحدہ لئے ہوئے کثیر رقمیوں سے تعلق رکھتی ہیں -

غیر متغیروں اور ہم متغیروں دونوں کا ایک نام "ہم رو" ہو سکتا ہے

یہ نام کسی ایسے تفاعل کے لئے استعمال کیا جا سکتا ہے جس کے رشتے کثیر رقمیوں کے ساتھ خطی استحالہ پر منحصر نہیں ہوتے ۔

۱۹۰ ــ دو دو درجی ــ فرض کرو کہ دو دو درجی یہ ہیں

$$ع \equiv ا_{۱} لا^{۲} + ۲ ب_{۱} لا ما + ج_{۱} ما^{۲}، \quad و \equiv ا_{۲} لا^{۲} + ب_{۲} لا ما + ج_{۲} ما^{۲}،$$

اس نظام کا ایک خاص غیر متغیر ہے اور ایک خاص ہم متغیر ـ $ل ع + مہ و$ کا ممیز بنانے سے یہ غیر متغیر حاصل ہو سکتا ہے ـ چنانچہ اس جملہ کا ممیز ہے

$$ل^{۲}(ا_{۱}ج_{۱} - ب_{۱}^{۲}) + ل مہ (ا_{۱}ج_{۲} + ا_{۲}ج_{۱} - ۲ب_{۱}ب_{۲}) + مہ^{۲}(ا_{۲}ج_{۲} - ب_{۲}^{۲})$$

(159) جس میں $ل : مہ$ کے تمام سر غیر متغیر ہیں (دفعہ ۱۷۵) ـ اسلئے خاص غیر متغیر حاصل ہوتا ہے

$$ا_{۱}ج_{۲} + ا_{۲}ج_{۱} - ۲ب_{۱}ب_{۲} \equiv ۲ ع_{۱۲}،$$ (مثال ۳ دفعہ ۱۷۱)

سروں کے اس تفاعل کا معدوم ہونا اس بات کی شرط ہے کہ خطوط $ع و = ۰$ کا پنسل موسیقی ہوگا، ایک مساوات سے تعبیر ہونیوالی شعاعیں دوسری مساوات سے تعبیر ہونیوالی شعاعوں کی مزدوج ہیں ـ

خاص ہم متغیر دئے ہوئے نظام کا جیکوبین ہے جسکو ہم لکھ سکتے ہیں

$$ج(ع، و) \equiv \begin{vmatrix} ا_{۱}لا + ب_{۱}ما & ب_{۱}لا + ج_{۱}ما \\ ا_{۲}لا + ب_{۲}ما & ب_{۲}لا + ج_{۲}ما \end{vmatrix}$$

اِسکو اس شکل

$$\begin{vmatrix} ما^{۲} & -لا ما & لا^{۲} \\ ا_{۱} & ب_{۱} & ج_{۱} \\ ا_{۲} & ب_{۲} & ج_{۲} \end{vmatrix}$$

میں لکھا جا سکتا ہے جو کثیر رقمیوں ع، و، $(\text{لا}\,\text{ما}' - \text{لا}'\,\text{ما})^2$ سے متغیروں کو بین تحلیلی طور پر ساقط کرنے سے حاصل ہوا ہے، شکل $\text{لا}\,\text{ما}' - \text{لا}'\,\text{ما}$ تمام ثنائی کثیر رقمیوں کا کلی ہم رو ہے (دفعہ ۱۷۵)۔ لہ اور مہ کو ان مساواتوں سے جو متماثلہ $\text{لہ}\,\text{ع} + \text{مہ}\,\text{و} \equiv (\text{لا}\,\text{ما}' - \text{لا}'\,\text{ما})^2$ میں سروں کا مقابلہ کرنے سے حاصل ہوتی ہیں ساقط کرنے سے بھی جے (ع، و) کی یہ شکل حاصل ہو سکتی ہے۔

جے کا مربع ع اور و کے ساتھ حسب ذیل اہم رشتہ رکھتا ہے:-

$$-\text{جے}^2(\text{ع},\text{و}) = \text{ع}_{22}\,\text{ع}^2 - 2\,\text{ع}_{21}\,\text{ع}\,\text{و} + \text{ع}_{11}\,\text{و}^2 \qquad (1)$$

اسکو اس مساوات

$$\begin{vmatrix} \text{و} & \text{ع} & 0 \\ 2\,\text{ع}_{21} & 2\,\text{ع}_{11} & \text{ع} \\ 2\,\text{ع}_{22} & 2\,\text{ع}_{21} & \text{و} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ما}^2 & 2\,\text{لا}\,\text{ما} & \text{لا}^2 \\ \text{لہ}_1 & -2\,\text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{لہ}_2 & -2\,\text{ب}_2 & \text{ج}_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \text{لا}'^2 & -\text{لا}'\,\text{ما}' & \text{ما}'^2 \\ \text{ج}_1 & \text{ب}_1 & \text{لہ}_1 \\ \text{ج}_2 & \text{ب}_2 & \text{لہ}_2 \end{vmatrix}$$

سے فوراً اخذ کیا جا سکتا ہے۔

اب یہ دیکھنا آسان ہے کہ جے (ع و) سے نظام $\text{لہ}\,\text{ع} + \text{مہ}\,\text{و}$ کے دوہرے خطوط ملتے ہیں کیونکہ جب $\text{لہ}\,\text{ع} + \text{مہ}\,\text{و}$ کامل مربع ہوتا ہے تو

$$\text{لہ}^2\,\text{ع}_{11} + 2\,\text{لہ}\,\text{مہ}\,\text{ع}_{21} + \text{مہ}^2\,\text{ع}_{22} = 0$$

اور مساوات $\text{لہ}\,\text{ع} + \text{مہ}\,\text{و} = 0$ کے ذریعہ لہ : مہ کو ساقط کرنے سے (160)
مساوات

$$\text{ع}_{22}\,\text{ع}^2 - 2\,\text{ع}_{21}\,\text{ع}\,\text{و} + \text{ع}_{11}\,\text{و}^2 = 0,$$

سے یعنے $جے^{۲} (ع، و) = ۰$

سے دو ہرے خطوط متعین ہوتے ہیں۔

دو دو درجیوں کے نظام کا ہر ہم روچہ شکلوں ع، و، جے (ع، و)

$ع_{۱۱}$، $ع_{۱۲}$، $ع_{۲۲}$ کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے۔ یہ تمام شکلیں مندرجہ

بالا ضابطہ (۱) کے اجزائے ترکیبی ہیں۔ مثلاً ع، و کا حاصل ہے

$$۴ (ع_{۱۱} ع_{۲۲} - ع_{۱۲}^{۲})، \qquad \text{(دفعہ ۱۵۰)}$$

اور یہ جے (ع، و) کا ممیز بھی ہے اور ع، و، جے (ع، و)

کا بین تحلیلی حاصل اسقاط بھی۔

۱۹۱۔ دو درجی اور کعبی۔ فرض کرو کہ دو کثیر رقمی ہیں

$$ع \equiv (ا، ب، ج، د)(لا، ما)^{۳}، \quad و \equiv (اَ، بَ، جَ)(لا، ما)^{۲}$$

ع کے ہم متغیر حسب معمول $ھ_{لا}$ اور $گ_{لا}$ سے تعبیر ہوتے ہیں۔

اس نظام کا ایک خاص کعبی ہم متغیر ہے یعنے ع اور و کا جیکوبین یا

جے (ع، و) اور ایک خاص دو درجی ہم متغیر یا جے $(ھ_{لا}، و)$

باقی ہم متغیروں کو لکھ لینے میں حسب ذیل ترقیم کا اختیار کرنا

سہولت بخش ہوگا:-

ع میں لا، ما کی بجائے تفرقی علامتیں $عف_{ما} \left(\equiv \frac{جف}{جف\ ما}\right)$،

$- عف_{لا} \left(\equiv - \frac{جف}{جف\ لا}\right)$ علی الترتیب درج کرنے سے جو نتیجہ حاصل

ہوتا ہے اسکو تعبیر کرنیکے لئے ہم ع کے ساتھ لاحقہ عف لگا دینگے یعنی

ع عف ≡ (ا، ب، ج، د) (عف ما، - عف لا)^۳،

و عف ≡ (ا، ب، ج) (عف ما، - عف لا)^۲

اور ایسی ہی ترقیم دوسری صورتوں میں -

چار خطی ہم متغیر ہیں جنکو اب اس طرح لکھا جا سکتا ہے :-

و عف (ع)، و عف (گ لا)، ع عف (و^۲)، گ عف (و^۲)،

ان میں سے پہلے ہم متغیر کو پوری طرح لکھا جائے تو وہ ہے

(ا جَ - ۲ ب بَ + ج اَ) لا + (ب جَ - ۲ ج بَ + د اَ) ما

تین خاص غیر متغیر ہیں - پہلا غیر متغیر دو درجیوں ھ لا اور و (167)
کے نظام کا درمیانی غیر متغیر ہے یعنے

ع ۱۲ ≡ (ب د - ج^۲) اَ + (ب ج - ا د) بَ - (ا ج - ب^۲) جَ

جہاں ترقیم ع ن ق اس بات کو بتانے کے لئے استعمال کیگئی ہے کہ غیر متغیر

ع کے سروں میں ن ویں درجہ کا اور و کے سروں میں ق ویں درجہ کا ہے - دوسرا غیر متغیر کثیر رقمیوں ع اور و کا حاصل اسقاط کا ہے - یہ غیر متغیر ع کے سروں میں دوسرے درجہ کا اور و کے سروں میں تیسرے درجہ کا ہے اور اسکو چودھویں باب کے اسقاط کے طریقوں سے متعدد شکلوں میں بیان کیا جا سکتا ہے - اس نمونہ کے کسی غیر متغیر ع ۲۳ کی عام شکل یہ ہے

ع ۲۴ ≡ ل ر + م (ا جَ - بَ^۲) ع ۱۲

جہاں ل اور م کوئی عدد ہیں -

تیسرا غیر متغیر (جو معوج ہے) نمونہ ع کا ہے اور و سے علی الترتیب تین مرتبہ ع اور گ لا کے حاصل ضرب پر عمل کرنے سے حاصل ہو سکتا ہے۔ چنانچہ اسکو اس شکل

$$و^۳_{عف} (ع گ_{لا})$$

میں لکھا جا سکتا ہے۔

پس اس نظام سے متعلق نو خاص شکلیں ہیں اور اگر ان میں ع اور و اور ہر ایک کے غیر تابع ہم متغیروں اور غیر متغیروں کو شامل کیا جائے تو ہمیں پندرہ شکلوں کی پوری فہرست ملتی ہے یعنے تین دو درجی، تین کعبی، چار خطی ہم متغیر اور پانچ غیر متغیر۔

۱۹۲ — دو کعبی — فرض کرو کہ کعبی ہیں

$$ع \equiv (ا، ب، ج، د)(لا، ما)^۳ ، و \equiv (اَ، بَ، جَ، دَ)(لا، ما)^۳$$

اور ع کے ہم متغیر حسب معمول ھ لا اور گ لا سے اور و کے ہم متغیر ھَ لا اور گَ لا سے تعبیر ہوتے ہیں۔

اس نظام کا ایک چار درجی ہم متغیر ع اور و کا جیکوبین ہے یعنی

$$ج(ع، و) \equiv (ا بَ) لا^۴ + ۲(ا جَ) لا^۳ ما + \{(ا دَ)$$
$$+ ۳(ب جَ)\} لا^۲ ما^۲ + ۲(ب دَ) لا ما^۳ + (ج دَ) ما^۴$$

اور دو خاص کعبی ہم متغیر ہیں یعنے

$$ج(ع، ھَ_{لا}) \quad اور \quad ج(و، ھ_{لا})$$

چار خاص دو درجی ہم متغیر ہیں۔ اگر ہم ل ع + مہ و کا ہیسوی (162)

بتائیں یعنی ھ میں ا، ب، وغیرہ کی بجائے لہ ا + مہ اَ، لہ ب + مہ بَ، وغیرہ درج کریں تو

لہ² ھ + لہ مہ م + مہ² ھَ

حاصل ہوتا ہے۔ درمیانی جیسوی م جو یہاں حاصل ہوا ہے پہلا خاص دو درجی ہم متغیر ہے اور بقیہ تین ہم متغیر ھ، م اور ھَ میں سے دو دو کے جیکوبین لینے سے حاصل ہوتے ہیں۔

چھ خطی ہم متغیر ہیں جنکو اس طرح لکھا جا سکتا ہے:۔

ھ عف (و)، ھ عف (گَ)، ھَ عف (ع)، ھَ عف (گَ)، عف (ھ²)، اور

و عف (ھ²)

یہ آسانی کے ساتھ دیکھا جا سکتا ہے کہ ھ عف (ع) اور ھ عف (گَ) متماثلاً معدوم ہوتے ہیں کیونکہ ع اور گَ کو خطی استحالہ کے ذریعہ علی الترتیب اشکال ا لا³ + د ا³ اور ا د (ا لا³ ـ د ا³) میں اور ھ کو شکل ا د لا ا میں لایا جا سکتا ہے۔ (دفعہ ۱۸۰)

اِس نظام کے کل سات غیر متغیر ہیں جنمیں سے پانچ، لہ ع + مہ و کا ممیز بنا کر حاصل کئے جا سکتے ہیں، لہ: مہ کی مختلف قوتوں کے سر غیر متغیر ہیں۔ اگر یہ ممیز

لہ⁴ Δ + ۴ لہ³ مہ طا + ۶ لہ² مہ² فا + ۴ لہ مہ³ طاَ + مہ⁴ Δَ

ہے تو ہمیں اس طور پر تین خاص غیر متغیر طا، فا، طاَ حاصل ہوتے ہیں، ابتدائی اور آخری سر ع اور و کے ممیز ہیں۔ بقیہ دو غیر متغیر

ہر کعبی کے سروں میں طاق رتبوں کے ہیں۔ انکو ف اور ق سے تعبیر کیا جاتا ہے اور انکی تعریف اس طرح ہو سکتی ہے:-

$$\text{ف} \equiv \tfrac{1}{6}\,\text{ع}_{\text{عف}}(\text{و}) = (\text{ا د}') - 3(\text{ب ج}') \qquad (1)$$

$$27\,\text{ق} \equiv \text{ف}^{3} - \text{ر} \qquad (2)$$

جہاں ع اور و کا حاصل ر ہے جو ہیزو کے طریقہ سے حاصل ہوا ہے (دفعہ ۱۵۵) یعنی

$$\text{ر} \equiv (\text{ا د}')^{3} - 18(\text{ا ب}')(\text{ج د}')(\text{ا د}') + 9(\text{ب د}')(\text{ج ا}')(\text{ا د}')$$
$$+\,27(\text{ج ا}')^{2}(\text{ج د}') + 27(\text{ا ب}')(\text{ب د}')^{2} - 81(\text{ا ب}')(\text{ب ج}')(\text{ج د}')$$

اب ر کی یہ قیمت (۲) میں درج کرنے سے

$$-\text{ق} \equiv (\text{ب ج}')^{3} + (\text{ج ا}')^{2}(\text{ج د}') + (\text{ا ب}')(\text{ب د}')^{2} - (\text{ب ج}')^{2}(\text{ا د}')$$
$$-\,3(\text{ا ب}')(\text{ب ج}')(\text{ج د}') - (\text{ا د}')(\text{ا ب}')(\text{ج د}')$$

(162) کوئی غیر متغیر جو ضابطہ $\text{ل ف}^{3} + \text{م ر}$ میں شامل ہو (جہاں ل اور م اعداد ہیں) نمونہ ع^{3}_{3} کا ہونے کی وجہ سے ق کی بجائے اس نمونہ کے بنیادی غیر متغیر کے طور پر انتخاب کیا جا سکتا تھا لیکن اس کو منتخب کرنیکے اسباب آئندہ ظاہر ہو جائینگے (دیکھو مثال ۴ صفحہ ۲۶۴)۔

تخمین کردہ خاص شکلوں کے ساتھ وہ اشکال بھی اگر شمار کیجائیں جو ہر کعبی سے متعلق ہیں تو کل چھبیس بنیادی شکلیں ملتی ہیں یعنے ایک چار درجی، چھہ کعبی، چھہ دو درجی، چھہ خطی ہم متغیر اور سات غیر متغیر۔

دفعات ماسبق میں تخمین کردہ ہم متغیروں اور غیر متغیروں میں سے بعض، امثلہ ذیل میں مجتمع نظام کی دونوں مساواتوں کی اصلوں کی رقوم میں بیان ہوتے ہیں۔

۱۹۳ - اجتماعئے - ایک ہی درجہ کی مجتمع شکلوں سے
ہم متغیروں اور غیر متغیروں کا ایک سلسلہ پیدا ہوتا ہے جنکے سر شکل (ا، ب، س) کے مقطعوں سے بیان ہو سکتے ہیں، یہ مقطعات ایسے ہیں جیسے اُس حاصل اسقاط میں واقع ہوتے ہیں جو بیزو کے طریقہ سے حاصل کیا جاتا ہے (دفعہ ۱۵۵) - یہ ہم رو نہیں بدلتے جبکہ ع، و کو لہ ع + مہ و، لہَ ع + مہَ و میں تبدیل کیا جاتا ہے، صرف ایک جزو ضربی بدلتا ہے جو شکل (لہ مہَ - لہَ مہ) کا ہوتا ہے۔ اس قسم کے غیر متغیروں کو ہم اجتماعئے کہینگے - متناظر ہم متغیروں کو اسی طرح اجتماعی ہم متغیر کہا جا سکتا ہے - قبل الذکر کی مثالیں دفعہ ۱۹۲ کے ف اور ق ہیں اور ایسی شکلوں کے جیکوبین ثانی الذکر جماعت کے ہم رکنوں کی مثالیں ہیں -
یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ دفعہ سابق میں لہ : مہ میں جو چار درجی ہے یعنی جو لہ ع + مہ و کا ممیز ہے اُسکے غیر متغیر ع اور جے، دو کعبیوں کے نظام کے اجتماعئے ہیں - کیونکہ لہ اور مہ کا خطی استحالہ در اصل ع اور و کے اُس قسم کے استحالہ کے معادل ہے جو اس دفعہ میں زیر بحث رہا ہے اور اس لئے غیر متغیروں ∆، طا، فا وغیرہ کا کوئی تفاعل جو اس قسم کے استحالہ سے نہیں بدلتا اجتماعیہ ہونا چاہئے - اس کی تصدیق ہو سکتی ہے کہ یہ غیر متغیر، ف اور ق کی رقوم میں حسب ذیل طریقہ پر بیان ہو سکتے ہیں (دیکھو سامن کا ہائر الجبرا دفعہ ۲۱۸):-

$$ع = ۳ف(ف^۳ - ۲۴ق)،$$

$$جے = -ف^۶ + ۳۶ف^۳ق - ۲۱۶ق^۲$$

مثالیں

(164)

۱۔ اگر مساواتوں

ع ≡ ا لا³ + ۳ ب لا² + ۳ ج لا + د = ۰، و ≡ اَ لا² + ۲ بَ لا + جَ = ۰

کی اصلیں عہ، بہ، جہ اور عہَ، بہَ ہوں تو تفاعل

(بہ − جہ)² (عہ − عہَ) (عہ − بہَ) + (جہ − عہ)² (بہ − عہَ) (بہ − بہَ)

+ (عہ − بہ)² (جہ − عہَ) (جہ − بہَ)

کو سروں کی رقوم میں بیان کرو۔

اس تفاعل کو فہ سے تعبیر کرو تو آسانی کے ساتھ حاصل ہوتا ہے

− ا² اَ فہ = ۹ {اَ (ب د − ج²) − بَ (ا د − ب ج) + جَ (ا ج − ب²)}

اصلوں کا دیا ہوا تفاعل نظام کا ایک غیر متغیر ہے کیونکہ اس میں کعبی کی سب اصلیں دوسرے درجہ میں اور دو درجی کی سب اصلیں پہلے درجہ میں شامل ہوتی ہیں۔ اگر ہم دفعہ ۱۶۶ کے ابدالات عمل میں لائیں اور تفاعل کو صحیح بنانے کے لئے ع² و سے ضرب دیں تو نتیجہ میں لا داخل نہیں ہوگا اور اس لئے وہ ایک غیر متغیر ہے (دفعہ ۱۹۱)۔

مساوات فہ = ۰ کی ہندسی تعبیر یہ ہے کہ دو درجی و کو ع کے حصیسوں کے ساتھ ملکر ایک موسیقی نظام بنانا چاہئے۔

۲۔ پچھلی مثال کی ترقیم استعمال کرکے وہ شرط معلوم کرو کہ ع = ۰ کی اصلیں و = ۰ کی اصلوں کے ساتھ ایک موسیقی سعت بنائیں۔

جواب:- ر + ۹ (اَ جَ − بَ²) ع₁₂ = ۰

۳۔ اگر کعبیوں

ع ≡ ا لا³ + ۳ ب لا² + ۳ ج لا + د = ۰،

و ≡ اَ لا³ + ۳ بَ لا² + ۳ جَ لا + دَ = ۰،

کی اصلیں عہ، بہ، جہ اور عہَ، بہَ، جہَ ہوں تو حسب ذیل تفاعل کو (جب اسکو ا اَ سے ضرب دیا جائے) سروں کی رقوم میں بیان کرو اور ثابت کرو کہ وہ اس نظام کا ایک غیر متغیر ہے :-

(عہ - عہَ) (بہ - بہَ) (جہ - جہَ) + (عہ - بہَ) (بہ - جہَ) (جہ - عہَ)
+ (عہ - جہَ) (بہ - عہَ) (جہ - بہَ)

یا دوسری طرح ترتیب دیکر لکھیں تو

(عہ - عہَ) (بہ - جہَ) (جہ - بہَ) + (عہ - بہَ) (بہ - عہَ) (جہ - جہَ)
+ (عہ - جہَ) (بہ - بہَ) (جہ - عہَ)

جواب:- ۳ف جہاں ف ≡ (ا دَ - اَ د) - ۳ (ب جَ - بَ ج) (دفعہ ۱۹۲)

۴ — پچھلی مثال کی ترقیم کو قائم رکھ کر ثابت کرو کہ اگر ک معلوم ہو سکے ایسا کہ ع + ک و ایک کامل مکعب ہو جائے تو دونوں کعبیوں کی اصلوں کے درمیان حسب ذیل ربط موجود ہوتا ہے :-

(بہ - جہ) ∛فہ(عہ) + (جہ - عہ) ∛فہ(بہ) + (عہ - بہ) ∛فہ(جہ) = ۰

جہاں فہ(لا) ≡ و اور عہ، بہ، جہ مساوات ع = ۰ کی اصلیں ہیں۔ ثابت کرو کہ اس صورت میں غیر متغیر ق (دفعہ ۱۹۲) معدوم ہوتا ہے -

اصلوں کے درمیان مندرجۂ بالا ربط فوراً حاصل ہو جاتا ہے اگر متماثلہ ع + ک و ≡ (ل لا + م)³ میں لا کی بجائے عہ، بہ، جہ درج کیا جائے اور محصلہ مساواتوں سے ک، ل، م کو ساقط کیا جائے۔ منطق بنانے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے (165)

$$\left\{ \frac{(\text{بہ} - \text{جہ})^3 \,\text{فہ}(\text{عہ}) + (\text{جہ} - \text{عہ})^3 \,\text{فہ}(\text{بہ}) + (\text{عہ} - \text{بہ})^3 \,\text{فہ}(\text{جہ})}{(\text{بہ} - \text{جہ})(\text{جہ} - \text{عہ})(\text{عہ} - \text{بہ})} \right\}^3 - 27\,\text{فہ}(\text{عہ})\,\text{فہ}(\text{بہ})\,\text{فہ}(\text{جہ}) = 0$$

فہ(عہ)، فہ(بہ)، فہ(جہ) کی بجائے اندراجات کرو اور وہ روابط داخل کرو

جو متماثلہ

Σ (عہ + لہ)^۳ (بہ − جہ)^۳ ≡ ۳ (عہ + لہ) (بہ + لہ) (جہ + لہ) (بہ − جہ) (جہ − عہ) (عہ − بہ)

میں لہ کی مختلف قوتوں کا مقابلہ کرنے سے حاصل ہوتے ہیں، پھر نتیجہ کو سروں کی رقوم میں بیان کرو تو

{ ۳ ف }^۳ − ۲۷ ر^۲ = ۰ ' یا قَ = ۰ (دفعہ ۱۹۲)

اب ہم وہ متعدد مختلف شکلیں دیتے ہیں جنمیں غیر متغیر قَ بیان ہو سکتا ہے - چونکہ ع + ک و ایک کامل مکعب ہے اسلئے (دفعہ ۴۳)

(۱) (ا + ک اَ) / (ب + ک بَ) = (ب + ک بَ) / (ج + ک جَ) = (ج + ک جَ) / (د + ک دَ)

اِن کسروں کو علیحدہ علیحدہ ـ کَ کے مساوی رکھنے سے ہم معلوم کرتے ہیں کہ

(۲)
ا + ک اَ + کَ ب + ک کَ بَ = ۰ '
ب + ک بَ + کَ ج + ک کَ جَ = ۰ '
ج + ک جَ + کَ دَ + ک کَ دَ = ۰ '

اور ک، کَ، ک کَ کے لئے اِن مساواتوں کو حل کرنے سے ہم ک، کَ، ک کَ کو ساقط کر سکتے ہیں اور شرط کو شکل ذیل میں حاصل کرتے ہیں:—

قَ ≡ |ا ب ج ؛ اَ بَ جَ ؛ بَ جَ دَ| |بَ جَ دَ ؛ ا ب ج ؛ ب ج د| − |اَ بَ جَ ؛ ا ب ج ؛ ب ج د| |ب ج د ؛ اَ بَ جَ ؛ بَ جَ دَ| = ۰

پھر مساواتوں (۱) سے ک اور کَ ساقط کرنے سے قَ کیلئے ایک دوسری شکل ملتی ہے یعنے

قَ ≡
| اجَ − ب^۲ ؛ اجَ + اَج − ۲ ب بَ ؛ اَجَ − بَ^۲ |
| اد − ب ج ؛ ادَ + اَد − ب جَ − بَ ج ؛ اَدَ − بَ جَ |
| ب د − ج^۲ ؛ ب دَ + بَ د − ۲ ج جَ ؛ بَ دَ − جَ^۲ |

قَ کی یہ شکل اِس شرط کو بیان کرنے سے بھی آسانی سے حاصل ہو سکتی ہے کہ

لہ ع + مہ و (دفعہ ۱۹۲) کا مبیسوی تماثلاً معدوم ہونا چاہئے کیونکہ یہ شرط پوری ہوتی ہے جبکہ لہ ع + مہ و ایک کامل مکعب ہو۔

آخر الامر، مساوات (۲) کو اس شکل

$$\frac{ا + کَ بَ}{اَ + کَ بَ} = \frac{ب + کَ جَ}{بَ + کَ جَ} = \frac{ج + کَ دَ}{جَ + کَ دَ}$$

میں لکھنے اور کَ، کَ² کو ساقط کرنے سے ق کے لئے ایک تیسری شکل ملتی ہے یعنی

$$ق = \begin{vmatrix} (ا\ بَ) & (ا\ جَ) & (ب\ جَ) \\ (ا\ جَ) & (ا\ دَ) + (ب\ جَ) & (ب\ دَ) \\ (ب\ جَ) & (ب\ دَ) & (ج\ دَ) \end{vmatrix}$$

اس شکل میں اجزائے ترکیبی وہی صغیر منقطعات ہیں جو بیزو کے (166)
طریقہ سے حاصل اسقاط معلوم کرنے میں واقع ہوتے ہیں، اور اس کی آسانی کے ساتھ تصدیق ہو سکتی ہے کہ ق کی یہ قیمت دفعہ ۱۹۲ میں درج کردہ پھیلائی ہوئی شکل کے مطابق ہے۔

۵ — وہ شرط معلوم کرو کہ دو کعبیوں کی اصلوں سے ایک درپیچی نظام متعین ہو۔

نمونہ

$$\begin{vmatrix} ۱ & عہ + عہَ & عہ عہَ \\ ۱ & بہ + بہَ & بہ بہَ \\ ۱ & جہ + جہَ & جہ جہَ \end{vmatrix}$$

کے چھ منقطعات کے حاصل ضرب کو صفر کے مساوی رکھنے سے مطلوبہ شرط اصلوں کی رقوم میں حاصل ہوتی ہے۔

۶ — مثال ماسبق کی شرط کو کعبیوں کے سروں کی رقوم میں بیان کرو۔ چونکہ ایک کعبی کی اصلیں دوسرے کعبی کی اصلوں کی مزدوج ہیں یہ دونوں کعبی اشکال ذیل میں سے کسی ایک طرح کی ہو سکتے ہیں:—

ع ≡ ا لا³ + ۳ ب لا² + ۳ ج لا + د ،

و ≡ د لا³ + ۳ کَ ج لا² + ۳ کَ² ب لا + کَ³ ا ،

اور غہ ع + و کے ممیز کو عام شکل (دفعہ ۱۹۲)

غہ⁴ Δ + ۴ غہ³ طا + ۶ غہ² فا + ۴ غہ طَا + Δَ

میں لکھنے سے ہمیں اس صورت میں حاصل ہوتا ہے

طَا = کَ³ طا ، Δَ = کَ⁶ Δ

اسلئے مطلوبہ شرط ہے

Δ طَا² − Δَ طا² = ۰

۷ — مثال ۳ کے کعبیوں کے سروں کی رقوم میں اس نظام کے حسب ذیل ہم متغیر کو بیان کرو :—

ا اَ ∑ {۳ (بہ − بَہ)(جہ − جَہ) + ۳ (بہ − جَہ)(جہ − بَہ)
+ (بہ − جہ)(بَہ − جَہ)} (لا − عہ)(لا − عَہ)

جواب :— ۱۸ {(ا جَ + اَ ج − ۲ ب بَ) لا² + (ا دَ
+ اَ د − ب جَ − بَ ج) لا + (ب دَ + بَ د − ۲ ج جَ)}

۸ — کعبیوں

ع ≡ (ا، ب، ج، د)(لا، ما)³ ، و ≡ (اَ، بَ، جَ، دَ)(لا، ما)³

کو شکلوں

ع = ۱/۴ (جف ف / جف لا) ، و = ۱/۴ (جف ف / جف ما)

میں ایک ایسے خطی استحالہ کے ذریعہ تحویل کرو جس کے سر دئے ہوئے کعبیوں کے سروں کی رقوم میں معلوم ہوں۔

فرض کرو :— ف = (ا، ب، ج، د، ص)(لا، ما)⁴

ع ≡ (ا، ب، ج، د)(لا، ما)³ = (ا، ب، ج، د)(لا، ما)³ ،

و ≡ (اَ، بَ، جَ، دَ)(لا، ما)³ = (ب، ج، د، ص)(لا، ما)³

(167) اب ع کی دونوں شکلوں کے ضیبوں میں لا اور ما کی بجائے تفرقی علامتیں $\text{عف}_{\text{ما}}$ ، $-\text{عف}_{\text{لا}}$ اور لا اور ما کی بجائے $\frac{1}{\text{م}}\text{عف}_{\text{ما}}$ ، $-\frac{1}{\text{م}}\text{عف}_{\text{لا}}$ درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\begin{vmatrix} \text{عف}_{\text{لا}}^2 & \text{عف}_{\text{لاما}} & \text{عف}_{\text{ما}}^2 \\ \text{ا}' & \text{ب}' & \text{ج}' \\ \text{ب}' & \text{ج}' & \text{د}' \end{vmatrix} = \frac{1}{\text{م}^2}\begin{vmatrix} \text{عف}_{\text{لا}}^2 & \text{عف}_{\text{لاما}} & \text{عف}_{\text{ما}}^2 \\ \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \end{vmatrix}$$

اسلئے و کی دونوں شکلوں پر عمل کرنے سے

$$\text{پہ}(\text{لا}، \text{ما}) \equiv \begin{vmatrix} \text{ا}' & \text{ب}' & \text{ج}' \\ \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \end{vmatrix}\text{لا} + \begin{vmatrix} \text{ب}' & \text{ج}' & \text{د}' \\ \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \end{vmatrix}\text{ما} = \frac{\text{جے}\,\text{ما}}{\text{م}^2}$$

اسی طرح

$$\text{فہ}(\text{لا}، \text{ما}) \equiv \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ا}' & \text{ب}' & \text{ج}' \\ \text{ب}' & \text{ج}' & \text{د}' \end{vmatrix}\text{لا} + \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \\ \text{ا}' & \text{ب}' & \text{ج}' \\ \text{ب}' & \text{ج}' & \text{د}' \end{vmatrix}\text{ما} = \frac{\text{جے}\,\text{لا}}{\text{م}^2}$$

جہاں فہ اور پہ، ع اور و کے ہم متغیر ہیں اور جے، ف کا ثلاثی غیر متغیر ہے۔

پھر چونکہ

$$\text{فہ}_{\text{عف}} = \text{فہ}(\text{عف}_{\text{ما}}، -\text{عف}_{\text{لا}}) = \frac{\text{جے}}{\text{م}^5}\text{عف}_{\text{ما}} \quad \text{اور} \quad \text{پہ}_{\text{عف}} = -\text{پہ}(\text{عف}_{\text{ما}}، -\text{عف}_{\text{لا}})$$

$$= \frac{\text{جے}}{\text{م}^5}\text{عف}_{\text{لا}}$$

اسلئے عمل

$$\text{فہ}(\text{عف}_{\text{ما}}، -\text{عف}_{\text{لا}})\,\text{پہ}(\text{لا}، \text{ما}) \quad \text{یا} \quad \text{پہ}(\text{عف}_{\text{ما}}، -\text{عف}_{\text{لا}})\,\text{فہ}(\text{لا}، \text{ما})$$

کی تکمیل معادل شکلوں پر کرنے سے حاصل ہوتا ہے :-

$$\text{ق} \equiv \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{اَ} & \text{بَ} & \text{جَ} \\ \text{بَ} & \text{جَ} & \text{دَ} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \text{بَ} & \text{جَ} & \text{دَ} \\ \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \text{اَ} & \text{بَ} & \text{جَ} \\ \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \\ \text{اَ} & \text{بَ} & \text{جَ} \\ \text{بَ} & \text{جَ} & \text{دَ} \end{vmatrix} = \frac{\text{جے}^{۲}}{\text{مہ}}$$

اب ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ ع اور و مطلوبہ شکلوں میں تحویل کئے جا سکتے ہیں :-

کیونکہ پہلی مساواتوں سے

$$\text{ق لا} = \begin{vmatrix} \text{بَ} & \text{جَ} & \text{دَ} \\ \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \end{vmatrix} \text{فہ} - \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \\ \text{اَ} & \text{بَ} & \text{جَ} \\ \text{بَ} & \text{جَ} & \text{دَ} \end{vmatrix} \text{پہ} \equiv \text{م فہ} - \text{مَ پہ}$$

$$\text{ق ما} = - \begin{vmatrix} \text{اَ} & \text{بَ} & \text{جَ} \\ \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \end{vmatrix} \text{فہ} + \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{اَ} & \text{بَ} & \text{جَ} \\ \text{بَ} & \text{جَ} & \text{دَ} \end{vmatrix} \text{پہ} \equiv -\text{ل فہ} + \text{لَ پہ}$$

$$\text{پہ} = \text{ل لا} + \text{م ما} ،\quad \text{فہ} = \text{لَ لا} + \text{مَ ما}$$

(168) اگر اس ابدال کی وجہ سے

$$\text{ق}^{۳}\,\text{ع} = (\text{اَ، بَ، جَ، دَ})(\text{فہ، پہ})^{۳} ،\quad \text{ق}^{۳}\,\text{و} = (\text{اً، بً، جً، دً})(\text{فہ، پہ})^{۳}$$

ہو تو

$$\text{اَ} = \text{ا مَ}^{۳} - ۳\,\text{ب مَ}^{۲}\,\text{لَ} + ۳\,\text{ج مَ لَ}^{۲} - \text{د لَ}^{۳} = \frac{۱}{۶}\,\text{پہ}^{۳}_{\text{عف}}\,\text{ع} ،$$

$$\text{بَ} = -\text{ا م}^{۲}\,\text{مَ} + \text{ب مَ}^{۲}\,\text{لَ} + ۲\,\text{ب م مَ ل} - ۲\,\text{ج م ل لَ} - \text{ج لَ}^{۲}\,\text{مَ} + \text{د لَ}^{۲}\,\text{ل}$$

$$= \text{مَ}^{۲}(\text{ب لَ} - \text{ا مَ}) + ۲\,\text{م ل}(\text{ب مَ} - \text{ج لَ}) + \text{لَ}^{۲}(\text{د لَ} - \text{ج مَ})$$

اب اگر ع اور ع کے تعبیوی ھ اور ھَ علی الترتیب

جہ لا^۲ - بہ لا ما + عہ ما^۲ ، جَہ لا^۲ - بَہ لا ما + عَہ ما^۲

کے مساوی ہوں تو

لَ = ا عَہ + ب بَہ + ج جَہ ، مَ = ب عَہ + ج بَہ + د جَہ ،

مع ل اور م کے لئے متشابہ قیمتوں کے ۔ پس

ب لَ - ا مَ = (بہ جَہ) = اَ م - بَ ل ، ج لَ - ب مَ = (جہ عَہ) = بَ م - جَ ل

د لَ - ج مَ = (عہ بَہ) = جَ م - دَ ل ۔

پس بَ = مَ^۲ (بہ جَہ) - ۲ م ل (جہ عَہ) + لَ^۲ (عہ بَہ) = ۱/۲ پہ^۲/عف سجے (ھ، ھَ)

نیز بَ = - ۱/۶ پہ^۲/عف فہ/عف ع

جَ = م مَ (اَ م - بَ ل) + م لَ (جَ ل - بَ م) + مَ ل (جَ لَ - ب مَ)
+ ل لَ (ج مَ - د لَ)
= - م مَ (بہ جَہ) + (م لَ + مَ ل) (جہ عَہ) - ل لَ (عہ بَہ)

= - ۱/۲ پہ/عف فہ/عف سجے (ھ، ھَ)

نیز جَ = ۱/۶ پہ/عف فہ^۲/عف ع

دَ = مَ^۲ (بہ جَہ) - ۲ مَ لَ (جہ عَہ) + لَ^۲ (عہ بَہ) = ۱/۲ فہ^۲/عف سجے (ھ، ھَ)

نیز دَ = - ۱/۶ فہ^۳/عف ع

اسی طرح

اَ = مَ^۲ (بہ جَہ) - ۲ م ل (جہ عَہ) + ل^۲ (عہ بَہ) = بَ

بَ = - م مَ (بہ جَہ) + (م لَ + مَ ل) (جہ عَہ) - ل لَ (عہ بَہ) = جَ

جً = مَ^٢ (بہ جہ) − ٢ مَ لَ (جہ عہ) + لَ (عہ بہ) = دَ

دً = − ١/٦ (قہ^٣ / عف) و۔

اسلئے اگر

اَ = ق^٣ ا ، بَ = اَ = ق^٣ ب ، جَ = بً = ق^٣ ج

دَ = جً = ق^٣ د ، دً = ق^٣ ص

ف = (ا ، ب ، ج ، د ، ص)(فہ ، پہ)^٤

لکھا جائے تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

ع = ١/٤ (جف ف / جف فہ) ، و = ١/٢ (جف ف / جف پہ)

اور ہم دیکھتے ہیں کہ ا ، ب ، ج ، د ، ص غیر متغیر ہیں جیسا کہ ہونا چاہئے۔

٩ ۔ پچھلی مثال میں ف کے غیر متغیر معلوم کرو اور اسلئے دو کعبیوں کے حاصل کی شکل کا استخراج کرو ۔

مثال ٨ کی مساواتوں سے

ق = جے^٢ / م^٩ ، م = (م ل) / ق^٢ = ق

اور لا ، ما اور فہ ، پہ کی بجائے و کی دونوں شکلوں میں تفرقی علامتیں درج کرنے اور ع پر عمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

ف = ا دَ − اَ د − ٣ (ب جَ − بَ ج) = ع / م^٢ = ع / ق^٢

اسلئے

جے^٢ = ق^١ ، ع = ف ق^٢ ،

ع^٣ − ٢٧ جے^٢ = ق^٩ (ف^٣ − ٢٧ ق)

جن سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جب ف^۲ = ۲۷ ق تو ع^۳ = ۲۷ ج^۲
لیکن پہلا رشتہ درست رہتا ہے جبکہ ف کا ایک جزو ضربی مربع ہو جس کے لئے یہ ضروری ہے کہ ع اور و میں ایک جزو ضربی مشترک ہو۔ اسلئے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ ف^۲ - ۲۷ ق اور ع اور ف میں ایک جزو ضربی مشترک ہے لیکن چونکہ ف^۲ - ۲۷ ق کا درجہ اور وزن صحیح ہے اسلئے وہ ع اور و کا حاصل ہے (دیکھو دفعہ ۱۹۲) (۱۶۹)

۱۰ — اگر چار درجیوں

(ا، ب، ج، د، ص) (لا، ۱)^۴ = ۰،

(اَ، بَ، جَ، دَ، صَ) (لا، ۱)^۴ = ۰،

کی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ، اور عَہ، بَہ، جَہ، ضَہ ہوں تو ثابت کرو کہ

اا َ Σ (عہ - عَہ) (بہ - بَہ) (جہ - جَہ) (ضہ - ضَہ)

= ۲۴ { ا صَ + اَ ص - ۴ (ب دَ + بَ د) + ۶ ج جَ }

اور بتاؤ کہ یہ تفاعل نظام کا ایک غیر متغیر ہے۔

۱۱ — ثابت کرو کہ چار درجی اور دو درجی کی اصلوں کے حسب ذیل تفاعل سے اس نظام کا ایک غیر متغیر حاصل ہوتا ہے اور اس کا ہندسی مفہوم بیان کرو:—

۱	بہ + جہ	بہ جہ
۱	عہ + ضہ	عہ ضہ
۱	عَہ + بَہ	عَہ بَہ

۱	جہ + عہ	جہ عہ
۱	بہ + ضہ	بہ ضہ
۱	عَہ + بَہ	عَہ بَہ

۱	عہ + بہ	عہ بہ
۱	جہ + ضہ	جہ ضہ
۱	عَہ + بَہ	عَہ بَہ

≡ فہ

مساوات فہ = ۰ کا ہندسی مفہوم یہ ہے کہ چار درجی سے جو تین درجیے متعین ہوتے ہیں انمیں سے کسی ایک کے دو مزدوج ماسکے دو درجی کے ساتھ ایک موسیقی نظام بناتے ہیں۔

۱۲ — ثابت کرو کہ چار درجی اور دو درجی کی اصلوں کے حسب ذیل تفاعلوں سے اس نظام کے غیر متغیر حاصل ہوتے ہیں اور ان کی قیمتیں سرد نجی رقوم میں معلوم کرو:—

لٗ ب² ≡ (عہٗ − عہ)(عہٗ − بہ)(بہٗ − جہ)(بہٗ − ضہ)ٗ

لٗ² بہٗ² ≡ (عہ − بہ)² (جہ − عہٗ) (ضہ − بہٗ)(جہ − بہٗ)(ضہ − عہٗ)

۱۳ — اگر دو چار درجی جنکی اصلیں غیر مساوی ہیں ف (لا) اور فہ (لا) ہوں اور ف (لا) کی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ ہوں تو ثابت کرو کہ نظام لہ ف (لا) + مہ فہ (لا) کے ایک چار درجی کے دو مربع اجزائے ضربی ہو سکتے ہیں بشرطیکہ

$$\begin{vmatrix} ۱ & عہ & عہ^{2} & \sqrt{فہ(عہ)} \\ ۱ & بہ & بہ^{2} & \sqrt{فہ(بہ)} \\ ۱ & جہ & جہ^{2} & \sqrt{فہ(جہ)} \\ ۱ & ضہ & ضہ^{2} & \sqrt{فہ(ضہ)} \end{vmatrix} = ۰$$

۱۴ — سروں کی رقوم میں وہ شرط معلوم کرو کہ شکل لہ ف (لا) + مہ فہ (لا) کے چار درجی کے دو اجزائے ضربی مربع ہو سکیں۔

اس صورت میں لہ ف (لا) + مہ فہ (لا) کا حیسوی ≡ ک {لہ ف (لا) + مہ فہ (لا)}

اور اس متماثلہ سے لہ²، لہ مہ، مہ²، ک لہ، ک مہ کو ساقط کرنیکے لئے پانچ مساواتیں ملتی ہیں۔ اس طرح ہر مساوات کے سروں کی رقوم میں چوتھے درجہ کا ایک غیر متغیر ع‌ہہہ حاصل ہوتا ہے۔

۱۵ — لہ ع + مہ و کے ممیز کو دفعہ ۱۹۲ کے مطابق لکھ کر ہم متغیر

(ہ، طا، فا، طاٗ، ہٗ)(وٗ، −ع)⁴

کو اس کے اجزائے ضربی میں تحلیل کرو جہاں ع ≡ (ا، ب، ج، د)(لا، ما)³ اور و ≡ (اٗ، بٗ، جٗ، دٗ)(لا، ما)³ —

اس ہم متغیر کا صدر سر، ا و − اٗ ع کا ممیز بنانے سے آسانی کیساتھ بالراست حاصل ہوتا ہے اور وہ یہ ہے

(ا ب)^{۲} {۴(ا ب)(ا د) - ۳(ا ج)^{۲}}

جیکوشکل ۲ ا^{۲} {ف ا + ۶(ا ج - ب^{۲})} میں لکھا جا سکتا ہے جہاں ا، ب، ج، جیکوبین کے پہلے تین سر ہیں۔ اسلئے دبا ہوا ہم متغیر شکل ذیل میں بیان ہو سکتا ہے:-

۲ ب^{۲}(ع، و){ف ج(ع، و) + ۶ × ج(ع، و) کا عیسوی}

۱۶۔ ف اور ق کی رقوم میں دو کعبیوں کے جیکوبی کے غیر متغیر ذیل کو بیان کرو۔

جواب:- ۱۲ عَ = ف^{۲}، ۲۱۶ جَ = ۵۴ ق - ف^{۳}

(۱۷۲)

انیسواں باب

استحالات

فصل ۱ ۔ جرن ہاوزن کا استحالہ

۱۹۴ ۔ اس باب کی عام سرخی کے تحت مختلف مسائل کا جمع کرنا مقصود ہے ۔ یہ مسئلے کسی اور جگہ سہولت کے ساتھ بیان نہیں کئے جا سکتے تھے ۔ صفحات ماسبق میں جن مضامین پر بحث ہوئی ہے اُنکے سلسلہ میں یہ مسائل اہم ہیں ۔ ہم ایک عام مسئلہ سے شروع کرتے ہیں جسکا تعلق منطق استحالات سے ہے ۔

مسئلہ ۔ ن ویں درجہ کی مساوات کی ایک اصل کا عام سے عام منطق جبری استحالہ زیادہ سے زیادہ ن - ۱ ویں درجہ کے ایک صحیح استحالہ میں تحویل ہو سکتا ہے ۔

کیونکہ مساوات ف (لا) = ۰ کی ایک اصل عہ ر کا ہر منطق تفاعل اس شکل

$$\frac{\text{خا}(\text{عہ}_{\text{ر}})}{\text{با}(\text{عہ}_{\text{ر}})}$$

کا ہوتا ہے جہاں خا اور با صحیح تفاعل ہیں ۔ نیز

$$\frac{\text{خا}(\text{ع}_\text{ر})}{\text{پا}(\text{ع}_\text{ر})} = \text{خا}(\text{ع}_\text{ر}) \frac{\text{پا}(\text{ع}_\text{۱}) \ldots \text{پا}(\text{ع}_{\text{ر}-\text{۱}}) \text{پا}(\text{ع}_{\text{ر}+\text{۱}}) \ldots \text{پا}(\text{ع}_\text{ن})}{\text{پا}(\text{ع}_\text{۱}) \text{پا}(\text{ع}_\text{۲}) \ldots\ldots\ldots \text{پا}(\text{ع}_{\text{ن}-\text{۱}}) \text{پا}(\text{ع}_\text{ن})}$$

نسب نما $\text{پا}(\text{ع}_\text{۱})\,\text{پا}(\text{ع}_\text{۲}) \ldots \text{پا}(\text{ع}_\text{ن})$ چونکہ $\text{ف}(\text{لا}) = 0$ کی اصلوں کا ایک متشاکل تفاعل ہے اسلئے وہ سروں کے ایک منطق تفاعل کے طور پر بیان ہو سکتا ہے۔ اسلئے $\frac{\text{خا}(\text{ع}_\text{ر})}{\text{پا}(\text{ع}_\text{ر})}$ ایک صحیح شکل میں تحویل ہو جاتا ہے۔

مزید بریں پہلی کسر کا شمار کنندہ مساوات $\frac{\text{ف}(\text{لا})}{\text{لا} - \text{ع}_\text{ر}} = 0$ کی اصلوں کا ایک متشاکل تفاعل ہے اور اسلئے اس مساوات کے سروں کے ایک منطق تفاعل کے طور پر بیان ہو سکتا ہے یعنی $\text{ع}_\text{ر}$ اور $\text{ف}(\text{لا})$ کے سروں کی رقوم میں۔

اب $\frac{\text{خا}(\text{ع}_\text{ر})}{\text{پا}(\text{ع}_\text{ر})}$ کی اس صحیح شکل کو $\text{ف}(\text{ع}_\text{ر})$ سے تعبیر کرو تو عمل تقسیم سے (172)

$$\text{ف}(\text{ع}_\text{ر}) = \text{ق}\ \text{ف}(\text{ع}_\text{ر}) + \text{فہ}(\text{ع}_\text{ر}) = \text{فہ}(\text{ع}_\text{ر})$$

جہاں $\text{فہ}(\text{ع}_\text{ر})$ درجہ ن - ۱ سے تجاوز نہیں کر سکتا۔ اسلئے مسئلہ ثابت ہے۔ دو درجی اور کعبی کی مخصوص صورتوں میں یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اصل کا عام سے عام منطق تفاعل علی الترتیب اس اصل کے ایک خطی تفاعل اور ایک دو درجی تفاعل میں تحویل ہو سکتا ہے۔ کعبی کی صورت میں یہ دو درجی تفاعل دوسری شکل میں بھی تحویل ہو سکتا ہے جو اکثر فائدہ مند ہے، مثلاً حسب ذیل طریقہ پر :- اس دو درجی تفاعل کو $\text{پا}(\text{طہ})$ سے تعبیر کرو اور کعبی $\text{ف}(\text{طہ})$ کو $\text{پا}(\text{طہ})$ سے تقسیم کرو تو

ف (طہ) = (ق. + ق₁ طہ) یا (طہ) + ر. + ر₁ طہ = ۰

اسلئے یا (طہ) = − (ر. + ر₁ طہ) / (ق. + ق₁ طہ)

اس سے یہ ظاہر ہے کہ کعبی کی اصل کا عام سے عام استحالہ ہم رسم استحالہ میں تحویل ہو سکتا ہے ۔

اس ثابت کردہ مسئلہ کے سلسلہ میں یہ دکھانا آسان ہے کہ دفعات ۵۹ اور ۶۶ میں کعبی اور چار درجی مساواتوں کے حل سے متعلق جو باتیں بیان کی گئی تھیں وہ درست ہیں ۔ اس مقصد کے لئے فرض کرو کہ ن مقداروں عہ₁، عہ₂، عہ₃، ......، عہن (جنکو ایک مساوات کی اصلیں سمجھا جا سکتا ہے) کے دو منطق تفاعل فہ اور پہ ہیں اور انمیں سے ہر مقدار کی صرف ق قیمتیں ہیں جبکہ اصلوںکو ہر طرح سے آپسمیں تبدیل کیا جاتا ہے ۔ دونوں تفاعلوں کی ان قیمتوں کو جو ایک ہی ابدالات سے حاصل ہوتی ہیں مقداروں

فہ₁، فہ₂، فہ₃، ......، فہق

پہ₁، پہ₂، پہ₃، ...... پہق

سے تعبیر کرو تو ہر عدد صحیح ثر کے لئے

فہ₁ پہ₁^ثر + فہ₂ پہ₂^ثر + فہ₃ پہ₃^ثر + ... + فہق پہق^ثر = ت_ثر

جو اصلوں کا ایک متشاکل تفاعل ہے کیونکہ یہ ان تمام ممکن قیمتوں کا مجموعہ ہے جو فہ پہ^ثر اختیار کر سکتا ہے ۔

اس طرح ہم مساواتوں

فہ$_1$ + فہ$_2$ + فہ$_3$ + ... + فہ$_ق$ = ت،

فہ$_1$ پہ$_1$ + فہ$_2$ پہ$_2$ + فہ$_3$ پہ$_3$ + ... + فہ$_ق$ پہ$_ق$ = ت$_1$،

. . . .

فہ$_1$ پہ$_1^{ق-۱}$ + فہ$_2$ پہ$_2^{ق-۱}$ + فہ$_3$ پہ$_3^{ق-۱}$ + ... + فہ$_ق$ پہ$_ق^{ق-۱}$ = ت$_{ق-۱}$،

کا نظام حاصل کر سکتے ہیں جہاں ت، ت$_1$، ت$_2$، .... ت$_{ق-۱}$ سب کے سب عہ$_1$، عہ$_2$، .... عہ$_ن$ کے متشاکل تفاعل ہیں -

ان مساواتوں کو حل کرنے سے فہ$_1$ فوراً پہ$_1$، پہ$_2$، پہ$_3$، ....، پہ$_ق$ کے ایک متشاکل تفاعل کی شکل میں بیان ہو جاتا ہے کیونکہ پہ$_2$، پہ$_3$، .... پہ$_ق$ کا کوئی باہمی تبادلہ فہ$_1$ کی قیمت کو نہیں بدلتا اس وجہ سے کہ وہ فہ$_2$، فہ$_3$، ....، فہ$_ق$ کے ایک باہمی تبادلہ کے معادل ہے۔ اس لئے یہ قیمت اوپر کے مسئلہ کی رو سے فہ$_1$ کے ایک منطق صحیح تفاعل میں تحویل ہو سکتی ہے جسکا درجہ ق - ۱ ہے کیونکہ پہ کی صرف ق قیمتیں ہیں جب اسکو عہ$_1$، عہ$_2$، ....، عہ$_ن$ کا تفاعل سمجھا جاتا ہے۔ اب خاص صورتوں پر غور کرنے سے جنکا حوالہ اوپر دیا گیا ہے (۱) جب، ق = ۲ اور ن = ۳ تو یہ ثابت ہوا ہے کہ فہ اور پہ کو ایک خطی رشتہ، عہ$_1$، عہ$_2$، عہ$_3$ کے متشاکل تفاعلوں کی رقوم میں مربوط کرتا ہے اور (۲) جب، ق = ۳ اور ن = ۴ تو اسی طرح یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ فہ اور پہ کو ایک منطق رشتہ

مربوط کرتا ہے (دیکھو امثلہ ۵، ۶، ۷ صفحہ ۵۰۰ جلد اول، مثال ۳ صفحہ ۱۶۹ جلد دوم)

۱۹۵ — استحالہ شدہ مساوات کی ساخت۔ دفعہ سابق میں جس استحالہ کی توضیح کی گئی ہے اسکو سب سے پہلے چرن ہاورن نے کعبی اور چار درجی کی تحویل کے لئے استعمال کیا تھا۔ ہم عام صورت میں وہ مساوات بنا سکتے ہیں جنکی اصلیں فہ (عہ$_{۱}$)، فہ (عہ$_{۲}$)، فہ (عہ$_{۳}$)، ...، فہ (عہ$_{ن}$) ہوں جہاں فہ (لا)، ن − ۱ ویں درجہ کا لا کا تفاعل

فہ (لا) ≡ ا$_{.}$ + ا$_{۱}$ لا + ا$_{۲}$ لا^{۲} + ... + ا$_{ن-۱}$ لا$^{ن-۱}$

ہے۔ اس کے لئے فہ (لا) = ما رکھو اور لا کو مساواتوں ف (لا) = ۰،

ما = ا$_{.}$ + ا$_{۱}$ لا + ... + ا$_{ن-۱}$ لا$^{ن-۱}$ سے ساقط کرو یا فہ (لا) کو مختلف قوتوں ۲، ۳، ۴، ....، ن پر ترتیب کے ساتھ اٹھاؤ اور ہر صورت میں لا کے قوت نماؤں کو ن کے نیچے (ف (لا) سے تقسیم کرنے اور صرف باقی کو رکھنے سے) تحویل کرو تو (174)

فہ^{۲} = ب$_{.}$ + ب$_{۱}$ لا + ب$_{۲}$ لا^{۲} + ... + ب$_{ن-۱}$ لا$^{ن-۱}$،

فہ^{۳} = ج$_{.}$ + ج$_{۱}$ لا + ج$_{۲}$ لا^{۲} + ... + ج$_{ن-۱}$ لا$^{ن-۱}$،

. . . .

فہ^{ن} = ل$_{.}$ + ل$_{۱}$ لا + ل$_{۲}$ لا^{۲} + ... + ل$_{ن-۱}$ لا$^{ن-۱}$

ان مساواتوں میں لا کی بجائے مساوات ف (لا) = ۰ کی ہر اصل درج کرنے اور جمع کرنے سے

س$_{۱}$ = ن ا$_{.}$ + ا$_{۱}$ س$_{۱}$ + ا$_{۲}$ س$_{۲}$ + ... + ا$_{ن-۱}$ س$_{ن-۱}$،

$$س_۲ = ن\,ب_۰ + ب_۱ س_۱ + ب_۲ س_۲ + \cdots + ب_{ن-۱} س_{ن-۱}،$$

....

$$س_ن = ن\,ل_۰ + ل_۱ س_۱ + ل_۲ س_۲ + \cdots + ل_{ن-۱} س_{ن-۱}،$$

جہاں $س_۱$، $س_۲$، $س_۳$ وغیرہ مطلوبہ مساوات کی اصلوں کی قوتوں کے مجموعوں کو تعبیر کرتے ہیں۔

اب $س_۱$، $س_۲$، $س_۳$، ....، $س_{ن-۱}$ کو ف (لا) کے سروں کی رقوم میں بیان کرنے سے فہ (لا) اور ف (لا) کی رقوم میں $س_۱$، $س_۲$، $س_۳$، .... $س_ن$ متعین ہو جاتے ہیں۔

نیز ہم دفعہ ۸۰ کی مدد سے اُس مساوات کے سروں کو جسکی اصلیں فہ $(ع_۱)$، فہ $(ع_۲)$، .... فہ $(ع_ن)$ ہیں $س_۱$، $س_۲$، $س_۳$، .... $س_ن$ کی رقوم میں اور اسلئے آخرالامر فہ (لا) اور ف (لا) کے سروں کی رقوم میں بیان کر سکتے ہیں۔ اس طرح نظری طور پر استحالہ کی تکمیل ہو جاتی ہے۔

۱۹۶ — استحالہ شدہ مساوات بنانیکا دوسرا طریقہ — عمل استخراج کے ذریعہ فہ میں اس آخری مساوات کو معلوم کرنیکا ایک اور طریقہ ہے جسکو اب ہم بیان کرتے ہیں۔ چونکہ

$$ی - فہ + د_۱ لا + د_۲ لا^۲ + \cdots + د_{ن-۱} لا^{ن-۱} \equiv ۔$$

اسلئے اگر اس مساوات کو لا، $لا^۲$، ....، $لا^{ن-۱}$ سے ضرب دیا جائے اور مساوات

ف (لا) = ۰ کے ذریعہ لا کے قوت نماؤں کو ن کے نیچے گھٹا دیا جائے تو کل ن مساواتیں ملتی ہیں جن سے ن - ۱ مقداریں لا، لا^{۲}، ... لا$^{ن-۱}$ بین تحلیلی طور پر ساقط ہو سکتی ہیں۔ اس طرح ن ویں رتبہ کے ایک مقطع کی شکل میں استحالہ شدہ مساوات حاصل ہوتی ہے جس میں فہ صرف وتری عناصر کے طور پر داخل ہوتا ہے۔ (175) مثلاً اگر ف (لا) = لا^{ن} - ۱ تو استحالہ شدہ مساوات شکل ذیل میں حاصل ہوتی ہے:-

$$
\begin{vmatrix}
\text{ا}_{\text{ن}-۱} & \cdots\cdots & \text{ا}_{۲} & \text{ا}_{۱} & \text{ا}_{۰}-\text{فہ} \\
\text{ا}_{\text{ن}-۲} & \cdots\cdots & \text{ا}_{۱} & \text{ا}_{۰}-\text{فہ} & \text{ا}_{\text{ن}-۱} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\text{ا}_{۰}-\text{فہ} & \cdots\cdots & \text{ا}_{۳} & \text{ا}_{۲} & \text{ا}_{۱}
\end{vmatrix} = ۰
$$

چرن ہاؤزن[1] کے استحالہ کو مکمل کرنے کے یہ طریقے اگرچہ بظاہر سادہ معلوم ہوتے ہیں تاہم اگر ان کو مخصوص صورتوں پر استعمال کیا جائے تو نتیجہ عموماً ایک پیچیدہ شکل میں ظاہر ہوتا ہے۔ پروفیسر کیلی نے ایم۔ ہرمائٹ کے مجوزہ استحالہ کی شکل اختیار کر کے ہم متغیروں کے نظریہ سے استفادہ کیا ہے اور اس طور پر کعبی، چار درجی، پانچ درجی کیلئے استحالہ کی تکمیل کی ہے۔ ہم ابتدائی طریقہ سے یہ بتانے پر اکتفا کرینگے کہ کعبی اور چار درجی کے لئے کیلی کے نتیجے کس طرح حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

۱۹۷ — کعبی پر چرن ہاؤزن کے استحالہ کا استعمال۔ فرض کرو کہ کعبی مساوات

$$\text{ا لا}^{۳} + ۳\,\text{ب لا}^{۲} + ۳\,\text{ج لا} + \text{د} = ۰$$

کو اس شکل

[1] Tschirnhausen

ی۳ + ۳ ھ لا + گ = ۰

میں لکھا گیا ہے اور فرض کرو کہ اسکو ابدال

ما = لہ + ک ی + ی۲

سے مستحیل کیا گیا ہے ۔ اگر ی۱، ی۲، ی۳ مکعبی کی اصلیں ہوں اور انکے جواب میں ما کی قیمتیں ما۱، ما۲، ما۳ تو

ما۲ − ما۳ = (ی۲ − ی۳) (ک − ی۱)،
ما۳ − ما۱ = (ی۳ − ی۱) (ک − ی۲)، (۱)
ما۱ − ما۲ = (ی۱ − ی۲) (ک − ی۳)،

اور اسلئے (176)

۲ ما۱ − ما۲ − ما۳ = (۲ ی۱ − ی۲ − ی۳) ک + (۲ ی۲ ی۳ − ی۳ ی۱ − ی۱ ی۲)،
۲ ما۲ − ما۳ − ما۱ = (۲ ی۲ − ی۳ − ی۱) ک + (۲ ی۳ ی۱ − ی۱ ی۲ − ی۲ ی۳)، (۲)
۲ ما۳ − ما۱ − ما۲ = (۲ ی۳ − ی۱ − ی۲) ک + (۲ ی۱ ی۲ − ی۲ ی۳ − ی۳ ی۱)،

اسلئے اگر ما میں جو مساوات ہے اسکی دوسری رقم جدا کر دیجائے اور اسکو شکل

ما۳ + ۳ ھَ ما + گَ = ۰

میں لکھا جائے تو مساواتوں (۱) اور (۲) کی رو سے

ھَ = ھِ ک، گَ = گِ ک

جہاں ھِ ک اور گِ ک،

ک۳ + ۳ ھ ک + گ

کے ہیسوی اور کعبی ہم متغیر ہیں ۔ پس استحالہ کی تکمیل ہو گئی کیونکہ ما۱ + ما۲ + ما۳ آسانی کے ساتھ معلوم ہو سکتا ہے ۔

۱۹۸ — چار درجی پر چرن ہاؤزن کے استحالہ کا استعمال۔

اس صورت میں ہم استحالہ شدہ کعبی کو بالراست بنانے کی کوشش نہیں کرتے بلکہ ذیل کا مسئلہ ثابت کرتے ہیں جس سے یہ معلوم ہو گا کہ یہ استحالہ کس طرح دو اور استحالوں میں تحلیل کیا جا سکتا ہے:۔

مسئلہ — چرن ہاؤزن کا استحالہ چار درجی ۶ کو ایسے چار درجی میں بدلتا ہے جسکے غیر متغیر وہی ہوتے ہیں جو ل ۶ + م $\frac{ھ}{لا}$ کے ہیں اور اسلئے وہ موخرالذکر شکل میں خطی استحالہ کے ذریعہ تحویل ہو سکتا ہے۔

اسکو ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ چار درجی

$$\text{لا}^{4} + \text{ب}_{1}\,\text{لا}^{3} + \text{ب}_{2}\,\text{لا}^{2} + \text{ب}_{3}\,\text{لا} + \text{ب}_{4} = 0$$

کو ابدال

$$\text{ما} = \text{ل}_{0} + \text{ل}_{1}\,\text{لا} + \text{ل}_{2}\,\text{لا}^{2} + \text{ل}_{3}\,\text{لا}^{3}$$

سے مستحیل کیا گیا ہے۔

اگر چار درجی کی اصلیں لا_{1}، لا_{2}، لا_{3}، لا_{4} ہوں اور انکے جواب میں ما کی قیمتیں ما_{1}، ما_{2}، ما_{3}، ما_{4} تو

$$\frac{\text{ما}_{2} - \text{ما}_{4}}{\text{لا}_{2} - \text{لا}_{4}} = \text{ل}_{1} + \text{ل}_{2}(\text{لا}_{2} + \text{لا}_{4}) + \text{ل}_{3}(\text{لا}_{2}^{2} + \text{لا}_{2}\text{لا}_{4} + \text{لا}_{4}^{2})\text{،}$$

$$\frac{\text{ما}_{1} - \text{ما}_{4}}{\text{لا}_{1} - \text{لا}_{4}} = \text{ل}_{1} + \text{ل}_{2}(\text{لا}_{1} + \text{لا}_{4}) + \text{ل}_{3}(\text{لا}_{1}^{2} + \text{لا}_{1}\text{لا}_{4} + \text{لا}_{4}^{2})\text{،}$$

ان مساواتوں سے اب ہم یہ دکھائینگے کہ (۱۶۶)

$$\frac{(\text{ما}_2-\text{ما}_3)(\text{ما}_1-\text{ما}_4)}{(\text{لا}_2-\text{لا}_3)(\text{لا}_1-\text{لا}_4)}=\text{ف}+\text{ق}\,(\text{لا}_2\text{لا}_3+\text{لا}_1\text{لا}_4)$$

جہاں ف اور ق میں چار درجی کی اصلیں متشاکلاً واقع ہوتی ہیں۔

اول تو ہم دیکھتے ہیں کہ

$$(\text{لا}_2^2+\text{لا}_2\text{لا}_3+\text{لا}_3^2)(\text{لا}_1^2+\text{لا}_1\text{لا}_4+\text{لا}_4^2)=\text{ب}_2^2-\text{ب}_1\text{ب}_3+\text{ب}_4-\text{ب}_2\,\text{ل}$$

جہاں ل حسب معمول قیمت $\text{لا}_2\text{لا}_3+\text{لا}_1\text{لا}_4$ رکھتا ہے۔ اور دوسرے چونکہ

$$\text{لا}_2^2+\text{لا}_2\text{لا}_3+\text{لا}_3^2=(\text{لا}_2+\text{لا}_3)^2-\text{لا}_2\text{لا}_3 \quad \text{وغیرہ}$$

اسلئے پھر ہمیں حاصل ہوتا ہے :۔

$$(\text{لا}_2+\text{لا}_3)(\text{لا}_1^2+\text{لا}_1\text{لا}_4+\text{لا}_4^2)+(\text{لا}_1+\text{لا}_4)(\text{لا}_2^2+\text{لا}_2\text{لا}_3+\text{لا}_3^2)$$

$$=\text{ب}_3-\text{ب}_1\text{ب}_2+\text{ب}_1\,\text{ل}،$$

بالآخر چونکہ حاصل ضرب میں دوسری اقسام صریحاً اسی شکل کی ہیں جو $\text{ف}+\text{ق}\,\text{ل}$ کی ہے اس لئے ہم نے ثابت کر دیا کہ

$$\frac{(\text{ما}_2-\text{ما}_3)(\text{ما}_1-\text{ما}_4)}{(\text{لا}_2-\text{لا}_3)(\text{لا}_1-\text{لا}_4)}=\text{ف}+\text{ق}\,(\text{لا}_2\text{لا}_3+\text{لا}_1\text{لا}_4)$$

جس سے

$$(\text{ما}_2-\text{ما}_3)(\text{ما}_1-\text{ما}_4)=(\text{ن}-\text{م})(\text{ف}+\text{ق}\,\text{ل})$$

اب ل، م، ن کی جگہ غ_1، غ_2، غ_3 داخل کرنے سے یہ مساوات

اور اسکی جیسی مساواتیں اپنی شکلیں برقرار رکھتی ہیں۔ پس ف اور ق کو متشابہ مقداروں میں بدلنے سے ہمیں ذیل کی مساواتیں ملتی ہیں :۔

$$(\text{ما}_2-\text{ما}_3)(\text{ما}_1-\text{ما}_4)=4(\text{غ}_3-\text{غ}_2)(\text{ف}-\text{ق}\,\text{غ}_1),$$

$$(\text{ما}_3-\text{ما}_1)(\text{ما}_2-\text{ما}_4)=4(\text{غ}_1-\text{غ}_3)(\text{ف}-\text{ق}\,\text{غ}_2),$$

$$(\text{ما}_1-\text{ما}_2)(\text{ما}_3-\text{ما}_4)=4(\text{غ}_2-\text{غ}_1)(\text{ف}-\text{ق}\,\text{غ}_3),$$

اور ان سے استحالہ شدہ چار درجی کے غیر متغیر فوراً حاصل ہوتے ہیں اور انکی قیمتوں کا مقابلہ ک ۶ ۔ لا ھ کے غیر متغیروں کے ساتھ کرنے سے جو دفعہ ۱۸۷ میں دئے گئے ہیں مسئلہ بالا فوراً ثابت ہو جاتا ہے۔

۱۹۹ ۔ چرن ہاؤزن کے استحالہ سے کعبی کو ثنائی شکل میں تحویل کرنا

۔ فرض کرو کہ کعبی

$$\text{ا}\,\text{لا}^3+3\,\text{ب}\,\text{لا}^2+3\,\text{ج}\,\text{لا}+\text{د}$$

کو شکل $\text{ما}^3-\text{و}$ میں استحالہ

$$\text{ما}=\text{ق}+\text{ف}\,\text{لا}+\text{لا}^2$$

کے ذریعہ تحویل کیا گیا ہے۔

اگر دئے ہوئے کعبی کی اصلیں لا_1، لا_2، لا_3 ہوں اور استحالہ شدہ (178)

کعبی کی ایک اصل ما_1 تو ف اور ق کو متعین کرنیکے لئے حسب ذیل مساواتیں ملتی ہیں :۔

$$\text{لا}_1^2+\text{ف}\,\text{لا}_1+\text{ق}=\text{ما}_1,$$

$$\text{لا}_2^2+\text{ف}\,\text{لا}_2+\text{ق}=\text{سہ}\,\text{ما}_1,$$

$$\text{لا}_3^2+\text{ف}\,\text{لا}_3+\text{ق}=\text{سہ}^2\,\text{ما}_1,$$

اِن سے

$$\text{ف} = -\frac{\text{لا}_1^2 + \text{سہ}\,\text{لا}_2^2 + \text{سہ}^2\,\text{لا}_3^2}{\text{لا}_1 + \text{سہ}\,\text{لا}_2 + \text{سہ}^2\,\text{لا}_3}\text{،}\quad \text{ق} = -\frac{1}{2}(\text{س}_2 + \text{ف}\,\text{س}_1)\text{،}$$

ف کی اس قیمت میں $\text{لا}_1 + \text{لا}_2 + \text{لا}_3$ جمع کرنے سے

$$\text{ف} + \text{لا}_1 + \text{لا}_2 + \text{لا}_3 = -\frac{\text{لا}_2\,\text{لا}_3 + \text{سہ}\,\text{لا}_3\,\text{لا}_1 + \text{سہ}^2\,\text{لا}_1\,\text{لا}_2}{\text{لا}_1 + \text{سہ}\,\text{لا}_2 + \text{سہ}^2\,\text{لا}_3}$$

پس یہ نتیجہ نکلتا ہے (مثال ۲۵ صفحہ ۹۷، جلد اول) کہ اس استحالہ کو مکمل کرنیکے صرف دو طریقے ہیں کیونکہ ف، ق کی قیمتیں آخرالامر کعبی کے ھیسوی کے حل پر منحصر ہوتی ہیں۔

۲۰۰ — چرن ہاوزن کے استحالہ سے چار درجی کو سہ رقمی شکل میں تحویل کرنا — فرض کرو کہ چار درجی

$$\text{ا}\,\text{لا}^4 + 4\,\text{ب}\,\text{لا}^3 + 6\,\text{ج}\,\text{لا}^2 + 4\,\text{د}\,\text{لا} + \text{ص}$$

کو شکل $\text{ما}^4 + \text{ف}\,\text{ما}^2 + \text{ق}$ میں (جسمیں دوسری اور چوتھی ارقام نہیں ہیں) استحالہ

$$\text{ما} = \text{ق} + \text{ف}\,\text{لا} + \text{لا}^2$$

کے ذریعہ تحویل کیا گیا ہے۔

اگر چار درجی کی اصلیں لا_1، لا_2، لا_3، لا_4 ہوں اور نیز استحالہ شدہ چار درجی کی دو مختلف اصلیں ما_1، ما_2 ہوں تو ف اور ق کو متعین کرنیکے لئے حسب ذیل مساواتیں ملتی ہیں:—

$$\text{لا}_1^2 + \text{ف}\,\text{لا}_1 + \text{ق} = \text{ما}_1\text{،}\quad \text{لا}_3^2 + \text{ف}\,\text{لا}_3 + \text{ق} = \text{ما}_2\text{،}$$

$$\text{لا}_2^2 + \text{ف}\,\text{لا}_2 + \text{ق} = -\text{ما}_1\text{،}\quad \text{لا}_4^2 + \text{ف}\,\text{لا}_4 + \text{ق} = -\text{ما}_2\text{،}$$

ان سے

$$\text{ف} = -\frac{\text{لا}_1^2 + \text{لا}_2^2 - \text{لا}_3^2 - \text{لا}_4^2}{\text{لا}_1 + \text{لا}_2 - \text{لا}_3 - \text{لا}_4} ،\quad \text{ق} = -\tfrac{1}{2}(\text{س}_2 + \text{ف}\,\text{س}_1)،$$

ف کی اس قیمت میں $\text{لا}_1 + \text{لا}_2 + \text{لا}_3 + \text{لا}_4$ جمع کرنے سے

$$\text{ف} + \text{لا}_1 + \text{لا}_2 + \text{لا}_3 + \text{لا}_4 = \frac{2(\text{لا}_1\text{لا}_2 - \text{لا}_3\text{لا}_4)}{\text{لا}_1 + \text{لا}_2 - \text{لا}_3 - \text{لا}_4}$$

(179) پس مثال ۵ صفحہ ۱۹۵ جلد اول کی رو سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ مجوزہ شکل میں چار درجی کو تحویل کرنے کے تین طریقے ہیں جنکی تعیین آخرالامر چار درجی کے محول کعبی کے حل پر منحصر ہوتی ہے۔

۲۰۱ — ن ویں درجہ کی مساوات سے دوسری، تیسری، چوتھی رقموں کا جدا کرنا — ہم حسب ذیل مسئلہ کو پہلے ثابت کرتے ہیں جسکا استعمال آیندہ چلکر کیا جائیگا:—

ن متغیروں لا_1، لا_2، لا_3 .... ، $\text{لا}_\text{ن}$ میں دوسرے درجہ کا **ایک ہم جنس تفاعل و بالعموم ن مربعوں کے مجموعے کے طور پر بیان ہوسکتا ہے۔**

اسکو ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ و، لا_1 کی قوتوں میں ترتیب دیا گیا ہے اور اسکی شکل یہ ہے

$$\text{و} \equiv \text{ب}\,\text{لا}_1^2 + 2\,\text{ب}_1\,\text{لا}_1 + \text{ب}_2 ،$$

جہاں ب ایک مستقل ہے، ب_1 ایک خطی تفاعل اور ب_2 ایک دو درجی

تفاعل ہے $لا_2$، $لا_3$، ....، $لا_ن$ کا۔

(ا) اگر $ب_1$ معدوم نہ ہو تو $و \equiv ب_1(لا_1 + \frac{ب'}{ب_1})^2 + ب_2 - \frac{ب'^2}{ب_1}$ اور چونکہ $ب_2 - \frac{ب'^2}{ب_1}$ میں $لا_1$ شامل نہیں ہے اسلئے ہم نے مطلوبہ سوال کو اس پر تحویل کر دیا ہے کہ (ن - ۱) متغیروں کے دو درجی متجانس تفاعل کو (ن - ۱) مربعوں کے مجموعے کی شکل میں ظاہر کیا جائے جس کے سر مستقل ہوں۔

(ب) اگر $ب_1 = ۰$ اور ہم $لا_1$ سے بحث کرنا چاہتے ہیں تو $لا_1$ اور ایک دوسرے متغیر (مثلاً $لا_2$) کے حاصل ضرب کا سر معدوم نہیں ہونا چاہئے ورنہ و، $لا_1$ پر منحصر نہیں ہوگا۔ اب و کو شکل $ا\, لا_1 لا_2 + ج\, لا_2^2 + ف_1 لا_1 + ق_1 لا_2 + ر_2$ میں لکھو جہاں ا اور ج مستقل ہیں، $ف_1$ اور $ق_1$، $لا_3$، $لا_4$، ....، $لا_ن$ کے خطی تفاعل ہیں اور $ر_2$ انکا دو درجی تفاعل ہے۔ اسلئے

$$و \equiv لا_2(ا\, لا_1 + ج\, لا_2) + (ا\, لا_1 + ج\, لا_2)\frac{ف_1}{ا} + (ق_1 - \frac{ج\, ف_1}{ا})لا_2 + ر_2$$

$$\equiv (لا_2 + \frac{ف_1}{ا})(ا\, لا_1 + ج\, لا_2 + ق_1 - \frac{ج\, ف_1}{ا}) - \frac{ف_1}{ا}(ق_1 - \frac{ج\, ف_1}{ا}) + ر_2$$

$$\equiv ا\, ما_1 ما_2 + ر'_2$$

جہاں $ما_1 = لا_1 + \frac{ج}{ا}لا_2 + \frac{ق_1}{ا} - \frac{ج\, ف_1}{ا^2}$، $ما_2 = لا_2 + \frac{ف_1}{ا}$،

اور $ر'_2$، $لا_3$، $لا_4$، ....، $لا_ن$ کا ایک دو درجی تفاعل ہے۔ (180)

$$\therefore\ و = \frac{ا}{۲}\left(ی_۱^۲ - ی_۲^۲\right) + \bar{ر}_۲$$

جہاں $ی_۱ = \frac{ما_۱ + ما_۲}{۲\sqrt{ا}}$ ، $ی_۲ = \frac{ما_۲ - ما_۱}{۲\sqrt{ا}}$

اس صورت میں ہم نے مطلوبہ سوال کو اس پر تحویل کر دیا ہے کہ (ن - ۲) متغیروں کے دو درجی متجانس تفاعل کو (ن - ۲) مربعوں کے مجموعہ کی شکل میں بیان کیا جائے جس کے سر مستقل ہوں -

یہ یاد رہے کہ اگر $لا_۳$ ، $لا_۴$ ... $لا_ن$ کو صفر کے مساوی رکھا جائے تو ہمنے $ی_۱$ ، $ی_۲$ اور $لا_۱$ ، $لا_۲$ کے درمیانی استحالہ کو اس طرح ترتیب دیا ہے کہ وہ اکائی کے برابر ہو جائے -

حسب ضرورت (ا) یا (ب) کے مطابق عمل کرکے بالآخر ہم و کو ن مربعوں کے مجموعہ کی شکل میں ظاہر کر سکتے ہیں کیونکہ کسی رقم مثلاً $ا لا^۲$ کو $(\sqrt{ا}\, لا)^۲$ کے طور پر لکھا جا سکتا ہے -

اب اصلی مسئلہ پر عود کرو اور فرض کرو کہ مساوات ہے

$$لا^ن + ب_۱ لا^{ن-۱} + ب_۲ لا^{ن-۲} + \cdots + ب_ن = ۰$$

اور فرض کرو کہ یہ مساوات

$$ما = عہ\, لا^۴ + بہ\, لا^۳ + جہ\, لا^۲ + ضہ\, لا + صہ$$

رکھنے سے

$$ما^ن + ق_۱ ما^{ن-۱} + ق_۲ ما^{ن-۲} + \cdots + ق_ن = ۰$$

میں مستحیل ہوتی ہے جہاں $ق_۱$ ، $ق_۲$ ، $ق_۳$ ..... $ق_ر$ .... دفعہ ۱۹۵ کی رو سے عہ ، بہ ، جہ ، ضہ ، صہ میں پہلے ، دوسرے ... ر ویں درجوں کے متجانس تفاعل ہیں -

اب اگر عہ ، بہ ، جہ ، ضہ ، صہ ایسے متعین ہو سکیں کہ

$$ق_1 = 0،\quad ق_2 = 0،\quad ق_3 = 0$$

تو مسئلہ حل ہو جائیگا۔ اس مقصد کے لیے $ق_1 = 0$ سے صہ کی قیمت اخذ کرو اور اس کی یہ قیمت $ق_2$ اور $ق_3$ میں درج کر کے ان سے اس کو ساقط کرو تو عہ، بہ، جہ، ضہ میں علی الترتیب دوسرے اور تیسرے درجوں کی دو متجانس مساواتیں حاصل ہوتی ہیں

$$سا_2 = 0،\quad سا_3 = 0$$

اور اوپر کے ثابت شدہ مسئلہ سے ہم $سا_2$ کو اس شکل

$$ع^2 - و^2 + ط^2 - ت^2$$

میں لکھ سکتے ہیں جو ع = و اور ط = ت رکھنے سے پوری ہوتی ہے۔
ان سادہ مساواتوں سے ہم جہ = ل عہ + م بہ اور ضہ = $ل_1$ عہ + $م_1$ بہ معلوم کرتے ہیں اور ان قیمتوں کو $ق_3 = 0$ میں درج کرنے سے ایک کعبی مساوات ملتی ہے جس سے نسبت بہ : عہ کی تعیین ہوتی (181)
ہے۔ پس مقداروں عہ، بہ، جہ، ضہ میں سے کسی ایک کو ایک معین قیمت دینے سے باقی دوسری مقداریں متعین ہوتی ہیں اور مساوات شکل

$$ما^{ن} + ق_4\, ما^{ن-4} + ق_5\, ما^{ن-5} + \dots + ق_ن = 0$$

میں تحویل ہوتی ہے۔

اسی طرح سروں $ق_1$، $ق_2$، $ق_4$ کو درجہ چہارم کی ایک مساوات حل کرنے سے جدا کیا جا سکتا ہے۔

یہ طریقہ پانچ درجی پر استعمال کرکے ہم اس کو سہ رقمی اشکال

$$لا^5 + ف\, لا + ق،\quad لا^5 + ف\, لا^2 + ق$$

میں سے کسی ایک میں تحویل کر سکتے ہیں یا لا کو $\frac{1}{لا}$ میں بدلکر اشکال

$$لا^5 + ف\,لا^3 + ق\,،\ لا^5 + ف\,لا^4 + ق$$

میں سے کسی ایک شکل میں تحویل کر سکتے ہیں ۔
اِن تحقیقات میں ہم نے ایم ۔ سیرٹ (M. Serret) کے طریقِ عمل کو اختیار کیا ہے ۔ دیکھو اس کی کتاب (Cours d' Algebra Superieure جلد اول دفعہ ۱۹۲)۔

فصل (۲) ہرمٹ اور سلوسٹر کے مسئلے

۲۰۲ ۔ دوسرے درجہ کے متجانس تفاعل کو مربعوں کے مجموعہ کے طور پر بیان کرنا

ہم ایک عام طریقہ سے (دفعہ ۲۰۱) پہلے یہ بتا چکے ہیں کہ متغیروں میں دوسرے درجہ کا ایک متجانس تفاعل مربعوں کے مجموعہ میں تحویل ہو سکتا ہے لیکن وہاں زیرِ بحث تفاعل کے سروں کی نوعیت کے لحاظ سے کوئی مفروض اختیار نہیں کیا گیا تھا ۔ اب ہم اس مسئلہ پر غور کرینگے جبکہ تفاعل کے سر سب کے سب حقیقی متصور کئے جائیں اور نیز استحالہ شدہ تفاعل میں مربعوں کے سروں کو مقدار اور علامت میں معلوم کرینگے ۔

فرض کرو کہ ن متغیروں میں دوسرے درجہ کا ایک متجانس تفاعل

$$ف\,(لا_1\,،\ لا_2\,،\ \ldots\,،\ لا_ن)$$ ہے جس کے سر تمام حقیقی ہیں ۔

فرض کرو کہ اس تفاعل کو دفعہ ۲۰۱ کے صرف طریقہ (۱) سے ہی اس شکل

$$ب_1\,(لا_1 + ا_2\,لا_2 + ا_3\,لا_3 + \cdots\cdots + ا_ن\,لا_ن)^2$$

$$+\ ب_2\,(لا_2 + پ_3\,لا_3 + \cdots\cdots + پ_ن\,لا_ن)^2$$

$$+\ ب_3\,(لا_3 + \cdots + ج_ن\,لا_ن)^2$$

. . . .

$$+\ \text{ب}_{\text{ن}}\ \text{لا}_{\text{ن}}^{۲}$$

میں تحویل کیا گیا ہے جہاں اِس نئی شکل کے تمام ب حقیقی ہیں ۔ (182)

اب خطی استحالہ

$$\text{لا}'_{۱} = \text{لا}_{۱} + \text{ا}_{۲}\,\text{لا}_{۲} + \text{ا}_{۳}\,\text{لا}_{۳} + \text{ا}_{۴}\,\text{لا}_{۴} + \cdots\cdots + \text{ا}_{\text{ن}}\,\text{لا}_{\text{ن}}\ ،$$

$$\text{لا}'_{۲} = \text{لا}_{۲} + \text{پ}_{۳}\,\text{لا}_{۳} + \text{پ}_{۴}\,\text{لا}_{۴} + \cdots\cdots + \text{پ}_{\text{ن}}\,\text{لا}_{\text{ن}}\ ،$$

$$\text{لا}'_{۳} = \text{لا}_{۳} + \text{ج}_{۴}\,\text{لا}_{۴} + \cdots\cdots + \text{ج}_{\text{ن}}\,\text{لا}_{\text{ن}}\ ،$$

. . . .

$$\text{لا}'_{\text{ن}} = \text{ل}_{\text{ن}}\,\text{لا}_{\text{ن}}\ ،$$

کو عمل میں لانے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے :-

$$\text{ف}(\text{لا}_{۱}،\ \text{لا}_{۲}،\ \text{لا}_{۳}،\ \cdots،\ \text{لا}_{\text{ن}}) \equiv \text{ب}_{۱}\,\text{لا}'^{۲}_{۱} + \text{ب}_{۲}\,\text{لا}'^{۲}_{۲} + \text{ب}_{۳}\,\text{لا}'^{۲}_{۳} + \cdots\cdots + \text{ب}_{\text{ن}}\,\text{لا}'^{۲}_{\text{ن}}\ ،$$

اس استحالہ کا مقیاس چونکہ ایک کے مساوی ہے اس لیے ف کی اِن دونوں شکلوں کے ممیز مطلقاً مساوی ہونے چاہئیں ۔ اس لیے ف کے ممیز کو $\Delta_{\text{ن}}$ سے تعبیر کرنے سے

$$\Delta_{\text{ن}} = \text{ب}_{۱}\,\text{ب}_{۲}\,\text{ب}_{۳} \cdots\cdots \text{ب}_{\text{ن}}\ ،$$

اور اسی طرح ف کی دونوں شکلوں میں تغیروں $\text{لا}_{\text{ر}+۱}$، $\text{لا}_{\text{ر}+۲}$، ...... ، $\text{لا}_{\text{ن}}$ کو صفر کے مساوی بنانے سے

$$\Delta_{\text{ر}} = \text{ب}_{۱}\,\text{ب}_{۲}\,\text{ب}_{۳} \cdots\cdots \text{ب}_{\text{ر}}\ ،$$

اب ر کو قیمتیں ۱، ۲، ۳، وغیرہ دینے سے

$$ب_۱ = \Delta_۱،\ ب_۲ = \frac{\Delta_۲}{\Delta_۱}،\ ب_۳ = \frac{\Delta_۳}{\Delta_۲}،\ \ldots،\ ب_ن = \frac{\Delta_ن}{\Delta_{ن-۱}}$$

اور اسلئے ن متغیروں میں جو ابتدائی دو درجی شکل ہے اُس کے ممیز کی رقوم میں اور ن - ۱، ن - ۲، وغیرہ متغیروں میں جو شکلیں ہیں انکے ممیزوں کی رقوم میں سر معلوم ہو جاتے ہیں جبکہ یہ موخرالذکر شکلیں متغیروں میں سے علی التواتر ایک دو، وغیرہ کو مصرحہ بالا طریقہ پر معدوم کرنے سے اخذ ہوئی ہوں۔

اگر ہمیں ف کو شکل $ف = ب_۱ لا_۱'^۲ + ب_۲ لا_۲'^۲ + \ldots + ب_ن لا_ن'^۲$ میں ظاہر کرنیکے لئے دفعہ ۲۰۱ کا طریقہ (ب) استعمال کرنا پڑے تو ہم دیکھتے ہیں کہ جب کبھی ہم ایسا کریں مثلاً $لا_۳$، $لا_۴$ کے لئے تو ہمیں ملتا ہے:-

$$\sqrt{۲}\, لا_۳' = لا_۳ + (۱+ج)\, لا_۴ + ا_۵ لا_۵ + \ldots + ا_ن لا_ن$$

$$\sqrt{۲}\, لا_۴' = - لا_۳ + (۱-ج)\, لا_۴ + ب_۵ لا_۵ + \ldots + ب_ن لا_ن$$

اور ہم دیکھتے ہیں کہ $ب_۴ = - ب_۳$۔ پس ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ استحالہ کے مقیاس اب بھی اکائی کے مساوی ہیں۔ لیکن اگر ہم $لا_۵$، $لا_۶$، ... $لا_ن$ کو صفر کے مساوی رکھیں تو $لا_۳'^۲ = لا_۴'^۲$ اسلئے $ب_۳ لا_۳'^۲ + ب_۴ لا_۴'^۲ = ۰$ اور $\Delta_۳ = ۰$۔ لیکن $\Delta_۴ = - ب_۱ ب_۲ ب_۳^۲$ اور $\Delta_۲ = ب_۱ ب_۲$۔ پس

$ب_۳^۲ = - \frac{\Delta_۴}{\Delta_۲}$۔ اسلئے بالعموم جب $\Delta_ر = ۰$ تو $ب_ر = - ب_{ر+۱}$ اور

$ب_ر^{2} = -\frac{\Delta_{ر+1}}{\Delta_{ر-1}}$ ۔ اس طریقہ سے ہم $ب_ر$، $ب_{ر+1}$ کو مطلق مقداروں میں معلوم کرتے ہیں لیکن علامت معلوم نہیں ہوتی۔ اسکا بھی ضروری خیال رہے کہ اگر $\Delta_ر$ صفر ہو جائے تو $\Delta_{ر+1}$ اور $\Delta_{ر-1}$ کی علامتیں مختلف ہوتی ہیں۔

نیز اگرچہ کہ ف کو لا انتہا طریقوں سے مربعوں کے مجموعہ میں تحویل کیا جا سکتا ہے اس بات کا مشاہدہ کرنا سب سے زیادہ ضروری ہے کہ استحالہ کو کسی طرح بھی عمل میں لایا جائے بشرطیکہ وہ حقیقی ہو سروں کی تعداد (جو ان مربعوں پر اثر انداز ہوتے ہیں) جنکی علامت دی ہوئی ہو ہمیشہ وہی رہتی ہے۔ یہ مسئلہ جسکو جیکوبی نے دریافت کیا ہے آسانی کے ساتھ ثابت ہو سکتا ہے کیونکہ اگر ایسا نہیں ہے تو فرض کرو کہ

$$ف \equiv ب_1 لا_1^{2} + ب_2 لا_2^{2} + \dots + ب_ن لا_ن^{2} ،$$

$$\equiv ق_1 ما_1^{2} + ق_2 ما_2^{2} + \dots + ق_ن ما_ن^{2} ،$$

جہاں اس متماثلہ کے دونوں طرف مثبت سروں کی تعداد ایک ہی نہیں ہے۔ منفی علامتوں سے متاثر رقموں کو متماثل کی مقابل جانبوں میں منتقل کر کے سب رقموں کو مثبت بنایا جائے تو ل مربعوں کا ایک مجموعہ، م مربعوں کے ایک مجموعہ کے متماثلاً مساوی ہونا چاہیئے جہاں م، ل سے بڑا ہے۔ اب اگر $لا_1$، $لا_2$، ….، $لا_ن$ کی بجائے ایسی قیمتیں درج کیجائیں کہ ل مربعوں میں سے ہر ایک معدوم ہو سکے

(اور یہ لا انتہا طریقوں سے کیا جا سکتا ہے) تو ہمیں معلوم ہو گا کہ مربعوں کا مجموعہ متماثلاً صفر کے مساوی ہونا چاہئے جو ناممکن ہے۔

۲۰۳ — ہرمٹ کا مسئلہ۔ دفعہ سابق میں جن اصولوں کو واضح کیا گیا ہے ان کو ہرمٹ نے مساوات ف(لا) = ۰ کی ان حقیقی اصلوں کی تعداد معیّن کرنے میں استعمال کیا ہے جو دئے ہوئے حدود کے اندر واقع ہوتی ہیں۔ اس مقصد کے لئے تفاعل ف کی جس خاص شکل کو وہ استعمال کرتا ہے یہ ہے

$$\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \frac{1}{\text{عہ}_{\text{ر}} - \text{غہ}} \left(\text{لا}_1 + \text{عہ}_{\text{ر}}\,\text{لا}_2 + \text{عہ}_{\text{ر}}^2\,\text{لا}_3 + \dots + \text{عہ}_{\text{ر}}^{\text{ن}-1}\,\text{لا}_{\text{ن}} \right)^2$$

جسمیں لا_1، لا_2، ....، $\text{لا}_{\text{ن}}$ کوئی متغیر ہیں جنکی تعداد مساوات کے درجہ کے مساوی ہے اور ر، ایک سے لیکر ن تک (بشمول ہر دو اعداد) سب قیمتیں اختیار کرتا ہے۔ مساوات کی اصلیں عہ_1، عہ_2، ....، $\text{عہ}_{\text{ن}}$ ہیں اور غہ کوئی اختیاری مبدل ہے۔

صریحاً یہ شکل مساوات ف(لا) = ۰ کی اصلوں کا ایک متشاکل (184)
تفاعل ہے اور چونکہ اس مساوات کے سروں کا حقیقی ہونا فرض کر لیا گیا ہے اس لئے ف بھی حقیقی ہو گا جب اسکو ان سروں کی اور غہ کی رقوم میں بیان کیا جائے بشرطیکہ مبدل غہ کو کوئی حقیقی قیمت دیجائے۔ اگر اصلیں عہ_1، عہ_2، ....، $\text{عہ}_{\text{ن}}$ حقیقی نہیں ہیں تو ف کی مفروضہ شکل ایک حقیقی استحالہ سے حاصل نہیں ہو گی لیکن اس سے جو شکل حاصل ہو گی اُس سے حسب ذیل طریقہ پر دوسری شکل کا اخذ کرنا آسان ہے۔

اگر مزدوج خیالی اصلوں کا ایک زوج عہ_1 اور عہ_2 ہو تو ہم لکھ سکتے ہیں

$$\text{عہ}_1 = \text{ر} (\text{جم عہ} + \text{خ جب عہ})،$$
$$\text{عہ}_2 = \text{ر} (\text{جم عہ} - \text{خ جب عہ})،$$

اب $\text{لا}_1 + \text{عہ}\,\text{لا}_2 + \text{عہ}^2\,\text{لا}_3 + \dots + \text{عہ}^{\text{ن}-1}\,\text{لا}_\text{ن}$ کو اختصاراً ما سے تعبیر کرنے اور ان قیمتوں کو ما_1 اور ما_2 میں درج کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{ما}_1 = \text{ع} + \text{خ و}،\quad \text{ما}_2 = \text{ع} - \text{خ و}$$

جہاں ع اور و حقیقی ہیں۔ نیز رکھو

$$\frac{1}{\text{عہ}_1 - \text{غہ}} = \text{ر} (\text{جم فہ} + \text{خ جب فہ})،\quad \frac{1}{\text{عہ}_2 - \text{غہ}} = \text{ر} (\text{جم فہ} - \text{خ جب فہ})$$

تو تفاعل ق کا وہ حصہ جو عہ_1 اور عہ_2 پر منحصر ہے یعنی حصہ

$$\frac{\text{ما}_1^2}{\text{عہ}_1 - \text{غہ}} + \frac{\text{ما}_2^2}{\text{عہ}_2 - \text{غہ}}$$

بدلکر

$$\text{ر}\left\{\left(\text{جم}\,\frac{\text{فہ}}{2} + \text{خ جب}\,\frac{\text{فہ}}{2}\right)^2(\text{ع} + \text{خ و})^2 + \left(\text{جم}\,\frac{\text{فہ}}{2} - \text{خ جب}\,\frac{\text{فہ}}{2}\right)^2(\text{ع} - \text{خ و})^2\right\}$$

ہو جاتا ہے جسکو دو مربعوں کے فرق کے طور پر یوں

$$2\,\text{ر}\left(\text{ع جم}\,\frac{\text{فہ}}{2} - \text{و جب}\,\frac{\text{فہ}}{2}\right)^2 - 2\,\text{ر}\left(\text{ع جب}\,\frac{\text{فہ}}{2} + \text{و جم}\,\frac{\text{فہ}}{2}\right)^2$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ دو مزدوج خیالی اصلوں کی وجہ سے ق میں دو حقیقی مربع داخل ہوتے ہیں جنمیں سے ایک کا سر مثبت ہوتا ہے اور دوسرے کا منفی۔

اب ہم ہرسٹ کے مسئلہ کو اس طرح بیان کرسکتے ہیں:۔ فرض کرو کہ مساوات

(185) ف (لا) ≡ (لا − عہ$_1$) (لا − عہ$_2$) ... (لا − عہ$_{ن}$) = ۰ کے سر حقیقی
ہیں اور اصلیں غیر مساوی۔ تب اگر ہم حقیقی ابدال کے ذریعہ جملہ

$$\frac{\text{ما}_1^2}{\text{عہ}_1-\text{غہ}}+\frac{\text{ما}_2^2}{\text{عہ}_2-\text{غہ}}+\frac{\text{ما}_3^2}{\text{عہ}_3-\text{غہ}}+\cdots\cdots+\frac{\text{ما}_{\text{ن}}^2}{\text{عہ}_{\text{ن}}-\text{غہ}} \qquad (۱)$$

کو جہاں

$$\text{ما}_{\text{ر}}=\text{لا}_1+\text{عہ}_{\text{ر}}\,\text{لا}_2+\text{عہ}_{\text{ر}}^2\,\text{لا}_3+\cdots\cdots+\text{عہ}_{\text{ر}}^{\text{ن}-1}\,\text{لا}_{\text{ن}}$$

مربعوں کے ایک مجموعہ میں تحویل کریں تو مثبت سروں والے مربعوں کی تعداد مساوات ف (لا) = ۰ کی خیالی اصلوں کے زوجوں کی تعداد اور غہ سے بڑی حقیقی اصلوں کی تعداد کے مجموعہ کے مساوی ہوگی۔

یہ مسئلہ صحیح رہیگا اگر ہم (عہ$_{ر}$ − غہ) کی بجائے (عہ$_{ر}$ − غہ) م$_{ر}$ رکھیں جہاں م$_{ر}$ کوئی مثبت یا منفی طاق صحیح عدد ہے۔

جو کچھ ہم نے اس سے قبل ثابت کیا ہے اس سے یہ مسئلہ فوراً حاصل ہو سکتا ہے اگر ہم تفاعل (۱) کے حصول پر جو حقیقی اصلوں سے اور خیالی اصلوں سے متعلق ہیں علیحدہ علیحدہ غور کریں کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ غہ سے بڑی ہر اصل کے لئے ایک مثبت مربع ہے اور ہم یہ ثابت کر چکے ہیں کہ مزدوج خیالی اصلوں سے ایک مثبت حقیقی مربع اور ایک منفی حقیقی مربع حاصل ہوتا ہے اور ان کی وجہ سے دوسرے مربعوں پر جو ان اصلوں پر منحصر نہیں ہیں کوئی اثر نہیں پڑتا۔

اب کسی دو عددوں غہ$_1$ اور غہ$_2$ کے درمیان حقیقی مربعوں کی

تعداد آسانی کے ساتھ تخمین میں آسکتی ہے۔ کیونکہ اگر ہم ف میں مثبت مربعوں کی تعداد کو پ$_{ر}$ سے تعبیر کریں جبکہ غہ = غہ$_{ر}$ اور مساوات ف(لا) = ۰ کی غہ$_{ر}$ سے بڑی اصلوں کی تعداد کو ن$_{ر}$ سے اور خیالی اصلوں کی تعداد کو ۲ ع سے تعبیر کریں تو

$$پ_{۱} = ن_{۱} + ع \text{ ، } پ_{۲} = ن_{۲} + ع$$

اس لئے

$$ن_{۱} - ن_{۲} = پ_{۱} - پ_{۲}$$

جس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ غہ$_{۱}$ اور غہ$_{۲}$ کے درمیان حقیقی اصلوں کی تعداد اُس فرق کے مساوی ہوتی ہے جو مثبت یا منفی مربعوں کی تعداد کے درمیان ہوتا ہے جبکہ غہ کی قیمتیں علی الترتیب غہ$_{۱}$ اور غہ$_{۲}$ ہوں۔

یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ جو تعداد یہاں متعین کی گئی ہے وہ دی ہوئی مساوات سے متعلق تفاعلوں کے ایک بہت اہم سلسلہ پر منحصر ہوتی ہے۔ ان تفاعلوں کو اخذ کرنے کے لئے ہم ف کی اس شکل (دفعہ ۲۰۲)

$$\Delta لا_{۱}^{۲} + \frac{\Delta_{۲}}{\Delta_{۱}} لا_{۲}^{۲} + \frac{\Delta_{۳}}{\Delta_{۲}} لا_{۳}^{۲} + \dots\dots + \frac{\Delta_{ن}}{\Delta_{ن-۱}} لا_{ن}^{۲}$$

پر غور کرتے ہیں جہاں $\Delta_{۱}$، $\Delta_{۲}$، ..... $\Delta_{ن}$ میں سے کوئی صفر نہیں ہے (186)

عدد پ سے اس شکل کے سروں کی وہ تعداد بیان ہوتی ہے جو مثبت ہیں۔ یعنی بالفاظِ دیگر حسب ذیل مقداروں کی تعداد جو منفی ہیں:۔

$$\Delta_{۱} \text{ ، } \frac{\Delta_{۲}}{\Delta_{۱}} \text{ ، } \frac{\Delta_{۳}}{\Delta_{۲}} \text{ ، } \dots\dots \text{ ، } \frac{\Delta_{ن}}{\Delta_{ن-۱}} \quad (۲)$$

اب ہم Δ_1، Δ_2، ....، $\Delta_{\text{ر}}$، ..... $\Delta_{\text{ن}}$ کو غہ اور مساوات ف (لا) = ۰ کی اصلوں کی رقوم میں محسوب کرتے ہیں۔ یہ طریقہ چونکہ ہر صورت میں وہی ہوتا ہے اسلئے صرف Δ_2 کو محسوب کرنا کافی ہوگا یعنی ف کی ابتدائی شکل کے ممیز کو جبکہ تمام متغیر سوائے لا۱، لا۲، لا۳ کے معدوم ہوتے ہیں۔

اختصاراً $\text{نر} = \dfrac{1}{\text{عر} - \text{غہ}}$ لکھنے سے اس صورت میں ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{ف}_2 = \Sigma\, \text{نر} \left(\text{لا}_1 + \text{عر}\,\text{لا}_2 + \text{عر}^2\,\text{لا}_3\right)^2$$

اس شکل کا ممیز ہے

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \Sigma\,\text{نر} & \Sigma\,\text{عر}\,\text{نر} & \Sigma\,\text{عر}^2\,\text{نر} \\ \Sigma\,\text{عر}\,\text{نر} & \Sigma\,\text{عر}^2\,\text{نر} & \Sigma\,\text{عر}^3\,\text{نر} \\ \Sigma\,\text{عر}^2\,\text{نر} & \Sigma\,\text{عر}^3\,\text{نر} & \Sigma\,\text{عر}^4\,\text{نر} \end{vmatrix}$$

اس ممیز کو ان دو آراستوں

$$\left[\begin{matrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \text{ع}_1 & \text{ع}_2 & \cdots & \text{ع}_{\text{ن}} \\ \text{ع}_1^2 & \text{ع}_2^2 & \cdots & \text{ع}_{\text{ن}}^2 \end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix} \text{ن}_1 & \text{ن}_2 & \cdots & \text{ن}_{\text{ن}} \\ \text{ع}_1\text{ن}_1 & \text{ع}_2\text{ن}_2 & \cdots & \text{ع}_{\text{ن}}\text{ن}_{\text{ن}} \\ \text{ع}_1^2\text{ن}_1 & \text{ع}_2^2\text{ن}_2 & \cdots & \text{ع}_{\text{ن}}^2\text{ن}_{\text{ن}} \end{matrix}\right\}$$

کے حاصل ضرب کے طور پر لکھا جا سکتا ہے اور اسلئے

$$\Delta_2 = \Sigma\, \text{ن}_1\text{ن}_2\text{ن}_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{ع}_1 & \text{ع}_2 & \text{ع}_3 \\ \text{ع}_1^2 & \text{ع}_2^2 & \text{ع}_3^2 \end{vmatrix} = \Sigma \frac{(\text{ع}_1 - \text{ع}_2)^2 (\text{ع}_2 - \text{ع}_3)^2 (\text{ع}_3 - \text{ع}_1)^2}{(\text{ع}_1 - \text{غہ})(\text{ع}_2 - \text{غہ})(\text{ع}_3 - \text{غہ})}$$

بالکل اسی طریقے سے ہم معلوم کرتے ہیں

$$\Delta_{ر} = \Sigma \frac{\nabla(ع_{۱}،ع_{۲}،ع_{۳}،\ldots،ع_{ر})}{(ع_{۱}-غ)(ع_{۲}-غ)\ldots(ع_{ر}-غ)}$$

جہاں ترشیم $\nabla(ع_{۱}،ع_{۲}،\ldots،ع_{ر})$ کو $ع_{۱}،ع_{۲}،\ldots،ع_{ر}$ کے فرقوں (137)
کے مربعوں کے حاصل ضرب کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال کیا گیا ہے
پس مقادیر $\Delta_{۱}،\Delta_{۲}،\ldots،\Delta_{ر}،\ldots\Delta_{ن}$ سب کی سب معلوم ہوگئیں

اب سلسلہ (۲) کی ہر کسر کے نسب نما اور شمار کنندہ کو ف(غ) سے ضرب دیں تو Δ کی ہر قیمت صحیح شکل میں حاصل ہوتی ہے اور سلسلہ ہو جاتا ہے

$$\frac{و_{۱}}{و}،\frac{و_{۲}}{و_{۱}}،\frac{و_{۳}}{و_{۲}}،\ldots،\frac{و_{ن}}{و_{ن-۱}} \qquad (۳)$$

جہاں

$$و = (غ-ع_{۱})(غ-ع_{۲})\ldots(غ-ع_{ن})،$$

$$و_{۱} = \Sigma(غ-ع_{۲})(غ-ع_{۳})\ldots(غ-ع_{ن})،$$

$$و_{۲} = \Sigma\nabla(ع_{۱}،ع_{۲})(غ-ع_{۳})\ldots(غ-ع_{ن})،$$

$$و_{۳} = \Sigma\nabla(ع_{۱}،ع_{۲}،ع_{۳})(غ-ع_{۴})\ldots(غ-ع_{ن})،$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$و_{ن} = \nabla(ع_{۱}،ع_{۲}،ع_{۳}،\ldots،ع_{ن})$$

چونکہ سلسلہ (۳) کی منفی ارقام سلسلہ $و،و_{۱}،و_{۲}،\ldots،و_{ن}$ میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد کے متناظر ہوتی ہیں اسلئے یہ ثابت ہوتا ہے کہ اس آخری سلسلہ میں علامت کی جتنی تبدیلیاں، غ کے قیمت $ع_{۱}$ سے قیمت $ع_{۲}$ تک

گذرنے میں کم ہوتی ہیں انکی تعداد مساوات ف (غہ) = ۰ کی اُن حقیقی اصلوں کی تعداد کے ٹھیک مساوی ہوتی ہے غہ$_1$ اور غہ$_2$ کے درمیان واقع ہیں۔

یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ تفاعل و$'$، و$_1'$، و$_2'$ وغیرہ جو یہاں حاصل ہوئے ہیں وہی خاصیت رکھتے ہیں جو اسٹرم کے تفاعلوں کی ہے۔ اسٹرم کے تفاعلوں اور اِن تفاعلوں میں صرف اتنا فرق ہے کہ یہ تفاعل (و$'$، و$_1'$، و$_2'$ وغیرہ) صرف مثبت ضاربوں میں اسٹرم کے تفاعلوں سے مختلف ہیں۔ اس فرق کو سلوسٹر نے معلوم کیا تھا اور ان سے ان شکلوں کو سب سے پہلے فلاسفیکل میگزین بابتہ دسمبر سنہ ۱۸۳۹ء میں شائع کیا تھا۔ تفاعلوں کے اِن دو سلسلوں میں مماثلت ثابت کرنیکے لئے ہم پہلے حسب ذیل دفعہ میں ایک اہم مسئلہ ثابت کرتے ہیں یہ مسئلہ اسٹرم کے تفاعلوں کے فائق سروں اور ایک مساوات کی اصلوں کی قوتوں کے مجموعوں کے درمیان ایک ربط کو بیان کرتا ہے

(188) **۲۰۴ ۔ اسٹرم کے امدادی تفاعلوں کے فائق سر [یعنے ف (لا) اور (ن ۔ ۱) باقیات] اِن مقطعات**

$$\text{س}_0 ,\quad \begin{vmatrix} \text{س}_0 & \text{س}_1 \\ \text{س}_1 & \text{س}_2 \end{vmatrix} ,\quad \begin{vmatrix} \text{س}_0 & \text{س}_1 & \text{س}_2 \\ \text{س}_1 & \text{س}_2 & \text{س}_3 \\ \text{س}_2 & \text{س}_3 & \text{س}_4 \end{vmatrix} ,\quad \begin{vmatrix} \text{س}_0 & \text{س}_1 & \text{س}_2 & \text{س}_3 \\ \text{س}_1 & \text{س}_2 & \text{س}_3 & \text{س}_4 \\ \text{س}_2 & \text{س}_3 & \text{س}_4 & \text{س}_5 \\ \text{س}_3 & \text{س}_4 & \text{س}_5 & \text{س}_6 \end{vmatrix} \quad \text{وغیرہ}$$

سے صرف مثبت اجزائے ضربی میں متفرق ہوتے ہیں۔

خطوط وحدانی کی ترقیم استعمال کرکے ہم اِن مقطعات کو شکل

س_0، (س_1، س_2)، (س_1، س_2، س_3) وغیرہ میں لکھ سکتے ہیں۔

اس سلسلہ کا آخری مقطع (س، س_1، س_2، س_3، ...، $\text{س}_{\text{ن}-2}$) ہے۔

اب اسٹرم کے باقیات کو ر_2، ر_3، ر_4، ... $\text{ر}_{\text{ز}}$، ... $\text{ر}_{\text{ن}}$ سے اور متواتر خارج قسمتوں کو ق_1، ق_2، ق_3 وغیرہ سے تعبیر کیا جائے تو (دفعہ ۹۶ کی رو سے)

$$\text{ر}_2 = \text{ق}_1\,\text{ف}'(\text{لا}) - \text{ف}(\text{لا}),$$

$$\text{ر}_3 = \text{ق}_2\,\text{ر}_2 - \text{ف}'(\text{لا}) = (\text{ق}_1\text{ق}_2 - 1)\,\text{ف}'(\text{لا}) - \text{ق}_2\,\text{ف}(\text{لا}),$$

$$\text{ر}_4 = \text{ق}_3\,\text{ر}_3 - \text{ر}_2 = (\text{ق}_1\text{ق}_2\text{ق}_3 - \text{ق}_1 - \text{ق}_3)\,\text{ف}'(\text{لا})$$

$$-(\text{ق}_2\text{ق}_3 - 1)\,\text{ف}(\text{لا}), \quad \text{وغیرہ}$$

اس طرح عمل کو جاری رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ کوئی باقی $\text{ر}_{\text{ز}}$ شکل

$$\text{ر}_{\text{ز}} \equiv \text{ا}_{\text{ز}}\,\text{ف}'(\text{لا}) - \text{ب}_{\text{ز}}\,\text{ف}(\text{لا}) \qquad (1)$$

میں بیان کیا جاسکتا ہے۔

$\text{ر}_{\text{ز}}$ کا درجہ ن ـ ز ہے اور چونکہ ق_1، ق_2 وغیرہ لا میں پہلے درجہ کے ہیں اسلئے یہ معلوم ہوتا ہے کہ $\text{ا}_{\text{ز}}$ اور $\text{ب}_{\text{ز}}$ کے درجے علی الترتیب ز ـ ۱ اور ز ـ ۲ ہیں۔

میں $\text{ر}_{\text{ز}}$ اور $\text{ا}_{\text{ز}}$ کو ان شکلوں

$$\text{ر}_{\text{ز}} \equiv \text{ر} + \text{ر}_1\text{لا} + \text{ر}_2\text{لا}^2 + \dots + \text{ر}_{\text{ن}-\text{ز}}\,\text{لا}^{\text{ن}-\text{ز}},$$

$$\text{ا}_{ژ} = \text{لہ}_{.} + \text{لہ}_{۱}\,\text{لا} + \text{لہ}_{۲}\,\text{لا}^{۲} + \dots + \text{لہ}_{ژ-۱}\,\text{لا}^{ژ-۱}$$

کا مان لینے اور (۱) میں مساوات ف (لا) = ۰ کی کوئی اصل عہ [illegible] کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{لہ}_{.} + \text{لہ}_{۱}\,\text{عہ} + \text{لہ}_{۲}\,\text{عہ}^{۲} + \dots + \text{لہ}_{ژ-۱}\,\text{عہ}^{ژ-۱} = \frac{\text{ر}_{.} + \text{ر}_{۱}\,\text{عہ} + \text{ر}_{۲}\,\text{عہ}^{۲} + \dots}{\text{ف}'(\text{عہ})}$$

اِسکو علی التواتر عہ، عہ^۲، ...، $\text{عہ}^{ژ-۲}$، $\text{عہ}^{ژ-۱}$ سے ضرب دو۔ دوسری

(19[illegible]) اصلوں کے ابدالات اسی طرح عمل میں لاؤ۔ اس طور پر حاصل شدہ مساواتوں کو جمع کرو تو مثال ۴ صفحہ ۲۵۵ جلد اول کے رشتوں کی مدد سے ہمیں مساواتوں کا حسب ذیل نظام ملتا ہے:-

$$\text{لہ}_{.}\,\text{س}_{.} + \text{لہ}_{۱}\,\text{س}_{۱} + \dots + \text{لہ}_{ژ-۲}\,\text{س}_{ژ-۲} + \text{لہ}_{ژ-۱}\,\text{س}_{ژ-۱} = \text{ر}'_{.}$$

$$\text{لہ}_{.}\,\text{س}_{۱} + \text{لہ}_{۱}\,\text{س}_{۲} + \dots + \text{لہ}_{ژ-۲}\,\text{س}_{ژ-۱} + \text{لہ}_{ژ-۱}\,\text{س}_{ژ} = \text{ر}'_{۱}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\text{لہ}_{.}\,\text{س}_{ژ-۲} + \text{لہ}_{۱}\,\text{س}_{ژ-۱} + \dots + \text{لہ}_{ژ-۲}\,\text{س}_{۲ژ-۴} + \text{لہ}_{ژ-۱}\,\text{س}_{۲ژ-۳} = \text{ر}'_{ژ-۲}$$

$$\text{لہ}_{.}\,\text{س}_{ژ-۱} + \text{لہ}_{۱}\,\text{س}_{ژ} + \dots + \text{لہ}_{ژ-۲}\,\text{س}_{۲ژ-۳} + \text{لہ}_{ژ-۱}\,\text{س}_{۲ژ-۲} = \text{ر}'_{ژ-۱}$$

ان مساواتوں سے بغیر کسی مشکل کے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ئہ}_{ژ} = \text{جہ}_{ژ} \begin{vmatrix} \text{س}_{.} & \text{س}_{۱} & \dots & \text{س}_{ژ-۱} \\ \text{س}_{۱} & \text{س}_{۲} & \dots & \text{س}_{ژ} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{س}_{ژ-۱} & \text{س}_{ژ} & \dots & \text{س}_{۲ژ-۲} \end{vmatrix}$$

$$ا_ث = جـ_ث \begin{vmatrix} س_{ث-۱} & س_{ث-۲} & \cdots & س_۱ & س \\ س_ث & س_{ث-۱} & \cdots & س_۲ & س_۱ \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ س_{۲ث-۳} & س_{۲ث-۴} & \cdots & س_{ث-۱} & س_{ث-۲} \\ لا^{ث-۱} & لا^{ث-۲} & \cdots & لا & ۱ \end{vmatrix}$$

جہاں $جـ_ث$ کی قیمت اب تک اختیاری ہے۔ اس لئے یہ معلوم ہوتا ہے کہ $ا_ث$ میں لا کی بڑی سے بڑی قوت کا سر مقطع ($س، س_۱، س_۲ \ldots س_{۲ث-۲}$) کو $جـ_ث$ سے ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے۔ اب ہم یہ دکھائینگے کہ $جـ_ث$ کی علامت مثبت ہے۔ اس مقصد کے لئے ہم حسب ذیل رشتہ سے استفادہ کرتے ہیں جو تفاعلوں $ر_ک$ اور $ا_ک$ کی متواتر قیمتوں کو مربوط کرتا ہے:-

$$ا_{ک+۱}\, ر_ک - ر_{ک+۱}\, ا_ک \equiv ف(لا) \qquad (۲)$$

اسکو ثابت کرنے کے لئے رشتہ

$$ر_{ک+۱} = ق_ک\, ر_ک - ر_{ک-۱}$$

میں $ر_{ک+۱}$، $ر_ک$، $ر_{ک-۱}$ کی بجائے انکی قیمتیں ا اور ب کی رقوم میں درج کرو تو

$$ا_{ک+۱} = ق_ک\, ا_ک - ا_{ک-۱}، \quad ب_{ک+۱} = ق_ک\, ب_ک - ب_{ک-۱}$$

انکی مدد سے حسب ذیل رشتے جو متواتر تفاعلوں کو مربوط کرتے ہیں فوراً

حاصل ہوتے ہیں :-

$$ا_{ک+۱}\, ب_ک - ر_ک\, ا_ک\, ب_{ک+۱} = ا_ک\, ب_{ک-۱} - ر_{ک-۱}\, ا_{ک-۱}\, ب_ک = \cdots$$

$$= ا_۱\, ب - ا\, ب_۱ = -۱ ،$$

$$ا_{ک+۱}\, ر_ک - ا_ک\, ر_{ک+۱} = ا_ک\, ر_{ک-۱} - ا_{ک-۱}\, ر_ک = \cdots\cdots$$

$$= ا_۱\, ر - ا\, ر_۱ = ف\,(لا) ،$$

جہاں $ر = ف'(لا)$، $ر_۱ = ف\,(لا) = لا^{ن} + ن\, ب_۱\, لا^{ن-۱} + \cdots + ب_ن$

(190) اب مماثلہ (۲) میں لا کی بڑی سے بڑی قوتوں کے سروں کا مقابلہ کرو اور چونکہ $لا^{۲ن}$ صرف $ر_ک\, ا_{ک+۱}\, ر_ک$ میں واقع ہوتا ہے اس لئے اوپر حاصل کردہ منقطعاتی شکلیں استعمال کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے :-

$$سک_{ک+۱}\, جہ\,(س.\, س_۱\, س_۲ \cdots س_{۲ک-۲})\; جہ\,(س_۱\, س_۲\, س_۳ \cdots س_{۲ک-۲}) = ۱$$

یا

$$سک_{ک+۱}\, جہ_ک = (س.\, س_۱\, س_۲ \cdots س_{۲ک-۲})^{-۲}$$

نیز معمولی طریقے سے $ر_۲$ کی قیمت محسوب کی جائے تو

$$ا_۲ = \frac{۱}{س.^{۲}} \begin{vmatrix} س. & س_۱ \\ ۱ & لا \end{vmatrix}$$

جس سے ہم دیکھتے ہیں کہ $جہ_۲$ کی قیمت $\frac{۱}{س.^{۲}}$ ہے۔

جہ کی کسی دو متواتر (متصلہ) قیمتوں کے درمیان جو ربط اوپر

معلوم کیا گیا ہے اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جس، جسہ، ... ، جسر وغیرہ سب کے سب مثبت مربع ہیں اور اسلئے آخر لا عرن۔ر جو سا ر میں لا کی بڑی سے بڑی قوت کا سر ہے وہی علامت رکھتا ہے جو مقطع (سا سا سہ سہ ... سر۲-۲) کی ہے۔

یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ لا کے (ن - ر) درجہ کے تفاعل کو شکل

ا ف (لا) - ب ف (لا)

میں بیان کرنیکا صرف ایک طریقہ ہے جہاں ا اور ب علی الترتیب (ر-۱) اور (ر - ۲) ویں درجوں کے ہیں اور ف (لا) کا درجہ ن ہے کیونکہ یہ تفاعل بالعموم ن + ر - ۲ درجہ کا ہوتا ہے اور اسلئے اس کو ن - ر درجہ تک گھٹانے میں بڑی سے بڑی رقموں کی (۲ ر - ۲) تعداد معدوم ہونی چاہیئے اور یہ ٹھیک وہی تعداد ہے جو ا اور ب میں غیر معین مقداروں کی ہے جنکو ہم خارج کر سکتے ہیں کیونکہ ہمیں صرف سروں کی نسبتوں سے واسطہ ہے۔ اس طرح اسر م کے باقیات ایک غیر معین ضارب کے ساتھ حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

تفاعل سار، ار اور دیئے ہوئے لا، عہ، عہ، ... عن کے فرقوں کے تفاعل ہیں اور اسلئے بالفاظ دیگر وہ ف (لا) کے نیم ہم متغیر ہیں۔ یہ اس طرح دیکھا جا سکتا ہے کہ متماثلہ سار = ار ف (لا) - بر ف (لا) میں لا کی بجائے لا + عہ اور عہر کی بجائے عہر + عہ رکھا جائے اور یہ یاد رکھا جائے کہ ف (لا) اور ف (لا) نہیں بدلتے اور اس لئے

کاثر، اثر اور بثر، عمہ پر منحصر نہیں ہیں کیونکہ ثر کو متعین کردینے کے بعد وہ ف(لا) اور فَ(لا) کی مدد سے یگانہ طور پر دریافت ہوجاتے ہیں۔ دفعہ ذیل کی بحث سے معلوم ہوگا کہ ان تفاعلوں کی قیمت (191) لا اور اصلوں کے فرقوں کی رقوم میں دراصل کیا ہے۔

۲۰۵۔ اسٹرم کے تفاعلوں کیلئے سلوسٹر کی شکلیں۔ اب ہم دفعہ ماسبق کی ترقیم استعمال کرتے ہوئے یہ بتاتے ہیں کہ اسٹرم کا باقی کاثر تفاعل وثر سے صرف مثبت جزوِ ضربی جہثر کے لحاظ سے متفاوت ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$\text{کا}_{\text{ثر}} = \text{ا}_{\text{ثر}}\,\text{فَ}(\text{لا}) - \text{ب}_{\text{ثر}}\,\text{ف}(\text{لا}) \qquad (۱)$$

جہاں $\text{کا}_{\text{ثر}} = \text{ر}_0 + \text{ر}_1\,\text{لا} + \text{ر}_2\,\text{لا}^2 + \dots + \text{ر}_{\text{ن}-\text{ثر}}\,\text{لا}^{\text{ن}-\text{ثر}}$ ،

$$\text{ا}_{\text{ثر}} = \text{لہ}_0 + \text{لہ}_1\,\text{لا} + \text{لہ}_2\,\text{لا}^2 + \dots + \text{لہ}_{\text{ثر}-1}\,\text{لا}^{\text{ثر}-1} ،$$

$$\text{ب}_{\text{ثر}} = \text{مہ}_0 + \text{مہ}_1\,\text{لا} + \text{مہ}_2\,\text{لا}^2 + \dots + \text{مہ}_{\text{ثر}-2}\,\text{لا}^{\text{ثر}-2} ،$$

نیز اوپر دی ہوئی $\text{ر}_{\text{ن}-\text{ثر}}$ کی قیمت سے ہمیں فوراً حاصل ہوتا ہے

$$\text{ر}_{\text{ن}-\text{ثر}} = \text{جہ}_{\text{ثر}}\,\Sigma\,\nabla(\text{عہ}_1، \text{عہ}_2، \text{عہ}_3، \dots ، \text{عہ}_{\text{ثر}})$$

اس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ کاثر اور وثر کے فائق سر صرف جزوِ ضربی جہثر سے متفاوت ہیں۔ اب ہم یہ ثابت کرتے ہیں کہ ان

تفاعلوں کے آخری سر اُسی جزو ضربی سے متفاوت ہیں۔ اس مقصد کے لئے متماثلہ (۱) کو ف (لا) سے تقسیم کرو، اسمیں مساوات

$$\frac{\text{ف}'(\text{لا})}{\text{ف}(\text{لا})} = \frac{\text{س}_0}{\text{لا}} + \frac{\text{س}_1}{\text{لا}^2} + \frac{\text{س}_2}{\text{لا}^3} + \cdots\cdots$$

سے اندراجات کرو، اور سروں کا مقابلہ کرو تو

$$\text{م} = \text{ل}_1\text{س}_0 + \text{ل}_2\text{س}_1 + \text{ل}_3\text{س}_2 + \cdots + \text{ل}_{\text{ن}-1}\text{س}_{\text{ن}-2}\,،$$

$$\text{م}_1 = \text{ل}_2\text{س}_0 + \text{ل}_3\text{س}_1 + \cdots + \text{ل}_{\text{ن}-1}\text{س}_{\text{ن}-3}\,،$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{م}_{\text{ن}-2} = \text{ل}_{\text{ن}-1}\text{س}_0\,،$$

نیز (۱) میں لا = . رکھنے سے حاصل ہوتا ہے:۔

$$\text{ر} = \text{ل}_1\text{ب}_{\text{ن}-1} - \text{م}\,\text{ب}_{\text{ن}}$$

اور م کی قیمت ل۱، ل۲، ل۳ وغیرہ کی رقوم میں درج کرنے سے

$$-\frac{\text{ر}}{\text{ب}_{\text{ن}}} = \text{ل}\,\text{س}_{-1} + \text{ل}_1\text{س}_0 + \text{ل}_2\text{س}_1 + \cdots + \text{ل}_{\text{ن}-1}\text{س}_{\text{ن}-2}$$

پس ل، ل۱، ... ل$_{\text{ن}-1}$ کو وہی قیمتیں دینے سے جو $\frac{\text{ر}}{\text{ب}_{\text{ن}}}$ کو محسوب کرنے میں دیگئی ہیں ہم حاصل کرتے ہیں:۔ (192)

$$\text{ر} = (-1)^{\text{ن}}\,\text{ب}_{\text{ن}}\,\text{ج}\quad\left|\begin{array}{ccccc} \text{س}_{-1} & \text{س}_0 & \text{س}_1 & \cdots & \text{س}_{\text{ن}-2} \\ \text{س}_0 & \text{س}_1 & \text{س}_2 & \cdots & \text{س}_{\text{ن}-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{س}_{\text{ن}-2} & \text{س}_{\text{ن}-1} & \text{س}_{\text{ن}} & \cdots & \text{س}_{2\text{ن}-3} \end{array}\right|$$

اب دفعہ ۲۰۳ میں $\Delta_{ز}$ کو محسوب کرنے کا عمل دیکھنے اور وہاں حاصل شدہ $\Delta_{ز}$ کی قیمت میں عہ = ۰ یا نہ ر = $\frac{1}{عہ_{ر}}$ رکھنے سے اوپر لکھے ہوئے مقطع کی قیمت ملتی ہے

$$\sum \frac{\Delta(عہ_1، عہ_2، عہ_3، \ldots، عہ_{ز})}{عہ_1 عہ_2 عہ_3 \ldots عہ_{ز}}$$

پس $ب_{ن}$ کی بجائے اصلوں کی رقوم میں اسکی قیمت رکھنے اور مقطع کو دو آراسنوں کے حاصل ضرب کے طور پر بیان کرنے سے

$$ر = (-1)^{ن-ز} جہ_{ز} \sum \Delta(عہ_1، عہ_2، \ldots، عہ_{ز}) عہ_{ز+1} عہ_{ز+2} \ldots عہ_{ن}$$

اور یہی ثابت کرنا تھا۔

لیکن ہم نے اوپر دیکھا ہے کہ $کا_{ز}$ ایک نیم ہم تنغیر ہے اور اسلئے

$$کا_{ز} = فہ(عہ_1 - لا، عہ_2 - لا، \ldots، عہ_{ن} - لا)$$

پس $ر = فہ(عہ_1 عہ_2 \ldots عہ_{ن})$۔ اسلئے $کا_{ز}$ حاصل کرنیکے لئے ر میں $عہ_{ر}$ کی بجائے $عہ_{ر} - لا$ رکھنا چاہیئے۔ نیز $جہ_{ز}$ اصلوں کے فرقوں کا تفاعل ہے اسلئے

$$کا_{ز} = (-1)^{ن-ز} جہ_{ز} \sum \Delta(عہ_1، عہ_2 \ldots عہ_{ز})(عہ_{ز+1} - لا)(عہ_{ز+2} - لا) \ldots$$
$$\ldots (عہ_{ن} - لا)$$

اسلئے $کا_{ز} = جہ_{ز}\, و_{ز}$

مثالیں

۱۔ دفعات ۲۰۴ اور ۲۰۵ کی ترقیم استعمال کرکے ثابت کرو کہ خارج قسمت

$\frac{ا_ن}{جـ_ن}$ ایک متشاکل تفاعل کے طور پہ لکھا جا سکتا ہے جسمیں صرف لا اور اصلیں شامل ہوتی ہیں یعنے

$$\frac{ا_۴}{جـ_۴} = \Sigma (بہ - جہ)^۲ (جہ - عہ)^۲ (عہ - بہ)^۲ (لا - عہ)(لا - بہ)(لا - جہ)$$

۲ — اسی ترقیم کو استعمال کرکے ثابت کرو کہ (193)

$$ب_ن = جـ_ن \begin{vmatrix} س & س_۱ & س_۲ & \cdots & س_{ن-۱} \\ س_۱ & س_۲ & س_۳ & \cdots & س_ن \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ س_{ن-۲} & س_{ن-۱} & س_ن & \cdots & س_{۲ن-۳} \\ ۰ & ت_۱ & ت_۲ & \cdots & ت_{ن-۱} \end{vmatrix}$$

جہاں $ت_ن = س لا^{ن-۱} + س_۱ لا^{ن-۲} + س_۲ لا^{ن-۳} + \cdots + س_{ن-۱}$

۳ — اسی ترقیم کو استعمال کرکے اور

$$\sum_{ر=۱}^{ر=ن} (غہ - عہ_ر)(لا_۱ + عہ لا_۲ + عہ^۲ لا_۳ + \cdots + عہ^{ن-۱} لا_ن)^۲$$

کو عن سے تعبیر کرکے ثابت کرو کہ عن کا ممیز مساوات $جـ_ن \Delta_ن = ا_ن$ سے متعین ہو سکتا ہے اور بالراست بتاؤ کہ اگر لا کی کسی خاص قیمت کے لئے $ا_ن = ۰$ تو لا کی اسی قیمت کیلئے $ا_{ن-۱}$ اور $ا_{ن+۱}$ مختلف العلامت ہیں۔

فصل (۳) متفرق مسائل

۲۰۶ ـ پانچ درجی کو تین پانچویں قوتوں کے مجموعہ میں تحویل کرنا۔

ہم ثابت کرینگے کہ یہ استحالہ تیسرے درجہ کی ایک مساوات کو حل کرنے سے عمل میں لایا جا سکتا ہے۔
فرض کرو کہ

$$(\text{ا}_0،\ \text{ا}_1،\ \text{ا}_2،\ \text{ا}_3،\ \text{ا}_4،\ \text{ا}_5)(\text{لا}،\ \text{ما})^5 \equiv \text{ب}_1(\text{لا}-\text{ج}_1\text{ما})^5+\text{ب}_2(\text{لا}-\text{ج}_2\text{ما})^5+\text{ب}_3(\text{لا}-\text{ج}_3\text{ما})^5$$

جہاں ج_1، ج_2، ج_3 مساوات

$$\text{پ}_3\text{ی}^3+\text{پ}_2\text{ی}^2+\text{پ}_1\text{ی}+\text{پ}_0=0$$

کی اصلیں ہیں۔
اب پانچ درجی کی ان دو شکلوں میں سروں کا مقابلہ کرنے سے

$$\text{ا}_0=\text{ب}_1+\text{ب}_2+\text{ب}_3،\quad \text{ا}_1=\text{ب}_1\text{ج}_1+\text{ب}_2\text{ج}_2+\text{ب}_3\text{ج}_3،$$

$$\text{ا}_2=\text{ب}_1\text{ج}_1^2+\text{ب}_2\text{ج}_2^2+\text{ب}_3\text{ج}_3^2،\quad \text{ا}_3=\text{ب}_1\text{ج}_1^3+\text{ب}_2\text{ج}_2^3+\text{ب}_3\text{ج}_3^3،$$

$$\text{ا}_4=\text{ب}_1\text{ج}_1^4+\text{ب}_2\text{ج}_2^4+\text{ب}_3\text{ج}_3^4،\quad \text{ا}_5=\text{ب}_1\text{ج}_1^5+\text{ب}_2\text{ج}_2^5+\text{ب}_3\text{ج}_3^5،$$

پس

$$\text{پ}_0\text{ا}_0-\text{پ}_1\text{ا}_1+\text{پ}_2\text{ا}_2-\text{پ}_3\text{ا}_3=0،$$

$$\text{پ}_0\text{ا}_1-\text{پ}_1\text{ا}_2+\text{پ}_2\text{ا}_3-\text{پ}_3\text{ا}_4=0،$$

$$\text{پ}_0\text{ا}_2-\text{پ}_1\text{ا}_3+\text{پ}_2\text{ا}_4-\text{پ}_3\text{ا}_5=0،$$

(194) اب اگر ان مساواتوں کو مساوات

$$\text{پ}_0+\text{پ}_1\text{ی}+\text{پ}_2\text{ی}^2+\text{پ}_3\text{ی}^3=0$$

کے ساتھ لیا جائے تو $\text{ی}_{۱}$، $\text{ی}_{۲}$، $\text{ی}_{۳}$ کو متعین کرنیکے لئے ہمیں حسب ذیل مساوات ملتی ہے:-

$$\text{ج} \equiv \begin{vmatrix} -۱ & \text{ی} & -\text{ی}^{۲} & \text{ی}^{۳} \\ \text{ل}_{۰} & \text{ل}_{۱} & \text{ل}_{۲} & \text{ل}_{۳} \\ \text{ل}_{۱} & \text{ل}_{۲} & \text{ل}_{۳} & \text{ل}_{۴} \\ \text{ل}_{۲} & \text{ل}_{۳} & \text{ل}_{۴} & \text{ل}_{۵} \end{vmatrix} = ۰$$

جب اس مساوات سے $\text{ی}_{۱}$، $\text{ی}_{۲}$، $\text{ی}_{۳}$ معلوم ہو جائیں تو ظاہر ہے کہ $\text{ب}_{۱}$، $\text{ب}_{۲}$، $\text{ب}_{۳}$ کی کوئی قیمتیں جو اوپر کی چھ مساواتوں میں سے تین کو پورا کریں بقیہ تین کو بھی پورا کریں گی۔ اس لئے $\text{ب}_{۱}$، $\text{ب}_{۲}$، $\text{ب}_{۳}$ مساواتوں

$$\text{ب}_{۱} + \text{ب}_{۲} + \text{ب}_{۳} = \text{ل}_{۰} \text{ ،}$$

$$\text{ب}_{۱}\text{ی}_{۱} + \text{ب}_{۲}\text{ی}_{۲} + \text{ب}_{۳}\text{ی}_{۳} = \text{ل}_{۱} \text{ ،}$$

$$\text{ب}_{۱}\text{ی}_{۱}^{۲} + \text{ب}_{۲}\text{ی}_{۲}^{۲} + \text{ب}_{۳}\text{ی}_{۳}^{۲} = \text{ل}_{۲} \text{ ،}$$

سے معلوم ہوتے ہیں اور اس طرح حل کی تکمیل ہو جاتی ہے۔

پانچ درجی کا یہ اہم استحالہ حسب ذیل عام مسئلہ کی (جو بالکل اسی طریقہ پر ثابت ہو سکتا ہے) ایک خاص صورت ہے:-

لا، ما کا کوئی تجانسی تفاعل جسکا درجہ ۲ن − ۱ ہو شکل

$$\text{ب}_{۱}(\text{لا} - \text{ی}_{۱}\text{ما})^{۲\text{ن}-۱} + \text{ب}_{۲}(\text{لا} - \text{ی}_{۲}\text{ما})^{۲\text{ن}-۱} + \dots + \text{ب}_{\text{ن}}(\text{لا} - \text{ی}_{\text{ن}}\text{ما})^{۲\text{ن}-۱}$$

میں ن ویں درجہ کی ایک مساوات کو حل کرنے سے تحویل ہو سکتا ہے۔

یہ مسئلہ ملوشٹ نے دریافت کیا تھا۔

متغیری کے کعبی ج کو اگر لا، ما میں متجانس مساوات کے طور پر لکھا جائے (جسکو قانونیہ کہتے ہیں) تو یہ کعبی

$$\text{پ}_{۳}\,(\text{لا} - \text{ب}_{۱}\,\text{ما})(\text{لا} - \text{ب}_{۲}\,\text{ما})(\text{لا} - \text{ب}_{۳}\,\text{ما})$$

کے مساوی ہوتا ہے اور اس کعبی کو ہم متغیر ہونا چاہئے کیونکہ اگر پانچ درجی کو شکل $\text{ع}^{۵} + \text{ذ}^{۵} + \text{ط}^{۵}$ میں بیان کیا جائے تو استحالہ کے بعد وہ $\text{عَ}^{۵} + \text{ذَ}^{۵} + \text{طَ}^{۵}$ ہوجائیگا جہاں عَ، ذَ، طَ ابتدائی ع، ذ، ط کی استحالہ شدہ قیمتیں ہیں لیکن استحالہ شدہ پانچ درجی کو یگانہ طور پر شکل

$$\text{عً}^{۵} + \text{ذً}^{۵} + \text{طً}^{۵}$$

(195) میں بیان کیا جاسکتا ہے اور اسلئے عً، ذً، طً جو استحالہ شدہ مساوات سے بنائے گئے ہیں عَ، ذَ، طَ کے مساوی ہیں جو ع، ذ، ط سے بالراست مستخرج کئے گئے ہیں اور ع، ذ، ط کو متناظر طریقہ سے ابتدائی پانچ درجی سے حاصل کیا گیا ہے۔ اس لئے معلوم ہوا کہ ع ذ ط ایک مطلق ہم متغیر ہے۔ یہ آسانی سے دیکھا جاسکتا ہے کہ قانونیہ دو درجی مستخرجہ کا غیر متغیر ج ہے اور اسلئے ج میں $\text{ا}_{۰}، \text{ا}_{۱}، \ldots \text{ا}_{۴}$ کی بجائے

$$\frac{\text{جف}^{۴}\,\text{ع}}{\text{جف لا}^{۴}}،\ \frac{\text{جف}^{۴}\,\text{ع}}{\text{جف لا}^{۳}\,\text{جف ما}}،\ \ldots،\ \frac{\text{جف}^{۴}\,\text{ع}}{\text{جف ما}^{۴}}$$

مندرج کرنے سے حاصل ہوتا ہے جہاں ع دیا ہوا پانچ درجی ہے۔ یا قانونیہ وہ ہم متغیر ہے جس کا مخرج ج ہے سے $\text{ا}_{۰}، \text{ا}_{۱}، \ldots \text{ا}_{۴}$ کو $\text{ا}_{۴}، \text{ا}_{۳}، \ldots \text{ا}_{۰}$ میں بدلکر حاصل کیا جاتا ہے۔

جب کعبی ج کی ایک اصل لامتناہی ہو تو شکلوں $\text{ما} - \text{ب}_{۱}\text{لا}، \text{ما} - \text{ب}_{۲}\text{لا}، \text{ما} - \text{ب}_{۳}\text{لا}$ کا

استعمال کرکے ہم به$_1$، به$_2$، به$_3$ کے لئے ایک مساوات حاصل کرتے ہیں جسکی ایک اصل صفر ہے ۔

جب کبھی ج کی دو اصلیں مساوی ہوں یعنے به$_1$ = به$_2$ تو تین پانچویں قوتوں میں تحویل ناممکن ہے کیونکہ ب$_1$، ب$_2$، ب$_3$ کے لئے مساواتوں میں سے ہم کسی تین کو بھی پورا نہیں کرسکتے ۔ یہ اسلئے کہ ان مساواتوں میں ب$_1$، ب$_2$ صرف شکل ب$_1$ + ب$_2$ میں پائے جاتے ہیں ۔ به$_2$ = به$_1$ + صه، به$_3$ = به$_1$ + یه رکھو اور ب$_1$، ب$_2$، ب$_3$ کی قیمتیں به، صه، یه کی رقوم میں معلوم کرو اور لا − به$_1$ ما، لا − به$_2$ ما، لا − به$_3$ ما کی بجائے ع، ع − صه ما، ع − یه ما لکھو تو انتہا میں جبکہ صه = ۰ ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ پانچ درجی کو شکل ا ع^5 + دب ع^4 و + ج و^5 میں بیان کیا جاسکتا ہے ۔

نیز اگر قانونیہ کی تمام اصلیں مساوی ہوں تو ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ آخری شکل سے انتہا میں جبکہ یه = ۰ پانچ درجی کو شکل ا ع^5 + ب ع^4 و^1 میں ظاہر کیا جاسکتا ہے ۔

اگر قانونیہ متماثلاً صفر ہو جائے تو ہم ق$_0$، ق$_1$، ق$_2$ معلوم کرسکتے ہیں ایسے کہ

ق$_0$ ا$_0$ − ق$_1$ ا$_1$ + ق$_2$ ا$_2$ = ۰، ق$_0$ ا$_1$ − ق$_1$ ا$_2$ + ق$_2$ ا$_3$ = ۰

ق$_0$ ا$_2$ − ق$_1$ ا$_3$ + ق$_2$ ا$_4$ = ۰، ق$_0$ ا$_3$ − ق$_1$ ا$_4$ + ق$_2$ ا$_5$ = ۰

اور اگر ہم به$_1$، به$_2$ کو مساوات ق$_0$ + ق$_1$ ی + ق$_2$ ی^2 = ۰ کی اصلوں کے مساوی لیں تو پانچ درجی کو شکل ب$_1$(لا − به$_1$ ما)^5 + ب$_2$(لا − به$_2$ ما)^5 میں یعنی دو پانچویں قوتوں کے مجموعہ کے طور پر بیان کرسکتے ہیں ۔ اس طریقہ کو جو پانچ درجی کے لئے استعمال کیا گیا ہے عمل میں لاکر اگر ہم چار درجی کو دو چوتھی قوتوں کے مجموعہ کے طور پر ظاہر کرنے کی کوشش کریں تو

جے = ۰ حاصل ہوتا ہے۔ اور اگر ہم ششش درجی کو تین چھٹی قوتوں کے مجموعہ کے طور پر تعبیر کرنا چاہیں تو ہمیں ایک مقطع ع س کی صفیں

(ا٠، ا١، ا٢، ا٣)، (ا١، ا٢، ا٣، ا٤)، (ا٢، ا٣، ا٤، ا٥)، (ا٣، ا٤، ا٥، ا٦) ہیں (196)

صفر کے مساوی ملتا ہے۔ اور بالعموم ٢ن درجہ کے کثیر رقمی کے لئے وہ شرط کہ اسکو ن خطی تفاعلوں کے ٢ن ویں درجوں کے مجموعہ سے بیان کر سکیں ایک مقطع کے طور پر حاصل ہوتی ہے۔ ایسی تمام شرطیں متناظر کثیر رقمیوں کے غیر متغیر ہیں۔ اسکی تصدیق یوں ہو سکتی ہے کہ عام استحالہ لا = ل لاَ + م ماَ، ما = لَ لاَ + مَ ماَ کو عمل کیا جائے، متواتر استحالوں لا = عہ لا١، ما = بہ ما١، لا١ = لا٢ + جہ ما٢، ما١ = ما٢، لا٢ = لاَ، ما٢ = ماَ + ضہ لاَ کو عمل میں لایا جائے اور اس کا خیال رکھا جائے کہ اگر اوپر والی شرطوں میں سے ع کوئی شرط ہے تو

$$\text{عَ} = \text{ع}_2 = \text{ع}_1 = (\text{عہ بہ})^{\text{ک}}\ \text{ع}$$

٢٠٧ — چار درجی اور کعبی جو ایک دوسرے میں مستحیل ہو سکتے ہیں

اگر دو کثیر رقمی ع اور عَ ایک دوسرے میں مستحیل ہو سکتے ہیں تو صریحاً یہ ضروری ہے کہ متناظر غیر متغیروں ع، عَ میں رشتہ عَ = مک ع ہو جہاں ک ان کا وزن ہے اور غیر متغیروں کے ایسے ہر زوج کے لئے م وہی مستقل ہے۔ نیز یہ شرط بھی ضروری ہے کہ اگر ع کا کوئی ہم متغیر متماثلاً معدوم ہو تو عَ کا متناظر ہم متغیر بھی متماثلاً معدوم ہونا چاہئے۔ کعبیوں اور چار درجیوں کے لئے یہ شرائط کافی ہیں۔

دو کعبی۔ (١) اگر ٥ معدوم نہ ہو اور اسلئے کعبی ع کا کوئی مربع جزو ضربی نہ ہو تو گذشتہ فصل کے طریقہ سے یا جلد اول صفحہ ١٦٢ کے

طریقہ سے اور یہ مانکر کہ اِ صفر نہیں ہے عَ کو دو خطی تفاعلوں عُ، و
کے مکعبوں کے مجموعہ کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے۔ چونکہ مفروض
کی رو سے Δ معدوم نہیں ہوتا اس لئے Δَ بھی معدوم نہیں ہوتا اسلئے
عَ = عَ^{3} + وَ^{3} ۔ پس ع کو استحالہ ع = سہ عَ، و = طہ وَ یا
ع = سہ وَ، و = طہ عَ کی مدد سے (جہاں سہ^3 = طہ^3 = ۱) عَ میں مستحیل
کیا جا سکتا ہے۔

یہ دیکھا جائے کہ اگر ایک کثیر رقمی ع (لا، ما) کے لئے اِ = ۰ ہو تو
لا = لاَ اور ما = ل لاَ + ماَ رکھتے اور ل کا اس طرح انتخاب کرنے سے
کہ ع (۱، ل) معدوم نہ ہو ہم ع کو ایک ایسی شکل میں مستحیل کر سکتے ہیں
جس میں اِ معدوم نہ ہو۔ اس طرح ایک کعبی ع کو جس میں اِ معدوم
ہوتا ہو ایسے کعبی میں مستحیل کر سکتے ہیں جس میں اِ معدوم نہ ہو اور پھر
جلد اول صفحہ ۱۶۲ کے طریقہ سے اس کو دو مکعبوں کے مجموعہ کے
طور پر بیان کرتے ہیں۔ اب اگر لا = لاَ، ما = ماَ − ل لاَ رکھا جائے
تو ابتدائی کعبی دو مکعبوں کے مجموعہ کے طور پر بیان ہو جائیگا۔

(ب) اگر ھ$_{\text{لا}}$ متماثلاً معدوم ہو تو ع $\equiv$ ع^3 اور چونکہ مفروض کی
رو سے ھَ$_{\text{لا}}$ بھی متماثلاً معدوم ہوتا ہے اور اسلئے عَ = عَ^{3} پس (197)
ع = سہ عَ رکھنے سے جہاں سہ^3 = ۱ اور لا، ما اور لاَ، ماَ میں کوئی
دوسرا خطی رشتہ لینے سے ع کو عَ میں مستحیل کیا جا سکتا ہے۔

(ج) اگر Δ = ۰ اور ھ$_{\text{لا}}$ $\not\equiv$ ۰ تو ع کی شکل ع^2 و ہے اور چونکہ
Δَ = ۰، ھَ$_{\text{لا}}$ $\not\equiv$ ۰، اسلئے عَ = عَ^{2} وَ ۔ پس ع = سہ عَ، و = طہ وَ

لینے سے (جہاں $\text{سہ}^2\,\text{طہ}=1$) ع کو عَ میں مستحیل کیا جا سکتا ہے۔ کیونکہ وہ تین جماعتیں کہ ایک ہی جماعت کے تمام کعبی ایک خطی استحالہ کی مدد سے ایک دوسرے میں مستحیل ہو سکیں حسب ذیل خصوصیات سے ممتاز ہوتی ہیں (ا) $\Delta \neq 0$ ، (ب) $\text{ھ} \equiv 0$ ، (ج) $\Delta = 0$ ، $\text{ھ} \not\equiv 0$ ۔

دو چار درجی ۔ (ا) اگر $\Delta = \text{ع}^3 - 27\,\text{ج}^2 \neq 0$ اور اسلئے اگر چار درجی ع کا کوئی مربع جزو ضربی نہ ہو تو دفعہ ۱۸۳ کا طریقہ اور تقسیم استعمال کرنے سے اور یہ مان کر کہ ا معدوم نہیں ہوتا ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$4\,\frac{\text{ع}}{\text{ا}} = \frac{\text{ع}_{\text{ل}}^2-\text{و}^2}{\text{ل}-\text{م}} = \frac{1}{\text{ل}-\text{م}}\left\{\frac{4\,\text{ع}_1^2\,\text{ع}_2^2}{\text{م}-\text{ن}} - \frac{(\text{ع}_1^2+\text{ع}_2^2)^2}{\text{ل}-\text{ن}}\right\}$$

$$= \frac{1}{(\text{ن}-\text{ل})(\text{ل}-\text{م})}\left\{\text{ع}_1^4+\text{ع}_2^4 - \frac{2(2\,\text{ل}-\text{م}-\text{ن})}{\text{م}-\text{ن}}\,\text{ع}_1^2\,\text{ع}_2^2\right\}$$

$$\therefore \text{ع} = \frac{\text{ا}^3}{64(\text{غ}_3-\text{غ}_1)(\text{غ}_1-\text{غ}_2)}\left\{\text{ع}_1^4+\text{ع}_2^4 - \frac{6\,\text{غ}_1}{\text{غ}_2-\text{غ}_3}\,\text{ع}_1^2\,\text{ع}_2^2\right\}$$

اب چونکہ $\Delta' \neq 0$ ۔ اسلئے عَ کو بھی اسی طرح بیان کیا جا سکتا ہے۔ اور چونکہ مفروض کی رو سے $\text{عَ} = \text{م}^4\,\text{ع}$ ، $\text{جَ} = \text{م}^6\,\text{ج}$ اسلئے مساوات $4\,\text{غَ}^3 - \text{عَ}\,\text{غَ} + \text{جَ} = 0$ کی اصلیں مساوات $4\,\text{غ}^3 - \text{ع}\,\text{غ} + \text{ج} = 0$ کی متناظر اصلوں کو م^2 سے ضرب دینے پر حاصل ہوتی ہیں۔ اور اسلئے

$$\frac{\text{غَ}_1}{\text{غَ}_2-\text{غَ}_3} = \frac{\text{غ}_1}{\text{غ}_2-\text{غ}_3}$$

پس $\text{ع}_1 = \text{سہ}\,\text{عَ}_1$ ، $\text{ع}_2 = \text{طہ}\,\text{عَ}_2$ ، یا $\text{ع}_1 = \text{سہ}\,\text{عَ}_2$ ، $\text{ع}_2 = \text{طہ}\,\text{عَ}_1$ لینے سے جہاں $\text{سہ}^4 = \text{طہ}^4 = \frac{\text{ا}'^3}{\text{م}^2\,\text{ا}^3}$ ،

ع کو عَ میں مستحیل کیا جا سکتا ہے۔
اگر اِ یا اَ معدوم ہو تو ہم پہلے ع یا عَ کو ایسی شکل میں مستحیل کرتے ہیں جس کے لیئے اِ یا اَ معدوم نہ ہو اور پھر اوپر کا عمل کر سکتے ہیں۔
اب اگر ہم اس ترقیم کی طرف عود کریں جس میں ع، و کو (لا، ما) کے خطی تفاعلوں سے بیان کیا جاتا ہے تو ہم دیکھتے ہیں کہ تمام چار درجی جنکے لئے ع۳ - ۲۷ ج۲ ≠ ۰ شکل ع۴ + و۴ + ۶ له ع۲ و۲ میں بیان کئے جا سکتے ہیں جہاں ان تمام چار درجیوں کے لئے جن کا مطلق غیر متغیر $\frac{ع^3}{ج^2}$ وہی ہو له کی قیمت وہی رہتی ہے۔ مطلق غیر متغیر سے مراد وہ غیر متغیر ہے جو خطی استحالوں سے نہیں بدلتا۔ ایسے تمام چار درجیوں کے لئے له وہی ہوتا ہے کیونکہ اگر $\frac{ع^3}{ج^2} = \frac{عَ^3}{جَ^2}$ تو عَ = مْ ع لینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ جَ۲ = م۲ ج۲ اور اس لئے جَ = ± م۲ ج اور اگر منفی علامت واقع ہوتی ہے تو م۲ کی بجائے - م۲ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے عَ = م۲ ع اور اسلئے جَ = م۳ ج۔

(ب) اگر ه‌لا = ۰ تو ع = ع۲ اور چونکہ مفروض کی رو سے هَلا = ۰ (198)
اسلئے عَ = عَ۲ اور اس لئے ع = سه عَ رکھنے سے جہاں سه۲ = ۱ اور لا، ما، لاَ، ماَ میں کوئی اختیاری خطی رشتہ لینے سے ع کو عَ میں مستحیل کیا جا سکتا ہے۔

(ج) اگر Δ = ۰، ه‌لا ≠ ۰، تو ع کی شکل ع۲ و (۴ ب ع + ۶ ج و) ہوتی ہے۔ اس شکل کے لئے ع کی بجائے لا اور و کی بجائے ما رکھنے سے حاصل ہوتا ہے ع = ۳ ج۲، جے = - ج۳، گ‌لا = ۲ ب۲ لا۳ (ب لا + ۳ ج ما)

اسلئے اگر $\Delta = 0$، ھ $\neq 0$، ع $\neq 0$، ج $\neq 0$، گ $\neq 0$
تو ع کی شکل ء² و (۴ ب ء + ۲ ج و) ہے جہاں ب $\neq 0$، ج $\neq 0$ اور
عَ کی شکل بھی یہی ہے۔ پس ء = ل ءَ، و = م وَ لینے سے جہاں
ل³ م = بَ/ب اور ل م² = جَ/ج ہم ع کو عَ میں مستحیل کر سکتے ہیں۔

(د) اگر ع = ۰، ج = ۰، ھ $\neq$ ۰، گ $\neq$ ۰ تو
ج = ۰، ب $\neq$ ۰۔ اسلئے ع = ۴ ب ء³ و، عَ = ۴ بَ ءَ³ وَ اور
ء = ل ءَ، و = م وَ لینے سے جہاں ل³ م = بَ/ب ہم ع کو عَ میں
مستحیل کر سکتے ہیں۔

(ع) اگر Δ = ۰، ع $\neq$ ۰، ج $\neq$ ۰، ھ $\neq$ ۰، گ = ۰ تو ج $\neq$ ۰، ب = ۰
اسلئے ع = ۶ ج ء² و²، عَ = ۶ جَ ءَ² وَ² اور ء = ل ءَ، و = م وَ یا
ء = ل وَ، و = م ءَ لینے سے جہاں ل² م² = جَ/ج ہم ع کو عَ میں مستحیل
کر سکتے ہیں۔

اس طرح چار درجیوں کو پانچ جماعتوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے
اور ہر جماعت کے چار درجیوں کو خطی استحالوں کی مدد سے ایک دوسرے
میں مستحیل کیا جا سکتا ہے بشرطیکہ متناظر غیر متغیر اور ہم متغیر ان رشتوں سے
مربوط ہوں جو اس دفعہ کے شروع میں دئے گئے ہیں۔

۲۰۸ — کسی کثیر رقمی کے مطلق غیر متغیروں کی تعداد۔ اب ہم
یہ دیکھینگے کہ کسی کثیر رقمی کے مطلق غیر متغیروں کی تعداد اور
اس کے معمولی غیر متغیروں کی تعداد میں کیا ربط ہے

اور ان میں (تعدادوں) سے کسی ایک کی انتہا کہاں تک متعین کیجا سکتی ہے۔ کثیر درجی

(اِ، اِ، اِ، ... اِ) (لا، ما)ن

کو ابدال

لا = لہ لا + مہ ما، ما = لَہ لا + مَہ ما

کے ذریعہ مستحیل کیا جائے اور اسکی نئی شکل

(اُ، اُ، اُ، ... اُ) (لا، ما)ن

پر دونوں سروں کا مقابلہ کرنے سے ن + ۱ مساواتیں ملتی ہیں جن سے

اُ، اُ، ... اُ کی قیمتیں حسب ذیل طریق پر بیان ہوتی ہیں:-

اُ = (اِ، اِ، اِ، ... اِ) (لہ، لَہ)ن، ... اُ = جا(ز) / جا(ن) ∆ن-ز اُ، .... (198)

اُ = (اِ، اِ، اِ، ... اِ) (مہ، مَہ)ن

جہاں ∆ = لہ جف/جف مہ + لَہ جف/جف مَہ، جا(ز) = ۱×۲×۳×...×ز، جا(۰) = ۱

اب لہ، مہ، لَہ، مَہ کو ساقط کرنے سے نئے اور پرانے سروں کے درمیان (ن - ۳) غیر تابع رشتے ملتے ہیں اور اسلئے تعداد (ن - ۳) مطلق غیر متغیروں کے تعداد کی علوی انتہا ہے۔ لیکن اگر (لہ مَہ - لَہ مہ) کو شامل کر لیا جائے جبکہ لہ، مہ، لَہ، مَہ عمل اسقاط سے خارج کردئے جاویں تو ہمیں مساوات لہ مَہ - لَہ مہ = م کو اوپر کی (ن + ۱) مساواتوں میں شریک کرنا چاہئے اور اب اگر عمل اسقاط کی تکمیل کیجائے تو ن - ۲ غیر تابع رشتے حاصل ہوتے ہیں۔ جیسا کہ پہلی تحقیقاتوں سے پتہ چلتا ہے

ہم مان لینگے کہ یہ رشتے شکل

$$ف_{ر}(ا، ا_{۱}، ا_{۲}، \ldots، ا_{ن}) = م^{ثر} ف_{ر}(ا'، ا'_{۱}، ا'_{۲}، \ldots، ا'_{ن})، \quad (\text{دفعہ ۱۷۱})$$

میں تحویل ہو سکتے ہیں۔ اور اس لئے (ن - ۲) غیر تابع معمولی غیر متغیر $ف_{۱}، ف_{۲}، \ldots، ف_{ن-۲}$ حاصل ہوتے ہیں۔

ھ کو ساقط کرنے سے جسکا اوپر ذکر کر دیا گیا ہے ن - ۳ رشتے جو نئے اور پرانے سروں کو مربوط کرتے ہیں حاصل ہوتے ہیں اور اسلئے غیر تابع مطلق غیر متغیروں کی تعداد ن - ۳ ہے۔ یہ درست نہیں ہے کہ بالعموم ہر غیر متغیر کو غیر متغیروں $ف_{۱}، ف_{۲}، \ldots، ف_{ن-۲}$ کے ایک منطق تفاعل کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے اور اسلئے اس تحقیقات سے معمولی غیر متغیروں کی تعداد کی علوی انتہا حاصل نہیں ہوئی ہے (دیکھو نوٹ ع)۔

۲۰۹ - کثیر درجی کے نیم غیر متغیروں کی تعداد۔ ہر نیم غیر متغیر کو ا اور سروں کے ن - ا تفاعلوں کی رقوم میں جو غیر متغیر ہوں یا نیم غیر متغیر منطق طور پر بیان کیا جا سکتا ہے۔ کیونکہ مساوات

$$ع_{ن} \equiv (ا، ا_{۱}، ا_{۲}، \ldots، ا_{ن})(لا، ۱)^{ن} = ۰$$

سے دوسری رقم جدا کرنے سے نئے سر آسانی کے ساتھ ھ کی بجائے اسکی قیمت $-\frac{ا_{۱}}{ا}$ (دفعہ ۳۵) رکھنے سے حاصل ہوتے ہیں۔ اب چونکہ یہ سر، ا پر تقسیم کرنے کے بعد، اصلوں کے فرقوں کے متشاکل تفاعل ہیں اسلئے ان کو غیر متغیر، یا نیم غیر متغیر ہونا چاہئے جب ان کو ا کی ایک (200)

قوت سے ضرب دیا جائے ۔ نیز اصلوں کے فرقوں کا کوئی اور تفاعل انہی مقداروں کا ایک متشاکل تفاعل ہونا چاہئے لیکن اسکا صحیح ہونا ضروری نہیں جب اسکو $ا_۰^{ن}$ سے ضرب دیا جائے ۔ اس لئے اس تحقیقات سے غیر تابع نیم غیر متغیروں (یا ہم متغیروں) کی تعداد کی علوی انتہا نہیں ملی ۔ تاہم گارڈن (Gordan) نے یہ ثابت کیا ہے کہ کسی کثیر درجی کے نیم غیر متغیروں کی تعداد محدود ہے ۔

تمثیلاً ہم $ا_۲$ ، $ا_۳$ ، $ا_۴$ ، $ا_۵$ ، $ا_۶$ کی قیمتوں کو مختصر شکل

$$د_۲ ا = ھ ،\quad د^۲_۳ ا = گ ،\quad د^۳_۴ ا = ا_۰ ع − ۳ ھ^۲ \quad (\text{دفعہ ۳۰})$$

$$د^۳_۵ ا = ا_۰ ف − ۲ گ ھ ،$$

$$د^۵_۶ ا = ۴۵ ھ^۳ − ۱۵ ا_۰ ھ ع + ۱۰ گ^۲ + ا_۰^۲ ع_۲$$

میں لکھتے ہیں جہاں

$$ف = ا_۰^۲ ا_۵ − ۵ ا_۰ ا_۱ ا_۴ + ۲ ا_۰ ا_۲ ا_۳ − ۶ ا_۱ ا_۲^۲ + ۸ ا_۱^۲ ا_۳ ،$$

$$ع_۲ = ا_۰ ا_۶ − ۶ ا_۱ ا_۵ + ۱۵ ا_۲ ا_۴ − ۱۰ ا_۳^۲ ،$$

جہاں چھ درجی $ع_۲$ کا ایک نیم غیر متغیر ف ہے اور ایک غیر متغیر $ع_۲$ (دیکھو اشکلہ ۶ ، صفحہ ۱۶۵) ۔ پس ہم نے ثابت کر دیا کہ چھ درجی کا ہر نیم غیر متغیر شکل

$$\frac{پ}{ا_۰^{ن}} \quad (ا_۰ ، ف ، گ ، ھ ، ع ، ع_۲)$$

میں بیان کیا جا سکتا ہے جہاں پ ایک منطق صحیح تفاعل ہے ۔ اور

اس لئے ہر ہم متغیر کو ع۲ کی ایک قوت سے ضرب دینے کے بعد شکل

پا (ع۲ ، ف۱ ، گ۱ ، ھ۱ ، ع۱ ، ع۲)

میں رکھا جا سکتا ہے۔

ہم حسب ذیل اہم مشاہدہ کے ساتھ اس مضمون کو ختم کرتے ہیں:۔

جب متعدد نیم غیر متغیروں کا ایک منطق صحیح تفاعل اس طریقہ پر بنایا جاتا ہے کہ نتیجہ ا۱ سے تقسیم پذیر ہو تو ایک نیا نیم غیر متغیر حاصل ہوتا ہے جو دوسرے نیم غیر متغیروں سے مختلف متصور کیا جاتا ہے۔

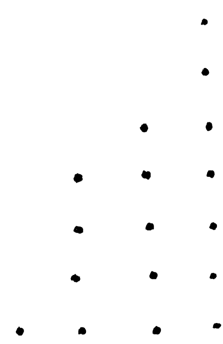
۲۱۰ — ہرمٹ کا قانون متکافیت۔ مسئلہ:۔ ن ویں درجہ کے کثیر درجی (ا۰ ، ا۱ ، ... ، ان) (لا ، ما)ن کے ہم متغیر دنکی تعداد جنکا رتبہ سروں میں ھ ہو وہی ہوتی ہے جو ھ ویں درجہ کے کثیر رقمی (ا۰ ، ا۱ ، ... ، اھ) (لا ، ما)ھ کے ہم متغیروں کی تعداد ہے جن کا رتبہ سروں میں ن ہو۔

یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ یہ مسئلہ کیلی کے اس مسئلہ پر منحصر ہے جو کسی کثیر درجی کے دیے ہوئے رتبہ اور وزن والے مختلف نیم غیر متغیروں کی تعداد سے متعلق ہے (دفعہ ۱۶۵)۔ (201)

جب ن ویں درجہ کے ایک کثیر درجی کے لئے سروں کا ایک صحیح متجانس تفاعل بنایا جائے جو رتبہ ھ اور وزن ک والی ان تمام ممکن رقموں پر مشتمل ہو جو سروں ا۰ ، ا۱ ، ا۲ ، ... ، ان میں سے بنائی جا سکتی ہیں تو یہ ثابت

ہو سکتا ہے کہ رتبہ ن اور اسی وزن ک کے متناظر جملہ میں جو صہ ویں درجہ کے ایک کثیر درجی کے لئے بنایا گیا ہو رقموں کی تعداد جو سہ ول $ا_۱ ، ا_۲ ، \ldots ، ا_ھ$ سے بنائی گئی ہوں ٹھیک وہی ہوگی ۔ اس مقصد کیلئے مسٹر فیریرس (Ferrers) نے رقم بہ رقم مستحیل کرنیکا ایک میکانیکی طریقہ استعمال کیا ہے جو ایک مخصوص مثال پر استعمال کرنے سے بہت آسانی کے ساتھ سمجھ میں آسکتا ہے :۔

فرض کرو کہ پانچ درجی کے ایک جملہ میں جو رتبہ ۸ اور وزن ۲۲ کا ہے یہ رقم $ا_۱^۲ \ ا_۲ \ ا_۳^۳ \ ا_۴ \ ا_۵$ شامل ہوتی ہے (جس کو ہم لکھتے ہیں $ا_۱ ا_۱ ا_۲ ا_۳ ا_۳ ا_۳ ا_۴ ا_۵$) اور فرض کرو کہ متواتر اجزائے ضربی کے اوزان نقطوں کے ذریعہ افقی طور پر اس طرح ترتیب دئے گئے ہیں :۔



اب اگر نقطوں کو افقی ترتیب میں شمار کرنے کی بجائے انتصابی ترتیب پر شمار کیا جائے تو ہمیں یہ رقم $ا_۸ \ ا_۶ \ ا_۵ \ ا_۲ \ ا_۱$ ملتی ہے جسکا رتبہ ۵ اور وزن ۲۲ ہے ۔ یہ ظاہر ہے کہ اس طور پر ایک دوسرے سے

اخذ کردہ دو ارقام ہمیشہ مساوی وزن کی ہونگی کیونکہ دونوں صورتوں میں شمار کردہ نقطوں کی تعداد وہی ہے۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ پانچ درجی کے سروں سے اخذ کردہ رتبہ ۸ اور وزن ۲۲ کی کسی رقم کے جواب میں رتبہ ۵ اور وزن ۲۲ کی ایک رقم ہے جو اسی طرح آٹھ درجی کے سروں سے حاصل ہوتی ہے۔ اسلئے کسی ایک تفاعل کی ہر رقم کے جواب میں دوسرے تفاعل کی ایک متناظر رقم موجود ہوتی ہے اور اگر رقموں کی ایک فہرست مکمل ہو تو اس سے اخذ کردہ فہرست بھی مکمل ہونی چاہئے
اس استحالہ کو استعمال کرتے ہیں یہ دیکھنا ضروری ہے کہ جس قسم کا
استحالہ کیا جا رہا ہے اگر اسمیں متناظر کثیر درجی کا وہ سر شامل نہیں ہے (202)
جسکا لاحقہ بڑے سے بڑا ہے تو ماخوذ رقم کا رتبہ گھٹا ہوا ہوگا اور جزو ضربی ا کو مناسب قوت نما کے ساتھ لگانا چاہئے کہ اس سے وزن پر کوئی اثر نہیں پڑیگا۔ اب چونکہ اس طور پر ایک دوسرے سے اخذ ہونیوالے جملوں میں رقموں کی تعداد ایک ہی ہوتی ہے اسلئے ہم اس نتیجہ کو ترقیم

ن (ھ، ک، ن) = ن (ن، ک، ھ)

سے تعبیر کر سکتے ہیں۔ یہ ان متشابہ تفاعلوں کیلئے بھی درست ہے جنکا وزن ہر صورت میں بقدر ایک کے کم ہے۔ اس لئے

ن (ھ، ک، ن) - ن (ھ، ک - ۱، ن)

= ن (ن، ک، ھ) - ن (ن، ک - ۱، ھ)

جس سے کیلی کے مسئلہ کی رو سے (صفحہ ۱۶۸) یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ رتبہ ھ اور وزن ک کے نیم غیر متغیروں کی تعداد جو سروں ا۰، ا۱، ا۲، ... ان میں سے بنائے جا سکتے ہیں اُس تعداد کے مساوی ہے جو رتبہ ن اور وزن ک کے نیم غیر متغیروں کی ہے جو سروں ا۰، ا۱، ا۲، ... اھ میں سے بنائے جا سکتے ہیں۔

ہرمٹ کا مسئلہ ہم متغیروں کے لئے فوراً اخذ کیا جا سکتا ہے کیونکہ متناظر نیم غیر متغیروں کو ہم متغیروں کے صدر سروں کے طور پر لیا جا سکتا ہے اور اس کے علاوہ چونکہ ن ھ - ۲ ک = ھ ن - ۲ ک اس لئے دو متناظر ہم متغیروں کے درجے مساوی ہوتے ہیں۔ نیز مخصوص صورت کے طور پر ہم دیکھتے ہیں کہ ایک کثیر درجی کے ایک غیر متغیر کے جواب میں دوسرے کثیر درجی کا ایک غیر متغیر ہوتا ہے۔

مثالیں

(۱) بتاؤ کہ اُن رقموں سے جو صرف حرفی سروں کے ساتھ لکھی گئی ہیں جو کعبی کے حاصل استقاط میں واقع ہوتے ہیں متذکرہ بالا استحالہ کے ذریعہ چار درجی کے کعبی غیر متغیر کی حرفی ارقام ملتی ہیں۔

(۲) مثال ۴ صفحہ ۱۶۵ کے پانچ درجی کے نیم غیر متغیر سے کعبی کے متناظر نیم غیر متغیر کی حرفی ارقام اخذ کرو اور بتاؤ کہ قبل الذکر کے پانچ درجی ہم متغیر کے جواب میں کعبی کے ھ۱۱ اور گ۱۱ کا حاصل ضرب ہے۔

(۳) ثابت کرو کہ صرف درجہ ۲ م کے کثیر درجی سروں میں دوسرے رتبہ کے غیر متغیر رکھتے ہیں۔

کیونکہ دو درجی کے غیر متغیر صرف اس نمونہ Δم کے ہوتے ہیں جن کا رتبہ سروں میں ۲ م ہے۔ یہاں Δ ممیز کو تعبیر کرتا ہے۔

۲۱۱ ــ متکافی اور قائم خطی استحالہ۔ ضد متغیر۔

جب ایک نقطہ کے محدد خطی استحالہ سے تحویل کئے جاتے ہیں تو ایک خط کے (203)
مماسی محدد اور عامل علامتیں جف/جف لا ، جف/جف ما ، جف/جف ی دونوں ایک ہی

نئے خطی استحالہ سے مستحیل ہو جاتے ہیں۔ اس استحالہ کو پہلے استحالہ کا متکافی کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ خطی استحالہ

$$\left.\begin{aligned} \text{لا} &= \text{ا}_1\,\text{لا} + \text{ب}_1\,\text{ما} + \text{ج}_1\,\text{ے} ، \\ \text{ما} &= \text{ا}_2\,\text{لا} + \text{ب}_2\,\text{ما} + \text{ج}_2\,\text{ے} ، \\ \text{ی} &= \text{ا}_3\,\text{لا} + \text{ب}_3\,\text{ما} + \text{ج}_3\,\text{ے} ، \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ہے پس کوئی خط $\text{لہ}\,\text{لا} + \text{مہ}\,\text{ما} + \text{نہ}\,\text{ی}$ استحالہ کے بعد $\text{ل}\,\text{لا} + \text{م}\,\text{ما} + \text{ن}\,\text{ے}$ ہو جاتا ہے جہاں

$$\left.\begin{aligned} \text{ل} &= \text{ا}_1\,\text{لہ} + \text{ا}_2\,\text{مہ} + \text{ا}_3\,\text{نہ} ، \\ \text{م} &= \text{ب}_1\,\text{لہ} + \text{ب}_2\,\text{مہ} + \text{ب}_3\,\text{نہ} ، \\ \text{ن} &= \text{ج}_1\,\text{لہ} + \text{ج}_2\,\text{مہ} + \text{ج}_3\,\text{نہ} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

نیز $\dfrac{\text{جف}}{\text{جف لا}} = \dfrac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\,\dfrac{\text{جف لا}}{\text{جف لا}} + \dfrac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\,\dfrac{\text{جف ما}}{\text{جف لا}} + \dfrac{\text{جف}}{\text{جف ی}}\,\dfrac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$

یا $\dfrac{\text{جف لا}}{\text{جف لا}}$ ، $\dfrac{\text{جف ما}}{\text{جف لا}}$ ، $\dfrac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$ کی بجائے انکی قیمتیں درج کرنے سے

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} = \text{ا}_1\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{ا}_2\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}} + \text{ا}_3\frac{\text{جف}}{\text{جف ی}} ،$$

اور اسی طرح
$$\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}} = \text{ب}_1\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{ب}_2\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}} + \text{ب}_3\frac{\text{جف}}{\text{جف ی}} ،$$

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف ے}} = \text{ج}_1\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{ج}_2\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}} + \text{ج}_3\frac{\text{جف}}{\text{جف ی}}$$

پس ل′، م′، ن′ اور علامتیں $\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}$ ، $\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}$ ، $\frac{\text{جف}}{\text{جف ی}}$ استحالہ کے اُن ہی قوانین کی پابندی کرتے ہیں اور اس لئے ل′، م′، ن′ اور $\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}$ ، $\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}$ ، $\frac{\text{جف}}{\text{جف ی}}$ بھی۔ دراصل مساواتوں (۲) سے یہ استحالہ ہے

$$\Delta\, \text{ل}' = \text{ا}'_1\, \text{ل} + \text{ب}'_1\, \text{م} + \text{ج}'_1\, \text{ن} ،$$

$$\Delta\, \text{م}' = \text{ا}'_2\, \text{ل} + \text{ب}'_2\, \text{م} + \text{ج}'_2\, \text{ن} ،$$

$$\Delta\, \text{ن}' = \text{ا}'_3\, \text{ل} + \text{ب}'_3\, \text{م} + \text{ج}'_3\, \text{ن} ،$$

جہاں $\Delta = (\text{ا}_1\, \text{ب}_2\, \text{ج}_3)$ ، $\text{ا}'_1 = \frac{\text{جف}\,\Delta}{\text{جف}\,\text{ا}_1}$ ، $\text{ب}'_1 = \frac{\text{جف}\,\Delta}{\text{جف}\,\text{ب}_1}$ وغیرہ وغیرہ

اس استحالہ کو استحالہ (۱) کا متکافی کہتے ہیں۔ اِسکا مقیاس Δ ہے اور اسکے سر ہیں (204)

$$\frac{1}{\Delta}\,\frac{\text{جف}\,\Delta}{\text{جف}\,\text{ا}_1} ، \quad \frac{1}{\Delta}\,\frac{\text{جف}\,\Delta}{\text{جف}\,\text{ب}_1} ، \quad \frac{1}{\Delta}\,\frac{\text{جف}\,\Delta}{\text{جف}\,\text{ج}_1} ، \quad \text{وغیرہ}$$

متغیروں لا، ما، ی اور $\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}$ ، $\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}$ ، $\frac{\text{جف}}{\text{جف ی}}$ کو ایک دوسرے کا ضد کہتے ہیں کیونکہ لا، ما، ی کے ایک خطی استحالہ سے علامتوں $\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}$ ، $\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}$ ، $\frac{\text{جف}}{\text{جف ی}}$ کا ایک خطی استحالہ حاصل ہوتا ہے جو اگرچہ وہی نہیں ہے لیکن متذکرہ بالا طریقہ پر پہلے استحالہ کے ساتھ مربوط ہوتا ہے۔

اب ہم "قائم" استحالہ کی تعریف کرتے ہیں۔ اگر مندرجۂ بالا مساواتوں (۱)

(۱) میں سروں کے درمیان روابط

$$\text{ا}_1^2+\text{ا}_2^2+\text{ا}_3^2=1\text{ ، }\text{ب}_1^2+\text{ب}_2^2+\text{ب}_3^2=1\text{ ، }\text{ج}_1^2+\text{ج}_2^2+\text{ج}_3^2=1\text{ ،}$$

$$\text{ا}_1\text{ب}_1+\text{ا}_2\text{ب}_2+\text{ا}_3\text{ب}_3=0\text{ ، }\text{ا}_1\text{ج}_1+\text{ا}_2\text{ج}_2+\text{ا}_3\text{ج}_3=0\text{ ، }\text{ب}_1\text{ج}_1+\text{ب}_2\text{ج}_2+\text{ب}_3\text{ج}_3=0$$

ہوں تو استحالہ کو "قائم" کہا جاتا ہے۔ مثلاً یہ شرطیں ان سمتی جیوب التمام سے پوری ہوتی ہیں جو علم ہندسۂ مجسمات میں قائم محوروں کے دو مختلف جٹوں کے لحاظ سے ایک نقطہ کے محددوں کے درمیانی رشتوں میں شامل ہوتی ہیں۔ ایسے کسی استحالہ میں ظاہر ہے کہ ربط

$$\text{لا}^2+\text{ما}^2+\text{ی}^2=\text{لا}^2+\text{ما}^2+\text{ے}^2$$

حاصل ہونا چاہیئے اور نئے متغیر پرانے متغیروں کی رقوم میں یوں بیان ہونے چاہئیں :-

$$\text{لا}=\text{ا}_1\text{لا}+\text{ا}_2\text{ما}+\text{ا}_3\text{ی}\text{ ، }\text{ما}=\text{ب}_1\text{لا}+\text{ب}_2\text{ما}+\text{ب}_3\text{ی}\text{ ، }\text{ے}=\text{ج}_1\text{لا}+\text{ج}_2\text{ما}+\text{ج}_3\text{ی}$$

نیز اگر استحالہ کے مقیاس کو ایک منقطع کے طور پر لکھکر اس کا مربع لیا جائے تو صدر وتر کا ہر عنصر اکائی کے مساوی ہے اور باقی سب عناصر معدوم ہوتے ہیں۔

جب، لا، ما، ی کے ایک کثیر درجی کو ستحیل کیا جاتا ہے تو کوئی تفاعل جس میں ابتدائی کثیر درجی کے سر شامل ہوں اور ان کے ساتھ دوسرے متغیر بھی جو متذکرۂ بالا استکافی ابدال سے حاصل ہوے ہوں داخل ہوں ضد متغیر کہلاتا ہے اگر یہ تفاعل استحالہ شدہ سروں اور متغیروں کے متناظر تفاعل سے صرف استحالہ کے مقیاس کی ایک قوت سے متفاوت ہو۔ مثلاً وہ شرط کہ ایک خط له لا + سه ما + نه ی ایک مخروطی کو مس کرے ضد متغیر ہے جبکہ مخروطی کی مساوات سہ خطی محددوں میں دی گئی ہو۔ (205)

ضد متغیروں کا نظریہ غیر متغیروں کے نظریہ میں شامل کیا جا سکتا ہے اگر دئے ہوئے کثیر درجی اور خط لہ لا + مہ ما + نہ ی سے ترکیب یافتہ مجموعہ نظام پر غور کیا جائے۔ مثلاً دفعہ ۵۰۷ کے مسئلہ ۳ میں اگر ہم لا ماَ - لاَ ما کی بجائے لا لہ + ما مہ + ی نہ رکھیں اور ع سے لا، ما، ی کے ایک کثیر رقمی کو تعبیر کریں تو اس دفعہ میں دئے ہوئے طریقہ سے ضد متغیر حاصل ہوتے ہیں جنکو (Evectants) کہا جاتا ہے۔

یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ ثنائی کثیر رقمیوں کے لئے ضد متغیروں اور ہم متغیروں کا مختلف ہونا ضروری نہیں ہے۔ کیونکہ لا، مہ کی بجائے علی الترتیب لا، - ما رکھنے سے ضد متغیر کو ہم متغیر میں تبدیل کیا جا سکتا ہے اور اسی طرح اس کے برعکس جیسا کہ ہم اکثر استعمال کر چکے ہیں ہم متغیر میں لا، ما کی بجائے علی الترتیب $\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}$ اور $\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}$ رکھکر اسکو ضد متغیر میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔

ن متغیروں کے متعلق مسائل پر بحث کرنے میں آسانی کی خاطر ہم یہ قرارداد اختیار کرتے ہیں کہ اگر کسی حاصل ضرب میں کوئی لاحقہ دو مرتبہ واقع ہو تو حاصل ضرب کو لاحقہ کی اس ۱ سے ن تک تمام قیمتوں کے لئے جمع کرنا چاہئے۔ مثلاً اس استحالہ کو جو $\text{لا}_1, \text{لا}_2 \ldots \text{لا}_\text{ن}$ کو $\bar{\text{لا}}_1, \bar{\text{لا}}_2 \ldots \bar{\text{لا}}_\text{ن}$ میں مستحیل کرتا ہے بیان کرنے کے لئے ہم لکھتے ہیں $\text{لا}_\text{ع} = \text{ل}_{\text{ع}\text{ہ}}\, \bar{\text{لا}}_\text{ہ}$ جہاں چونکہ ہ دو مرتبہ واقع ہوتا ہے اسلئے $\text{لا}_\text{ع} = \text{ل}_{\text{ع}\text{ہ}}\, \bar{\text{لا}}_\text{ہ}$ کے معنی یہ ہیں کہ

$$\text{لا}_\text{ع} = \text{ل}_{\text{ع}1}\, \bar{\text{لا}}_1 + \text{ل}_{\text{ع}2}\, \bar{\text{لا}}_2 + \text{ل}_{\text{ع}3}\, \bar{\text{لا}}_3 + \ldots + \text{ل}_{\text{ع}\text{ن}}\, \bar{\text{لا}}_\text{ن}$$

اگر مقطع $|\text{ل}_{\text{ع}\text{ہ}}|$ میں جس کو استحالہ کا مقیاس م کہتے ہیں

$ل_{عہ\,بہ} = \frac{ل_{بہ\,عہ}\ \text{کا صغیر مقطع}}{م}$، تو معکوس ابدال کو $لا_{عہ}' = ل_{عہ\,بہ}\, لا_{بہ}$ سے بیان کیا جاتا ہے۔ وہ شرط کہ استحالہ قائم ہو $ل_{عہ\,بہ}\, ل_{عہ\,جہ} = ۰$ ہے اگر بہ $\neq$ جہ لیکن اگر بہ = جہ تو شرط ہے $ل_{عہ\,بہ}\, ل_{عہ\,جہ} = ۱$۔ پس ایک قائم استحالہ میں

$لا_{عہ}'\, لا_{عہ}' = ل_{عہ\,بہ}\, لا_{بہ}\, ل_{عہ\,جہ}\, لا_{جہ}$ جہاں عہ، بہ، جہ تینوں کو ۱ سے ن تک تمام قیمتوں کے لئے جمع کیا جاتا ہے اگر بہ، جہ کو مستقل رکھا جائے اور عہ کے لحاظ سے جمع کیا جائے تو $ل_{عہ\,بہ}\, ل_{عہ\,جہ} = ۰$ بشرطیکہ بہ $\neq$ جہ اور = ۱ بشرطیکہ بہ = جہ۔ پس $لا_{عہ}'\, لا_{عہ}' = لا_{بہ}\, لا_{بہ}$۔ مزید برآں ایک قائم استحالہ میں اگر

$لا_{عہ}' = ل_{عہ\,بہ}\, لا_{بہ}$ کو $ل_{عہ\,جہ}$ سے ضرب دیا جائے اور حاصل کا مجموعہ لیا جائے تو حاصل ہوتا ہے $ل_{عہ\,جہ}\, لا_{عہ}' = ل_{عہ\,بہ}\, ل_{عہ\,جہ}\, لا_{بہ} = لا_{جہ}$ اسلئے $ل_{عہ\,جہ} = ل'_{جہ\,عہ}$

عام استحالہ میں اگر $ط_{عہ}$ سے مماسی متغیر کو تعبیر کریں اور اس لئے

$ط_{عہ}\, لا_{عہ} = ط_{عہ}'\, لا_{عہ}'$ تو $ط_{عہ}'\, لا_{عہ}' = ط_{عہ}'\, ل_{عہ\,بہ}\, لا_{بہ} = ط_{بہ}\, لا_{بہ}$ اور اسلئے $ط_{بہ} = ل_{عہ\,بہ}\, ط_{عہ}'$ سے متکافی استحالہ حاصل ہوتا ہے۔ نیز $\frac{جف}{جف\, لا_{عہ}'} = ل_{بہ\,عہ} \frac{جف}{جف\, لا_{بہ}}$ اس لئے $\frac{جف}{جف\, لا_{عہ}}$، $ط_{عہ}$ ایک ہی خطی استحالہ کے تحت ہیں۔ ایک قائم استحالہ میں

طہ، طہ، ...... طہ اور متغیر لا، لا، ...... لا ایک ہی خطی استحالہ کے تحت آتے ہیں - (Cogredient)

اب ہم جانتے ہیں کہ ا عہ بہ لا عہ لا بہ جہاں ا عہ بہ = ا بہ عہ ہے دوسرے درجہ کا ایک متجانس تفاعل ہے اور اس کا ممیز ∆ مقطع (ا عہ بہ) ہے اگر ہم اسکو اوپر کے عام خطی استحالہ کی مدد سے تبدیل کریں تو

ا عہ بہ لا عہ لا بہ = ا عہ بہ ل عہ جہ ل بہ ضہ لاَ جہ لاَ ضہ ، اسلئے اَ جہ ضہ = ا عہ بہ ل عہ جہ ل بہ ضہ

لیکن ہمیں معلوم ہے کہ اگر صفوں کو صفوں سے ضرب دیں تو دو مقطعوں (ب عہ بہ)، (ج عہ بہ) کا حاصل ضرب (ب عہ جہ ج بہ جہ) ہے یا اگر ستونوں کو ستونوں سے ضرب دیں تو یہ حاصل ضرب (ب جہ عہ ج جہ بہ) ہے یا اگر (ب عہ بہ) کی صفوں کو (ج عہ بہ) کی صفوں سے صفوں کو ستونوں میں بدلنے کے بعد ضرب دیں تو حاصل ضرب (ب عہ جہ ج جہ بہ) ہے - پس

(206) ∆ = (اَ جہ ضہ) = (ا عہ بہ ل عہ جہ × ل بہ ضہ) = (ا عہ بہ ل عہ جہ) × (ل بہ ضہ) جہاں بہ کو جمع نہیں کیا گیا ہے

= (ا عہ بہ) (ل عہ جہ) (ل بہ ضہ) جہاں عہ اور بہ کو جمع نہیں کیا گیا ہے

= ∆ م²

اسی طرح ان مقسوں میں تیسرے درجہ کے متجانس تفاعل کو ا عہ بہ جہ لا عہ لا بہ لا جہ سے

بیان کیا جا سکتا ہے جہاں یہ مان لیا گیا ہے کہ عہ بہ جہ کی مختلف ترتیبوں سے $\text{ا}_{\text{عہ بہ جہ}}$ کی جتنی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں سب مساوی ہیں۔

اسی طرح چوتھے درجہ کا $\text{ع}_{۴} = \text{ا}_{\text{عہ بہ جہ ضہ}}\,\text{لا}_{\text{عہ}}\,\text{لا}_{\text{بہ}}\,\text{لا}_{\text{جہ}}\,\text{لا}_{\text{ضہ}}$ ، جہاں عہ بہ جہ ضہ کی مختلف ترتیبوں سے $\text{ا}_{\text{عہ بہ جہ ضہ}}$ کی جتنی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں سب مساوی ہیں۔

اب $\dfrac{\text{جف}\,\text{ع}_{۴}}{\text{جف}\,\text{لا}_{۴}}$ معلوم کرنے کے لئے ہمیں دیکھنا چاہئے کہ چونکہ عہ، بہ، جہ، ضہ کو ا سے ن تک تمام قیمتوں کے لئے جمع کرنا پڑتا ہے اسلئے $\text{ا}_{\text{عہ بہ جہ ضہ}}$ میں ہر لاحقہ کی جگہ پر عہ واقع ہوگا۔ مثلاً

$$\frac{\text{جف}\,\text{ع}_{۴}}{\text{جف}\,\text{لا}_{\text{عہ}}} = \text{ا}_{\text{عہ بہ جہ ضہ}}\,\text{لا}_{\text{بہ}}\,\text{لا}_{\text{جہ}}\,\text{لا}_{\text{ضہ}} + \text{ا}_{\text{بہ عہ جہ ضہ}}\,\text{لا}_{\text{بہ}}\,\text{لا}_{\text{جہ}}\,\text{لا}_{\text{ضہ}}$$

$$+\,\text{ا}_{\text{بہ جہ عہ ضہ}}\,\text{لا}_{\text{بہ}}\,\text{لا}_{\text{جہ}}\,\text{لا}_{\text{ضہ}} + \text{ا}_{\text{بہ جہ ضہ عہ}}\,\text{لا}_{\text{بہ}}\,\text{لا}_{\text{جہ}}\,\text{لا}_{\text{ضہ}}$$

$$= ۴\,\text{ا}_{\text{عہ بہ جہ ضہ}}\,\text{لا}_{\text{بہ}}\,\text{لا}_{\text{جہ}}\,\text{لا}_{\text{ضہ}}$$

اسی طرح

$$\frac{\text{جف}^{۲}\,\text{ع}_{۴}}{\text{جف}\,\text{لا}_{\text{عہ}}\,\text{جف}\,\text{لا}_{\text{بہ}}} = ۴\times۳\,\text{ا}_{\text{عہ بہ جہ ضہ}}\,\text{لا}_{\text{جہ}}\,\text{لا}_{\text{ضہ}}$$

$$\frac{\text{جف}^{۳}\,\text{ع}_{۴}}{\text{جف}\,\text{لا}_{\text{عہ}}\,\text{جف}\,\text{لا}_{\text{بہ}}\,\text{جف}\,\text{لا}_{\text{جہ}}} = ۴\cdot۳\cdot۲\,\text{ا}_{\text{عہ بہ جہ ضہ}}\,\text{لا}_{\text{ضہ}}$$

$$\frac{\text{جف}^{۴}\,\text{ع}_{۴}}{\text{جف}\,\text{لا}_{\text{عہ}}\,\text{جف}\,\text{لا}_{\text{بہ}}\,\text{جف}\,\text{لا}_{\text{جہ}}\,\text{جف}\,\text{لا}_{\text{ضہ}}} = \underline{|۴}\;\text{ا}_{\text{عہ بہ جہ ضہ}}$$

علیٰ ہٰذا القیاس ن متغیروں کے اور اعلیٰ درجوں کے کثیر رقمیوں کیلئے۔

متفرق مثالیں

۱۔ طاق درجہ کا ہر کثیر درجی سروں میں دوسرے رتبہ کا ایک دو درجی ہم متغیر رکھتا ہے۔

کیونکہ جفت درجہ ۲م کا ہر کثیر درجی سروں میں دوسرے رتبہ کا ایک غیر متغیر رکھتا ہے (دفعہ ۱۷۷) جسکو شکل ع عف(۶) یا (۱، ۲)ن ع ع میں لکھا جاسکتا ہے اور جفت درجہ کے کثیر درجی کا یہ غیر متغیر ایک ایسے کثیر درجی کا نیم غیر متغیر ہوگا جسکا درجہ ۲م + ۱ ≡ ن ہے۔ اسلئے وہ ہم متغیر جس کا فائق سر یہ نیم غیر متغیر ہے دو درجی ہوگا کیونکہ ن ھ − ۲ک ≡ ۲ جہاں ک ≡ ن − ۱ اور ھ ≡ ۲۔

۲۔ طاق درجہ (۲م + ۱ ≡ ن) کا ہر کثیر درجی سروں میں درجہ ن کا ایک خطی ہم متغیر رکھتا ہے جب کہ ن، ۳ سے بڑا ہو۔

کیونکہ اگر پچھلی مثال کا دو درجی ہم متغیر ع (لا، ما)۲ ہو تو

$$ع_{عف}^{م} (۶) ≡ ل_۰ لا + ل_۱ ما،$$

یہ ایک خطی ہم متغیر ہے جسمیں ل۰ اور ل۱ کا رتبہ ن ہے۔ یہاں یہ مان لیا گیا ہے کہ ل۰ اور ل۱ متماثلاً صفر نہیں ہیں جیسا کہ وہ کبھی کبھی کی صورت میں ہو جاتے ہیں۔

۳۔ طاق درجہ کا ہر کثیر درجی سروں میں چوتھے رتبہ کا ایک غیر متغیر شکل ا ن۲ + ۲ ب ن + ج کا رکھتا ہے۔

ع (لا، ما)۲ کا ممیز مطلوبہ غیر متغیر ہے۔

۴ ـ طاق درجہ ن کا ہر کثیر درجی سروں میں چوتھے رتبہ کا ایک نیم غیر متغیر رکھتا ہے جو ن ویں درجہ کے ہم متغیر کا فائق سر ہے ۔

کیونکہ پچھلی مثال میں حاصل کردہ ممیز کو ن کے لحاظ سے تفرق کیا جائے تو حاصل ہونیوالے نیم غیر متغیر کے لئے ھ = ۳، ک = ن اور اسی لئے غ = ن ھ ـ ۲ ک = ن اور یہ اس ہم متغیر کا درجہ ہے جسکا فائق سر

$$\frac{\text{جف}\ \triangle}{\text{جف}\ \text{ا}_\text{ن}}$$ ہے ۔

طاق کثیر درجیوں کے لئے اس طریقہ سے حاصل ہونیوالے نیم غیر متغیروں کا سلسلہ اہم ہے کیونکہ سروں میں رتبہ بہت کم ہوتا ہے ۔

(207) ۵ ـ درجہ ۴ م کے کثیر درجی سروں میں چوتھے درجے کے غیر متغیر رکھتے ہیں ۔

کیونکہ کبھی کے غیر متغیر اس نمونہ $\triangle^{م}$ کے ہوتے ہیں جنکا رتبہ سروں میں ۴ م ہے جہاں $\triangle$ ممیز ہے ۔ یہ اور اس کے بعد کی چار مثالیں ہر سٹ کے قانون تشاکلیت کے نتائج صریح ہیں (دفعہ ۲۱۰) ۔

۶ ـ درجہ م کے کثیر درجی چوتھے رتبے کے اتنے ہی غیر متغیر رکھتے ہیں جتنے کل مساوات ۲ ف + ۳ ق = م کے مثبت صحیح عددوں میں ہیں مثلاً پانچ درجی کا ایک غیر متغیر ہوتا ہے، چھہ درجی کے دو، سات درجی کا ایک، آٹھہ درجی کے دو، وقس علیٰ ہذا ۔

کیونکہ کثیر درجیوں کے غیر متغیر اس نمونہ $ع^{ف}\ ج^{ق}$ کے ہوتے ہیں جسکا رتبہ سروں میں ۲ ف + ۳ ق = م ہے ۔

۷ ـ درجہ ۲ ف + ق کا ہر کثیر درجی سروں میں دوسرے رتبہ کا ایک ہم متغیر رکھتا ہے ۔ بالخصوص جب، ق = ۱ تو طاق درجہ کا ہر کثیر درجی سروں میں دوسرے رتبہ کا ایک دو درجی ہم متغیر رکھتا ہے (مقابلہ کرو مثال ۱ کے ساتھ) ۔

کیونکہ دو درجیوں کے ہم متغیر اس نمونہ $\triangle^{ف}\ ع_{۲}^{ق}$ کے ہوتے ہیں جو سروں میں ۲ ف + ق رتبہ کا ہے ۔

۸ — ۳ سے بڑے طاق درجہ کا ہر ثنائی کثیر درجی سروں میں پانچویں رتبہ کا ایک خطی ہم متغیر رکھتا ہے۔

کیونکہ پانچ درجی کا ایک غیر متغیر، چوتھے رتبہ کا، ع_4 ہے جو $\text{ع}_{\text{لا}}$ کا ممیز ہے، نیز اس پانچ درجی کے دو ہم متغیر پانچویں اور ساتویں رتبوں کے ہیں یعنی $\text{ل}_{\text{لا}}$ (مثال ۲) اور $\text{م}_{\text{لا}} = \text{ل}_{\text{عف}}\,\text{ع}_{\text{لا}}$۔ ان سے ہم رتبہ ۴ف + ۱ کا ہم متغیر $\text{ع}_4^{\text{ف}-1}\,\text{ل}_{\text{لا}}$ اور رتبہ ۴ف - ۱ کا ہم متغیر $\text{ع}_4^{\text{ف}-2}\,\text{م}_{\text{لا}}$ بناتے ہیں لیکن ہر طاق عدد کی شکل ۴پ ± ۱ ہے۔ (ہرمٹ)

۹ — درجہ ۴ف + ۲ کا ہر کثیر درجی سروں میں تیسرے رتبہ کا ایک دو درجی ہم متغیر رکھتا ہے۔

کیونکہ کعبی کا ایک دو درجی ہم متغیر اس نمونہ $\Delta^{\text{ف}}\,\text{ھ}_{\text{لا}}$ کا ہے جس کا رتبہ سروں میں ۴ف + ۲ ہے۔

۱۰ — جب پانچ درجی $(\text{ا}_0، \text{ا}_1، \text{ا}_2، \text{ا}_3، \text{ا}_4، \text{ا}_5)(\text{لا}، \text{ما})^5$ میں ایک تہرا جزو ضربی ہو تو ثابت کرو کہ ہم متغیر $\text{ع}_{\text{لا}}$ ایک کامل مربع ہے اور ہم متغیر $\text{ج}_{\text{لا}}$ ایک کامل مکعب۔ دونوں صورتوں میں پانچ درجی کا تہرا جزو ضربی خطی جزو ضربی ہے۔

۱۱ — جب پانچ درجی کے دو دوہرے جزو ضربی ہوں تو بقیہ جزو ضربی، $\text{ج}_{\text{لا}}$ کا ایک واحد جزو ضربی ہے۔

۱۲ — اگر $\text{ع}_{\text{ن}} \equiv (\text{ا}_0، \text{ا}_1، \text{ا}_2، \ldots، \text{ا}_{\text{ن}})(\text{لا}، \text{ما})^{\text{ن}}$ تو ثابت کرو کہ

$\text{ع}_{\text{لا}}$ اور نیز ہم متغیر $\text{گ}_{\text{لا}}$ کا حاصل اسقاط، ع کے ممیز کا مکعب ہے یعنی

ی(ع، گ$_{لا}$) = ۲ Δ^{۳} (ع$_{لا}$) اور ثابت کرو کہ ی(ع، ھ$_{لا}$) = ک ۸^{۲} (ع$_{لا}$)۔
نیز ھ$_{لا}$ اور گ$_{لا}$ کو نیم ہم متغیروں ع$_{۱}$، ع$_{۲}$، ... ع$_{ن-۱}$، ع، ع کی رقوم میں بیان کرو۔

۱۳۔ دو کعبیوں کے اجتماعیہ کو دوسرے غیر متغیروں کی رقوم میں بیان کرو۔

جواب:۔ ف^{۲} = ۱۶ ع$_{۳۱}$ - ۴ ع$_{۲۲}$ = فہ + ۲۴ ع$_{۴۲}$

جہاں ع$_{۱۱}$، ع$_{۲۱}$ ... وغیرہ دفعہ ۱۹۲ کے تین حیسویوں کے غیر متغیر ہیں۔

۱۴۔ جب پانچ درجی میں ایک تہری اصل ہو تو اصلوں کے حسب ذیل متشاکل تفاعل معدوم ہوتے ہیں:۔

Σ (عہ$_{۱}$ - عہ$_{۲}$)^{۲} ▽ (عہ$_{۳}$، عہ$_{۴}$، عہ$_{۵}$) Σ (عہ$_{۱}$ - عہ$_{۲}$)^{۴} ▽ (عہ$_{۳}$، عہ$_{۴}$، عہ$_{۵}$)

(208) ۱۵۔ لا، ما میں دئے ہوئے دو دو درجی ع اور و ذیل کی شکلوں

(۱) ا ع^{۲} + ب و^{۲}، اَ ع^{۲} + بَ و^{۲}، (۲) ع ط، ع و، (۳) ع ≡ ک و

میں بیان ہو سکتے ہیں جہاں ع، و، ط خطی تفاعل ہیں لا اور ما کے۔

ع ≡ ا$_{۰}$ لا^{۲} + ۲ ب$_{۱}$ لا ما + ا$_{۲}$ ما^{۲} ≡ ا (لا - عہ ما)^{۲} + ب (لا - بہ ما)^{۲}

و ≡ ب$_{۰}$ لا^{۲} + ۲ ب$_{۱}$ لا ما + ب$_{۲}$ ما^{۲} ≡ اَ (لا - عہ ما)^{۲} + بَ (لا - بہ ما)^{۲}

رکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

ا$_{۰}$ = ا + ب، ب$_{۰}$ = اَ + بَ

- ا$_{۱}$ = ا عہ + ب بہ، - ب$_{۱}$ = اَ عہ + بَ بہ (۱)

ا$_{۲}$ = ا عہ^{۲} + ب بہ^{۲}، ب$_{۲}$ = اَ عہ^{۲} + بَ بہ^{۲}

اگر عہ، بہ مساوات ف لا^2 + ق لا ما + ر ما^2 = ۰ کی اصلیں ہیں تو

ف ا$_2$ − ق ا$_1$ + ر ا$_0$ = ۰، ف ب$_2$ − ق ب$_1$ + ر ب$_0$ = ۰،

اور اسلئے عہ، بہ مساوات

$$\text{ک} \equiv \begin{vmatrix} \text{لا}^2 & -\text{لا ما} & \text{ما}^2 \\ \text{ا}_2 & \text{ا}_1 & \text{ا}_0 \\ \text{ب}_2 & \text{ب}_1 & \text{ب}_0 \end{vmatrix} = 0$$

کی اصلیں ہوں گی۔

اگر ک = ۰ کی اصلیں مختلف ہیں تو ہر حسبِ (۱) کی پہلی دو مساواتوں سے ہمیں ا، ب، اَ، بَ مل جاتے ہیں اور نتیجہ ع = ا ع^2 + ب و^2،
عَ = اَ ع^2 + بَ و^2 حاصل ہوتا ہے۔

ا، ب، اَ، بَ کی ان قیمتوں میں بہ = عہ + صہ رکھنے سے اور انتہا لینے سے جبکہ صہ = ۰۔ ہم کو نتیجہ ع = ع و، و = ع ط حاصل ہوتا ہے۔
اگر ک ≡ ۰ تو ا$_0$ = ک ب$_0$، ا$_1$ = ک ب$_1$، ا$_2$ = ک ب$_2$ اور ع ≡ ک و۔
ہم دیکھتے ہیں کہ ک ≡ ج (ع، و) اور اسکے اجزائے ضربی ع، و ہیں۔

۱۶ — اگر تین دو درجیوں

ا$_1$ لا^2 + ۲ ب$_1$ لا ما + ج$_1$ ما^2، ا$_2$ لا^2 + ۲ ب$_2$ لا ما + ج$_2$ ما^2، ا$_3$ لا^2 + ۲ ب$_3$ لا ما + ج$_3$ ما^2،

کے سروں کے درمیان ربط

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} = 0$$

ہو تو ثابت کرو کہ وہ خطی استحالوں کے ذریعہ شکلوں

ا$_1$ لا^2 + ج$_1$ ما^2، ا$_2$ لا^2 + ج$_2$ ما^2، ا$_3$ لا^2 + ج$_3$ ما^2

میں مستحیل کئے جا سکتے ہیں۔

مندرجۂ بالا مقطع اس بات کی شرط ہے کہ دیے ہوئے تین دو درجی نقطوں یا خطوں کا ایک نظام متعین کریں جو دربیچ میں ہو ۔

۱۷۔ اگر ن متغیروں میں دوسرے درجہ کے دو متجانس تفاعل ع، و ہوں جنکے سر حقیقی ہیں اور اگر متغیروں کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے و مثبت ہو تو ثابت کرو کہ ع ـ ل و کے ممیز کی تمام اصلیں حقیقی ہیں ۔

ہم یہ قرارداد استعمال کرتے ہیں کہ اگر کسی رقم میں کوئی لاحقہ دو مرتبہ واقع ہو تو اس رقم کو لاحقہ کی ۱ سے ن تک تمام قیمتوں کے لئے جمع کرنا چاہئے ۔

یہ قرارداد اختیار کرکے ہم لکھتے ہیں $\text{ع} \equiv \text{ا}_{\text{عہ}\,\text{بہ}}\,\text{لا}_{\text{عہ}}\,\text{لا}_{\text{بہ}}$ ، $\text{و} \equiv \text{ب}_{\text{عہ}\,\text{بہ}}\,\text{لا}_{\text{عہ}}\,\text{لا}_{\text{بہ}}$ ۔

اگر $\Delta \equiv (\text{ا}_{\text{عہ}\,\text{بہ}} - \text{ل}\,\text{ب}_{\text{عہ}\,\text{بہ}}) = 0$ تو ہم لا_{1}، لا_{2}، ... $\text{لا}_{\text{ن}}$ کی ایسی قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں کہ $\text{ا}_{\text{عہ}\,\text{بہ}}\,\text{لا}_{\text{بہ}} = \text{ل}\,\text{ب}_{\text{عہ}\,\text{بہ}}\,\text{لا}_{\text{بہ}}$ ، کیونکہ اگر Δ کے تمام پہلے صغیر مقطعات صفر ہوں تو لا_{1}، لا_{2}، ... $\text{لا}_{\text{ن}}$ میں سے کسی دو کی اختیاری قیمتیں لیجا سکتی ہیں۔ یہ اسلئے کہ کوئی قیمتیں جو مساواتوں $\text{ا}_{\text{عہ}\,\text{بہ}}\,\text{لا}_{\text{بہ}} = \text{ل}\,\text{ب}_{\text{عہ}\,\text{بہ}}\,\text{لا}_{\text{بہ}}$ میں سے ن ـ ۲ مساواتوں کو پورا کرتی ہیں بقیہ دو مساواتوں کو بھی پورا کرتی ہیں۔ اسکو ثابت کرنیکے لئے ہم انہیں سے ن ـ ۱ مساواتیں لیتے ہیں اور ان کو کسی

(209) (ن ـ ۲) متغیروں کے سروں سے حاصل کئے ہوئے دوسرے رتبہ کے (ن ـ ۱) صغیر مقطعوں سے ضرب دیتے ہیں اور پھر سب کو جمع کرتے ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ حاصل ≡ ۰ کیونکہ کسی متغیر کا سر یا تو پہلے رتبہ کا صغیر ہے یا ایک ایسا مقطع ہے جس کے دو ستون مماثل ہیں ۔ پس سوائے اس صورت کے جبکہ دوسرے رتبہ کا ہر صغیر مقطع صفر ہو کم از کم دو خطی مماثل مساواتیں موجود ہوتی ہیں جو ان (ن ـ ۲) مساواتوں کو جن کے (ن ـ ۲) متغیروں کے سروں والا صغیر مقطع

صفر نہیں ہے بقیہ دو مساواتوں سے مربوط کرتی ہیں۔ اسی طرح اگر تیسرے رتبے کے تمام صغیر مقطعات صفر ہوں تو متغیروں میں سے کسی تین کی اختیاری قیمت لیجا سکتی ہے کیونکہ کم از کم تین خطی مساواتیں ایسی موجود ہوتی ہیں جو ان (ن-۳) مساواتوں کو جن کے (ن-۳) متغیروں کے سروں والا صغیر مقطع صفر نہیں ہے بقیہ تین مساواتوں سے مربوط کرتی ہیں۔

عام صورت کے لئے بھی اسی طور پر قیاس کیا جا سکتا ہے۔ پس اگر لہٗ مساوات (اعہ یہ − لہ ب عہ یہ) = ۰ کی ایک اصل ہے تو ہم ہمیشہ لاٗ، لاٗ ... لاٗ کی ایسی قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں جو سب کی سب معدوم نہیں ہوتیں اور مساوات اعہ یہ لایہ = لہ ب عہ یہ لایہ کو پورا کرتی ہیں۔

اگر (اعہ یہ − لہ ب عہ یہ) = ۰ کی ایک اصل مہ + خ نہ ہو اور لایہ = طہ یہ + خ یہ یہ کی متناظر قیمتیں جو سب کی سب معدوم نہیں ہوتیں مساوات اعہ یہ لایہ = (مہ + خ نہ) ب عہ یہ لایہ میں درج کی جائیں تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

اعہ یہ (طہ یہ + خ یہ یہ) = (مہ + خ نہ) ب عہ یہ (طہ یہ + خ یہ یہ)

اور چونکہ اعہ یہ ، ب عہ یہ حقیقی ہیں اسلئے

اعہ یہ طہ یہ = مہ ب عہ یہ طہ یہ − نہ ب عہ یہ یہ یہ

ب عہ یہ یہ یہ = مہ ب عہ یہ یہ یہ + نہ ب عہ یہ طہ یہ

پہلی مساوات کو یہ عہ اور دوسری کو طہ عہ سے ضرب دینے اور دونوں کو تفریق کرنے اور پھر تمام رقموں کا مجموعہ لینے سے ہمیں ملتا ہے:-

$$\text{تہ}\left\{ ب_{عہ بہ}\, ثہ_{عہ}\, ثہ_{بہ} + ب_{عہ بہ}\, طہ_{عہ}\, طہ_{بہ} \right\} = ۰$$

لیکن $ب_{عہ بہ}\, ثہ_{عہ}\, ثہ_{بہ}$ اور $ب_{عہ بہ}\, طہ_{عہ}\, طہ_{بہ}$ مفروض کی بنا پر مثبت ہیں اور اس وقت تک معدوم نہیں ہوتے جب تک کہ تمام طہ اور تمام ثہ صفر نہ ہوں اور چونکہ ایسا نہیں ہے اسلئے تہ = ۰۔ اور اسلئے ۵ کی تمام اصلیں حقیقی ہیں۔

۱۸- اگر ع، و، ن متغیروں میں حقیقی سروں والے دو متجانس تفاعل ہوں اور متغیروں کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے و مثبت ہو تو ثابت کرو کہ ع اور و کو حقیقی سروں والے وہی ن خطی تفاعلوں کے مربعوں کے مجموعہ کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے۔

خطی ابدال $لا_{عہ} = لا_{عہ بہ}\, لاَ_{بہ}$ کے ذریعہ $ع \equiv ل_{عہ بہ}\, لا_{عہ}\, لا_{بہ}$ اور $و \equiv ب_{عہ بہ}\, لا_{عہ}\, لا_{بہ}$ کو مستحیل کرو تو حاصل ہوگا

$$ع = ل_{عہ بہ}\, لا_{عہ جہ}\, لا_{بہ ضہ}\, لاَ_{جہ}\, لاَ_{ضہ} = ل_{عہ بہ}\, لا_{عہ ۱}\, لا_{بہ ۱}\, لاَ_{۱}^{۲} + ۲\, ل_{عہ بہ}\, لا_{بہ ۱}\, لا_{عہ ف}\, لاَ_{۱}\, لاَ_{ف}$$

$$+ ل_{ف ق}\, لا_{ف ر}\, لاَ_{ر}\, لا_{ق س}\, لاَ_{س} \quad (ف، ق، ر، س = ۲ \text{ تا } ن)$$

$$و = ب_{عہ بہ}\, لا_{عہ جہ}\, لا_{بہ ضہ}\, لاَ_{جہ}\, لاَ_{ضہ} = ب_{عہ بہ}\, لا_{عہ ۱}\, لا_{بہ ۱}\, لاَ_{۱}^{۲} + ۲\, ب_{عہ بہ}\, لا_{بہ ۱}\, لا_{عہ ف}\, لاَ_{۱}\, لاَ_{ف}$$

$$+ ب_{ف ق}\, لا_{ف ر}\, لاَ_{ر}\, لا_{ق س}\, لاَ_{س}$$

اب اگر ل، مساوات $(ل_{عہ بہ} - ل\, ب_{عہ بہ}) = ۰$ کی اصل ہے، تو گذشتہ مثال کی بموجب ل حقیقی ہے اور ہم مقادیر $لا_{۱۱}$، $لا_{۱۲}$، $لا_{۱۳}$، … $لا_{ن۱}$ کی حقیقی قیمتیں دریافت کر سکتے ہیں جو مساوات $ل_{عہ بہ}\, لا_{بہ ۱} = ل\, ب_{عہ بہ}\, لا_{بہ ۱}$ کو پورا کریں۔

ابدال میں باقی تمام سروں کے لئے بھی اختیاری حقیقی قیمتیں فرض کرو لیکن اسکا خیال رہے کہ متیاس صفر نہ ہونے پائے ۔

$\text{ل}_{\text{عہ}\,\text{ہ}}\, \text{لا}_{\text{ہ}\,1} = \text{ل}_{1}\, \text{ب}_{\text{عہ}\,\text{یہ}}\, \text{لا}_{\text{یہ}\,1}$ کو $\text{لا}_{\text{عہ}\,1}$ سے ضرب دو اور سب کو جمع کرو اور نیز $\text{لا}_{\text{عف}}$ سے ضرب دو اور سب کو جمع کرو تو حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا}_{\text{عہ}\,\text{یہ}}\ \text{لا}_{\text{عہ}\,1}\ \text{لا}_{\text{یہ}\,1} = \text{ل}_{1}\ \text{ب}_{\text{عہ}\,\text{یہ}}\ \text{لا}_{\text{عہ}\,1}\ \text{لا}_{\text{یہ}\,1}\ ،\ \text{ل}_{1}\ \text{لا}_{\text{عہ}\,\text{یہ}}\ \text{لا}_{\text{یہ}\,1}\ \text{لا}_{\text{عف}} = \text{ل}_{1}\ \text{ب}_{\text{عہ}\,\text{یہ}}\ \text{لا}_{\text{یہ}\,1}\ \text{لا}_{\text{ف}}$$

پس ع میں لاَ_{1}^{2} اور $\text{لاَ}_{1}\,\text{لاَ}_{\text{ن}}$ کے سر و کے متناظر سروں کے ل_{1} گنا کے مساوی ہیں ۔

نیز اگر ہم یاد رکھیں کہ $\text{ب}_{\text{عہ}\,\text{یہ}}\ \text{لاَ}_{\text{عہ}\,1}\ \text{بَ}_{\text{یہ}\,1}$ مثبت ہے اور معدوم نہیں ہوتا اور اسکو ک_{1}^{2} سے تعبیر کریں اور اگر $\text{لا}_{1} = \text{ک}_{1}\,\text{لاَ}_{1} + \frac{1}{\text{ک}_{1}}\ \text{ب}_{\text{عہ}\,\text{یہ}}\ \text{لا}_{\text{یہ}\,1}\ \text{لا}_{\text{عف}}\ \text{لاَ}_{\text{ن}}$ رکھیں (210)

تو ہمیں حاصل ہوتا ہے $\text{ع} = \text{ل}_{1}\,\text{لا}_{1}^{2} + \text{عَ}$ ، $\text{و} = \text{لا}_{1}^{2} + \text{وَ}$ جہاں عَ ، وَ تفاعل ہیں $\text{لاَ}_{2}\,\text{لاَ}_{3} \dots \text{لاَ}_{\text{ن}}$ کے اور متغیروں کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے وَ مثبت ہے اسلئے کہ اگر لاَ_{1} کی قیمت مساوات $\text{لا}_{1} = 0$ سے معلوم کیجائے تو $\text{لاَ}_{2}\,\text{لاَ}_{3} \dots \text{لاَ}_{\text{ن}}$ کی کسی قیمتوں کے لئے $\text{عَ} = \text{ع}$ ۔ اب ہم عَ ، وَ کے ساتھ بھی یہی عمل کرتے ہیں جہاں عَ ، وَ صرف (ن - ۱) متغیروں کے تفاعل ہیں اور اسلئے اسی طرح عمل جاری رکھ کر ہم مطلوبہ نتیجہ حاصل کرتے ہیں ۔

اگر بالآخر $\text{لا}_{\text{عہ}} = \text{ل}_{\text{عہ}\,\text{یہ}}\ \text{لا}_{\text{یہ}}$ اور $(\text{ل}_{\text{عہ}\,\text{یہ}}) = \text{م}$ تو $\text{ع} - \text{ل}\,\text{و}$ کا ممیز Δ

$$= \text{م}^{2}\,(\text{ل} - \text{ل}_{1})(\text{ل} - \text{ل}_{2}) \dots (\text{ل} - \text{ل}_{\text{ن}})$$

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ $ل_۱$، $ل_۲$، ... $ل_ن$ مساوات $\Delta = ۰$ کی اصلیں ہیں۔

مزید برآں ہم دیکھتے ہیں کہ اگر $\Delta = ۰$ کی دو اصلیں $ل_۱$ کے مساوی ہوں تو آخری شکل ع - ل و کے ممیز $\bar{\Delta}$ میں چونکہ صرف وتری رقمیں ہوتی ہیں اسلئے $ل = ل_۱$ کیلئے $\bar{\Delta}$ کے تمام پہلے صغیر مقطعات معدوم ہوجاتے ہیں۔ اور چونکہ $\bar{\Delta}$ کو ایک مقطع $ا = م^۲$ سے ضرب دیکر Δ حاصل کیا جاتا ہے اسلئے Δ کا کوئی پہلا صغیر مقطع دو آزاستوں کا حاصل ضرب ہے جن میں سے ایک ا کے (ن - ۱) قطاروں پر اور دوسرا $\bar{\Delta}$ کے (ن - ۱) قطاروں پر مشتمل ہے پس Δ کا پہلا صغیر مقطع، $\bar{\Delta}$ کے پہلے صغیر مقطعوں کا خطی تفاعل ہے اور اسلئے $ل = ل_۱$ کے لئے صفر ہوجاتا ہے۔ اسی طرح اگر $ل = ل_۱$ مساوات $\Delta = ۰$ کی تہری اصل ہو تو $ل = ل_۱$ کے لئے Δ کے تمام دوسرے رتبہ والے صغیر مقطعات صفر ہوجاتے ہیں۔ عام صورت کو بھی اسی پر قیاس کیا جاسکتا ہے۔

۱۹ — تین کعبیوں ع، و، ط کو تین مکعبوں کے ذریعہ بیان کرو۔

$$ع = ا(لا - عہ ما)^۳ + ب(لا - بہ ما)^۳ + ج(لا - جہ ما)^۳ \equiv اَعَ^۳ + بَ وَ^۳ + جَ طَ^۳$$

لکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ا_۰ = ا + ب + ج، \quad - ا_۱ = ا عہ + ب بہ + ج جہ،$$

$$ا_۲ = ا عہ^۲ + ب بہ^۲ + ج جہ^۲، \quad - ا_۳ = ا عہ^۳ + ب بہ^۳ + ج جہ^۳$$

اور اسلئے اگر عہ، بہ، جہ مساوات $پ_۰ لا^۳ + پ_۱ لا^۲ ما + پ_۲ لا ما^۲ + پ_۳ ما^۳ = ۰$

کی اصلیں ہوں تو $پ_۰ ا_۳ - پ_۱ ا_۲ + پ_۲ ا_۱ - پ_۳ ا_۰ = ۰$،

اسی طرح $و \equiv اَعَ^۳ + بَ وَ^۳ + جَ طَ^۳$، $ط \equiv اً عً^۳ + بً وً^۳ + جً طً^۳$

رکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

پ$_{\cdot}$ ب$_{۳}$ − پ$_{۱}$ ب$_{۲}$ + پ$_{۲}$ ب$_{۱}$ − پ$_{۳}$ ب$_{\cdot}$ = ۰

پ$_{\cdot}$ ج$_{۳}$ − پ$_{۱}$ ج$_{۲}$ + پ$_{۲}$ ج$_{۱}$ − پ$_{۳}$ ج$_{\cdot}$ = ۰

اس لئے ک ≡

$$\begin{vmatrix} -\text{ما}^{۳} & \text{لاما}^{۲} & -\text{لا}^{۲}\text{ما} & \text{لا}^{۳} \\ \text{ا}_{\cdot} & \text{ا}_{۱} & \text{ا}_{۲} & \text{ا}_{۳} \\ \text{ب}_{\cdot} & \text{ب}_{۱} & \text{ب}_{۲} & \text{ب}_{۳} \\ \text{ج}_{\cdot} & \text{ج}_{۱} & \text{ج}_{۲} & \text{ج}_{۳} \end{vmatrix}$$

کی اصلیں عہ، یہ، جہ اور اجزائے ضربی ء، و، ط ہیں ۔

پس چار مساواتوں کے تین جوڑوں میں سے ہر ایک جٹ سے پہلی تین مساواتیں لیکر ہم مقادیر اَ، بَ، جَ، اً، بً، جً، اُ، بُ، جُ معلوم کر سکتے ہیں اور اگر عہ، یہ، جہ تینوں مختلف ہوں یعنے اگر ک شکل ء و ط کا ہو تو ہمیں مطلوبہ نتیجہ حاصل ہو جاتا ہے ۔ اگر ک شکل ء^{۲} و کا ہو تو ہم یہ = عہ + صہ، جہ = عہ + صہ + یہ رکھتے ہیں اور ا، ب، ج کی قیمت معلوم کرتے ہیں اور انتہا لیتے ہیں جبکہ صہ = ۰ ۔ اس صورت میں ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ ء، و، ط میں سے ہر ایک شکل ا ء^{۲} + ب ء و + ج و^{۲} کا ہے ۔ مزید براں یہ = ۰ کے لئے انتہا لینے سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ اگر ک شکل ء^{۳} کا ہے تو ء، و، ط کا ایک جزو ضربی ء ہے ۔ اگر ک ≡ ۰ تو ء، و، ط میں ایک خطی رشتہ موجود ہوتا ہے ۔ بالعموم ن ویں رتبہ والے ن کثیر رقمیوں کو ن ویں قوتوں والی ن رقموں میں بیان کرنے کیلئے متشابہ طریقہ استعمال کیا جا سکتا ہے ۔

۲۰ ۔ ثابت کرو کہ کعبی کی تین اصلوں کو

لا، طہ (لا)، طہ² (لا) = طہ طہ (لا)

کی شکل میں بیان کیا جا سکتا ہے جہاں

طہ (لا) = (ل لا + م) / (لَ لا + مَ) اور طہ³ (لا) = لا

یہ نتیجہ دفعہ ۶۰ جلد اول کی رو سے حاصل ہو سکتا ہے یا اس مسئلہ کو استعمال (211)
کرنے سے حاصل ہو سکتا ہے کہ ہر کعبی کو خطی استحالہ کے ذریعہ سے خود اپنے میں مستحیل کرنا ممکن ہے (دیکھو دفعہ ۲۰۶) لیکن اسکو زیادہ ابتدائی طریقوں سے اور زیادہ تشفی بخش طور پہ ثابت کرنیکے لئے ہم مساواتوں

لَ بہ جہ − ل بہ + مَ جہ − م = ۰

لَ جہ عہ − ل جہ + مَ عہ − م = ۰

لَ عہ بہ − ل عہ + مَ بہ − م = ۰

سے ل، م، لَ، مَ، دریافت کرتے ہیں۔ عہ، بہ، جہ کو غیر مساوی فرض کرنے پر ہمیں آسانی سے معلوم ہوتا ہے کہ ہم لَ = اج − ب²،

مَ − ل = اد − ب ج، مَ + ل = √(−⅓ Δ)، م = ج² − ب د

لے سکتے ہیں اور ہم دیکھتے ہیں کہ (ل مَ − لَ م) = −⅓ Δ = (مَ + ل)²۔

یہ مثال ایبل کے عام مسئلہ کی ایک خاص صورت ہے جو یہ ہے:-
اگر م ویں درجہ کی مساوات کی م اصلیں عہ، طہ (عہ)، طہ² (عہ)، ....

...، طہ^(م−۱) (عہ) ہوں جہاں طہ (لا) ایک ایسا منطق تفاعل ہے کہ جب عمل طہ کو م مرتبہ دہرایا جائے تو طہ^م (لا) = لا تب مساوات کو حل کرنیکے لئے صرف اس امر کی ضرورت ہے کہ مساوات لا^م − ۱ = ۰ کی ایک ابتدائی اصل معلوم کیجائے اور ایک معلومہ مقدار کا م واں جذر

نکالا جائے (دیکھو ابیل کی مساواتیں)

۲۱ — ثنائی کعبی ع اور اس کا ہیسوی $ھ_{\text{لا}}$ دئیے گئے ہیں اور نسبتیں لا : ما اور لاَ : ماَ کعبی کو پورا کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\sqrt[6]{\Delta}} \times \frac{\bar{\text{لا}}\,\frac{\text{جف}\,ھ_{\text{لا}}}{\text{جف}\,\text{لا}} + \bar{\text{ما}}\,\frac{\text{جف}\,ھ_{\text{لا}}}{\text{جف}\,\text{ما}}}{\text{لا}\,\bar{\text{ما}} - \bar{\text{لا}}\,\text{ما}}$$

ایک مطلق مستقل ہے۔ اس جملہ میں ع کا ممیز Δ سے تعبیر کیا گیا ہے۔

یہ جملہ خطی استحالہ سے مطلق نہیں بدلتا کیونکہ

$$ھ'_{\text{لا}',\text{ما}'} = \text{م}^2\, ھ_{\text{لا},\text{ما}}\,،\quad \Delta' = \text{م}^6\,\Delta\,،$$

اور

$$\begin{vmatrix} \text{لا}' & \text{ما}' \\ \bar{\text{لا}}' & \bar{\text{ما}}' \end{vmatrix} = \frac{1}{\text{م}}\begin{vmatrix} \text{لا} & \text{ما} \\ \bar{\text{لا}} & \bar{\text{ما}} \end{vmatrix}\,،\quad \bar{\text{لا}}\frac{\text{جف}}{\text{جف}\,\text{لا}} + \bar{\text{ما}}\frac{\text{جف}}{\text{جف}\,\text{ما}} = \bar{\text{لا}}'\frac{\text{جف}}{\text{جف}\,\text{لا}'} + \bar{\text{ما}}'\frac{\text{جف}}{\text{جف}\,\text{ما}'}$$

ع کو ایک خطی استحالہ سے جس کا مقیاس ایک ہو دو مکعبوں میں تحویل کرنے سے اس مستقل کا $\frac{1}{\sqrt[6]{-3}}$ ہونا آسانی کے ساتھ دکھایا جا سکتا ہے۔ یہ دفعہ ۶۰ کے ہم رسم ربط کی دوسری شکل ہے۔

۲۲ — ثابت کرو کہ سروں کی رقوم میں ایک منطق ہم رسم ربط کعبی مساوات کی ایک ہی اصل کے کسی دو منطق تفاعلوں کو مربوط کرتا ہے لیکن یہ ربط منطق نہیں ہوتا جب اصلیں مختلف ہوں۔

۲۳ — چار درجی $(\text{ا}، \text{ب}، \text{ج}، \text{د}، \text{ص})(\text{لا}، 1)^4$ کو ایک ایسے چار درجی میں تحویل کرو جس کا غیر متغیر ع معدوم ہو۔

مان لو $\text{ما} = \text{لا}^2 + 2\,\text{عا}\,\text{لا} + \text{طا}$ ،

اور استحالہ شدہ مساوات کے غیر متغیر ع کو صفر کے مساوی رکھو تو

$$\Sigma\,(\text{غم} - \text{غہ})^2\,(\text{فہ} - \text{غم})^2 = 0 \qquad (1)$$

جہاں فہ، عا کا ایک معلومہ دو درجی تفاعل ہے اور اس میں طا شامل نہیں ہوتا۔

(212) (۱) کو پھیلانے سے

$$\text{ع}\ \text{فہ}^{۲} - ۳\ \text{بج}\ \text{فہ} + \frac{\text{ع}^{۲}}{۱۲} = ۰$$

اس سے فہ معلوم ہوتا ہے اور پھر ایک دو درجی مساوات کے ذریعہ عا معلوم ہوتا ہے۔ طا کی کوئی اختیاری قیمت ہو سکتی ہے۔

اسی طرح کے استحالہ سے ج کو معدوم کیا جا سکتا ہے۔

۲۴ — ثابت کرو کہ چار درجی ف (لا) کا عام سے عام استحالہ اس استحالہ

$$\text{ا} = \frac{\text{پ}}{\text{پ} - \text{لا}} + \frac{\text{ق}}{\text{ق} - \text{لا}}$$

میں تحویل ہو سکتا ہے۔

اگر $\text{پ} = \text{ر/ف}(\text{پ})\ \text{فَ}(\text{ق})$ اور $\text{ق} = -\text{ر/ف}(\text{ق}) \times \text{فَ}(\text{پ})$ تو ثابت کرو کہ استحالہ شدہ چار درجی میں دوسری رقم موجود نہیں ہے۔

۲۵ — ثابت کرو کہ استحالہ

$$\text{ما} = \frac{\text{ع}\ \text{لا}^{۲} + ۲\ \text{ب}\ \text{لا} + \text{ج}}{\text{ع}_{۱}\ \text{لا}^{۲} + ۲\ \text{ب}_{۱}\ \text{لا} + \text{ج}_{۱}}$$

کی تکمیل تین متواتر استحالات سے ہو سکتی ہے :- (۱) ایک ہم رسم استحالہ سے، (۲) اصلوں کو ان کے مربعوں میں تحویل کرنے سے، اور (۳) ایک ہم رسم استحالہ سے

۲۶ — اگر پ کوئی صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{(\text{لا}_{۱}^{\text{پ}} - \text{لا}_{۲}^{\text{پ}})(\text{لا}_{۳}^{\text{پ}} - \text{لا}_{۴}^{\text{پ}})}{(\text{لا}_{۱} - \text{لا}_{۲})(\text{لا}_{۳} - \text{لا}_{۴})} = \text{ح}_{۰} + (\text{لا}_{۱}\text{لا}_{۲} + \text{لا}_{۳}\text{لا}_{۴})\ \text{ح}_{۱}\text{،}$$

جہاں $\text{ح}_{۰}$ اور $\text{ح}_{۱}$ متشاکل تفاعل ہیں $\text{لا}_{۱}$، $\text{لا}_{۲}$، $\text{لا}_{۳}$، $\text{لا}_{۴}$ کے۔ نیز ثابت کرو کہ

$$\frac{\{\text{فہ}(\text{لا}_1) - \text{فہ}(\text{لا}_2)\}\{\text{فہ}(\text{لا}_3) - \text{فہ}(\text{لا}_4)\}}{\{\text{پہ}(\text{لا}_1) - \text{پہ}(\text{لا}_2)\}\{\text{پہ}(\text{لا}_3) - \text{پہ}(\text{لا}_4)\}}$$

$$= \frac{\text{ج}_0 + \text{ج}_1(\text{لا}_1\text{لا}_2 + \text{لا}_3\text{لا}_4)}{\text{ج}'_0 + \text{ج}'_1(\text{لا}_1\text{لا}_2 + \text{لا}_3\text{لا}_4)}$$

جہاں ج۰، ج۱، ج'۰، ج'۱ متشاکل تفاعل ہیں لا۱، لا۲، لا۳، لا۴ کے۔
(دیکھو دفعہ ۱۹۸)

۲۷ ـ اگر ثنائی شکل

$$\text{ع} \equiv (\text{ا}_0، \text{ا}_1، \text{ا}_2، \ldots، \text{ا}_\text{ن})(\text{لا}، \text{ما})^\text{ن}$$

کے دو ہم متغیر فہ (لا، ما) اور پہ (لا، ما) ہوں جنکے درجے علی الترتیب ف اور ق ہیں اور اگر

$$\text{فہ}\left(\text{لا} - \frac{\text{ا}}{\text{ق}}\frac{\text{جف پہ}}{\text{جف ما}}\,\text{ما}،\ \text{لا} + \frac{\text{ا}}{\text{ق}}\frac{\text{جف پہ}}{\text{جف لا}}\,\text{ما}\right)$$

کو شکل

$$(\text{و}_0، \text{و}_1، \text{و}_2، \ldots، \text{و}_\text{ق})(\text{لا}، \text{ما})^\text{ف}$$

میں پھیلایا جائے تو ثابت کرو کہ و۰، و۱، و۲، ...، وق ہم متغیر ہیں ع کے۔
(ہرسٹ)

پھیلانے سے $\text{لا}^{\text{ف}-\text{ر}}\ \text{ما}^{\text{ر}}$ کا سر ہے

$$\frac{(-1)^\text{ر}}{1\times2\times3\times\ldots\times\text{ر}}\left(\frac{\text{جف پہ}}{\text{جف ما}}\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} - \frac{\text{جف پہ}}{\text{جف لا}}\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\right)^\text{ر}\text{فہ}$$

فہ کے اِس استحالہ کا مقیاس پہ (لا، ما) ہے۔

۲۸ ـ اگر پچھلی مثال میں ن = ۴ اور فہ (لا، ما) اور پہ (لا، ما) کی (213)
بجائے ع رکھدیا جائے تو و۰، و۱، و۲، و۳، و۴ کی قیمتیں معلوم کرو۔

جواب :- (ع٠، ھ، گ‌لا ع ع٢ - ٣ ھ٢لا) (لا، ما)٢

۲۹ — دو کعبیوں ع اور و کے لئے ثابت کرو کہ

$$ق^{2} = 12 \begin{vmatrix} ع_{11} & ع_{12} & ع_{13} \\ ع_{21} & ع_{22} & ع_{23} \\ ع_{31} & ع_{32} & ع_{33} \end{vmatrix}$$

جہاں $ع_{11}$، $ع_{21}$، وغیرہ تین حیسویوں کے غیر متغیر ہیں اور ق کا وہی مفہوم ہے جو دفعہ ۲۹۱ میں۔

۳۰ — مساواتوں

ی = (ا٠ لاَ + ا١) لا + (ا٠ لاَ٢ + ٣ ا١ لاَ + ٢ ا٢) ما ،

(ا٠، ا١، ا٢، ا٣)(لاَ، ١)٣ = ٠

سے لاَ ساقط کرو۔

جواب :- ی٣ + ٣ ھ‌لا،ما ی + گ‌لا،ما = ٠

۳۱ — دو درجی (ا، ب، ج، ف، گ، ھ)(لا، ا، ی)٢ کو لا، ما، ے میں مستحیل کرو جہاں

لا = ع١ لا + ب١ ما + ج١ ی، ما = ع٢ لا + ب٢ ما + ج٢ ی، ے = ع٣ لا

+ ب٣ ما + ج٣ ی،

جواب

$$\frac{1}{م^{2}} \begin{vmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{21} & \Pi_{31} & لا \\ \Pi_{12} & \Pi_{22} & \Pi_{32} & ما \\ \Pi_{13} & \Pi_{23} & \Pi_{33} & ے \\ لا & ما & ے & 0 \end{vmatrix}$$

جہاں ا̄ا = ا عہ عہ + ب بہ بہ + ج جہ جہ + ف (بہ جہ + بہ جہ)

+ گ (جہ عہ + جہ عہ) + ھ (عہ بہ + عہ بہ)

اور ا، ب، ج، ف، گ، ھ تفاعل

(ا، ب، ج، ف، گ، ھ) (لا، ما، ی)²

کی مماسی شکل کے سر ہیں۔

۳۲ ـ ثابت کرو کہ ابدال

ضا = ل لا + م ما، عا = لا ـ ضہ ما

سے چار درجی (ا، ب، ج، د، ص) (لا، ما)⁴ کو شکل

ک عا (۴ ضا³ ـ ع ضا عا² + جے عا³)

میں تحویل کر سکتے ہیں جہاں عہ، بہ، جہ، ضہ اصلیں ہیں اور

۱۲ ل = ـ ا̄ (عہ ـ ضہ) (بہ ـ ضہ)، ۱۲ م = ا̄ عہ (بہ ـ ضہ) (جہ ـ ضہ)،

اور ک، تفاعل ہے عہ، بہ، جہ، ضہ کا۔

۳۳ ـ اگر ع لا ایک چار درجی ہو اور ھ لا اسکا ھیسوی تو

ثابت کرو کہ ع لا ھ ما ـ ع ما ھ لا کے اجزائے ضربی لا ـ ما اور گ لا

کے تین دو درجی اجزائے ضربی (دفعہ ۱۸۲) ہیں جبکہ لا² کی بجائے

لا ما، اور ۲ لا کی بجائے لا + ما رکھدئے جائیں۔

۳۴ ـ ثابت کرو کہ ع لا کے تمام چار درجی ہم متغیر جنکی اصلیں ع لا

کی اصلوں کے منطق تفاعل ہیں ضابطہ

(غہ⁴ + ½ ع غہ² ـ ۲ جے غہ + ¹⁄₁₆ ع²) ع لا ـ (۴ غہ³ ـ ع غہ + جے) ھ لا

میں شامل ہیں۔ (مسٹر رسل)

یہ مثال پچھلی مثال کے ساتھ کس طرح متعلق ہے۔ (214)

۳۵ — ثابت کروکہ $\text{ع}^2 \text{ع}_{\text{لا}} - ۱۲\,\text{اب ج}\, \text{ھ}_{\text{لا}}$ کا ایک جزو ضربی

$\frac{\text{لا}-\text{عہ}}{\text{ضہ}-\text{عہ}} + \frac{\text{لا}-\text{بہ}}{\text{ضہ}-\text{بہ}} + \frac{\text{لا}-\text{جہ}}{\text{ضہ}-\text{جہ}}$ ہے جہاں

$$\text{ع}_{\text{لا}} \equiv (\text{لا}-\text{عہ})(\text{لا}-\text{بہ})(\text{لا}-\text{جہ})(\text{لا}-\text{ضہ})$$

۳۶ — اگر $\text{ع}_{\text{لا}}$ اور $\text{عَ}_{\text{ضا}}$ دو چار درجی ہوں جو ایک ہی مطلق غیر متغیر رکھتے ہیں تو ثابت کروکہ

$$\text{ع جَ}\, \text{ھ}_{\text{لا}}\, \text{عَ}_{\text{ضا}} - \text{عَ ج}\, \text{ھَ}_{\text{ضا}}\, \text{ع}_{\text{لا}}$$

کو شکل

$$\text{ا لا ضا} + \text{ب لا} + \text{ج ضا} + \text{د}$$

کے چار اجزائے ضربی میں تحلیل کیا جا سکتا ہے۔ (مسٹر رسل)

۳۷ — اگر ایک ہم متغیر کے صدر سر میں متعدد کثیر درجیوں کے سر رتبوں $\text{ھ}_1، \text{ھ}_2، \ldots، \text{ھ}_{\text{ر}}$ اور وزنوں $\text{ک}_1، \text{ک}_2، \ldots \text{ک}_{\text{ر}}$ میں داخل ہوں تو ہم متغیر کا درجہ ہے

$$\text{ن}_1 \text{ھ}_1 + \text{ن}_2 \text{ھ}_2 + \ldots + \text{ن}_{\text{ر}} \text{ھ}_{\text{ر}} - ۲(\text{ک}_1 + \text{ک}_2 + \ldots + \text{ک}_{\text{ر}})$$

(دفعہ ۱۶۶)

۳۸ — اگر مساوات $\text{ع} = ۰$ کے ایک نیم غیر متغیرفہ کی ساخت میں ہر فرق $\text{ع}_{\text{ن}} - \text{ع}_{\text{ق}}$ کی بجائے

$$\text{ع}\,\frac{(\text{ع}_{\text{ن}} - \text{ع}_{\text{ق}})}{(\text{لا} - \text{ع}_{\text{ن}})(\text{لا} - \text{ع}_{\text{ق}})}$$

درج کیا جائے تو ثابت کروکہ نتیجہ، $\text{ع}^{\text{ک}-\text{ھ}}$ اور اس ہم متغیر کا حاصل ضرب ہے جس کا صدر سر فہ ہے جہاں فہ کا رتبہ ھ اور وزن ک ہے۔

۳۹ — اگر ع ایک پانچ درجی ہو تو چار درجی مستخرجہ (emanant)

$$\text{ع}\left(\text{لاَ}\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{ماَ}\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\right)^{۴}$$

کے غیر متغیر کیا ہیں۔

جواب:۔ دو درجی اور کعبی ہم متغیر $\text{ع}_{\text{لا}}$ اور $\text{جے}_{\text{لا}}$۔

۴۰۔ کسی کثیر درجی ع کے ہم متغیروں $\text{ھ}_{\text{لا}}$، $\text{گ}_{\text{لا}}$، $\text{ع}_{\text{لا}}$، $\text{جے}_{\text{لا}}$ کو ملانیوالا رشتہ بیان کرو۔

جواب:۔ $-\text{گ}_{\text{لا}}^{۲} = ۴\,\text{ھ}_{\text{لا}}^{۳} - \text{ع}^{۲}\,\text{ھ}_{\text{لا}}\,\text{ع}_{\text{لا}} + \text{ع}^{۳}\,\text{جے}_{\text{لا}}$

۴۱۔ بتاؤ کہ طاق رتبہ کے ایک کثیر درجی کو کس طرح مستحیل کیا جائے کہ تمام نئے سر غیر متغیر ہوں۔

جواب:۔ نئے لا اور ما کی بجائے دو خطی ہم متغیر لو۔

۴۲۔ وہ ربط معلوم کرو جو دو چار درجیوں کے سروں کو مربوط کرتا ہے اگر انکی اصلوں میں یہ رشتہ ہو

$$\begin{vmatrix} \text{عہ عہَ} & \text{عہَ} & \text{عہ} & \text{ا} \\ \text{بہ بہَ} & \text{بہَ} & \text{بہ} & \text{ا} \\ \text{جہ جہَ} & \text{جہَ} & \text{جہ} & \text{ا} \\ \text{ضہ ضہَ} & \text{ضہَ} & \text{ضہ} & \text{ا} \end{vmatrix} = ۰$$

جواب:۔ $\text{ع}^{۳}\,\text{جےَ}^{۲} - \text{عَ}^{۳}\,\text{جے}^{۲} = ۰$

(مقابلہ کرو مثال ۱۳ صفحہ ۱۷۵ اور مثال ۱۴ صفحہ ۱۷۵ جلد اول کے ساتھ)

۴۳۔ کعبی ع کو اسکے کعبی ہم متغیر $\text{گ}_{\text{لا}}$ میں خطی استحالہ سے مستحیل کرو۔ (215)

مساوات $$\text{لاَ}\frac{\text{جف ھ}_{\text{لا}}}{\text{جف لا}} + \text{ماَ}\frac{\text{جف ھ}_{\text{لا}}}{\text{جف ما}} = ۰$$

سے حاصل ہونیوالے استحالہ کو عمل میں لانے سے نتیجہ ملتا ہے ۵ گ۔

۴۴ — چار درجی ع کو خود اسی میں خطی استحالہ کے ذریعہ مستحیل کرو۔

اگر ع = ا (لا۲ + ما۲) + ۲ ب لا ما

تو ہم متغیر گ کے دو درجی اجزائے ضربی لا ما ، لا۲ + ما۲ ، لا۲ - ما۲ ...

مساوات لا (جفا ف / جفا لا) + ما (جفا ف / جفا ما) = ... سے تعین ہونیوالے استحالہ کو عمل میں لانے سے ع ، ع میں مستحیل ہوجاتا ہے جہاں ق مندرجہ بالا اجزائے ضربی میں سے کوئی ایک جزو ضربی ہے۔

۴۵ — ثابت کرو کہ گ کے دو درجی اجزائے ضربی ع ، و ، ط جنکو اصلوں کی رقوم میں بیان کیا گیا ہو نہیں بدلتے اگر لا ، ع ، ب ، جـ ، ضـ کی بجائے انکے متکافی درج کئے جائیں اور کسروں کو ... کے ذریعہ سے دور کیا جائے۔

اسلئے معلوم ہوتا ہے کہ ا ع ، ا و ، ا ط کو علیحدہ علیحدہ ہم متغیر سمجھا جاسکتا ہے اگر اس منطقی احاطہ کو جسمیں پہلے صرف سروں کو شامل کیا جاتا تھا اب اسمیں اصلوں ع ، ب ، جـ ، ضـ کو بھی شامل کرنے سے زیادہ وسیع کیا جائے۔ (دیکھو دفعہ ۱۶۸)

۴۶ — اگر تین دو درجی باہم موسیقی ہوں تو ثابت کرو کہ وہ ان شکلوں

ا لا۲ + ج ما۲ ، ا لا۲ - ج ما۲ ، ب لا ما

میں تحویل ہو سکتے ہیں۔

۴۷ — پانچ درجی کے لئے ہم غیر متغیر بناؤ جسکا رتبہ ۴ ہو اور وزن ۸۔ مکمل ڈھال* گ۴،۸ میں جو رقمیں شامل ہوتی ہیں وہ یہ ہیں

* اصطلاح ڈھال (Gradient) کو کسی مقررہ رتبہ اور وزن کی تمام ممکن رقموں کے مجموعہ کے لئے استعمال کیا گیا ہے۔

$ا_۰^۲ ا_۴^۲$ ، $ا_۱^۲ ا_۳ ا_۴$ ، $ا_۰ ا_۲ ا_۳^۲$ ، $ا_۰ ا_۲ ا_۳ ا_۴$ ، $ا_۱ ا_۲ ا_۳ ا_۴$ ، $ا_۰ ا_۳^۲ ا_۴$ ، $ا_۲^۲ ا_۴$ ، $ا_۱^۲ ا_۴$ ، $ا_۱ ا_۲^۲ ا_۴$ ،
$ا_۲^۳$ ، $ا_۰ ا_۳ ا_۵$ ، $ا_۰ ا_۱ ا_۲ ا_۵$ ، $ا_۱^۳ ا_۵$ ۔

عف سے عمل کرنے اور عف $گ_{۴،۴}$ = ۔ بنانے سے اس نمونہ

$$ل س + م ع^۲$$

کے نیم غیر متغیر ملتے ہیں جہاں ع کے معنی وہی معمولی ہیں اور

$$س = ا_۰ ا_۴^۲ - ۳ ا_۰ ا_۱ ا_۲ ا_۴ - ۴ ا_۰ ا_۲^۲ ا_۴ + ۴ ا_۰ ا_۲ ا_۳^۲ + ۵ ا_۱^۲ ا_۲ ا_۴$$
$$+ ۲ ا_۱^۲ ا_۳^۲ - ۸ ا_۱ ا_۲^۲ ا_۳ + ۳ ا_۲^۴ - ا_۵ (ا_۰ ا_۳^۲ - ۳ ا_۰ ا_۱ ا_۲ + ۲ ا_۱^۳)$$

فصل چہارم ۔ ہندسی استحالات

(216)

اس باب کو ختم کرنے سے پیشتر ہم یہ مناسب سمجھتے ہیں کہ متغیروں کے ثنائی نظام سے ثلاثی نظام حاصل کرنیکے ایک سادہ استحالہ کا کچھ ذکر کریں کیونکہ اس سے ابواب ماسبق کے اکثر نتائج کی ہندسی تعبیر مل سکیگی ۔ وہ اطلاقات جو ذیل میں درج ہیں استحالہ کے اس طریقہ کی توضیح کے لئے کافی ہیں اور اُس طالب علم کو جو ہندسہ تحلیلی کے اصولوں سے واقف ہے اس قابل بنا دینگی کہ وہ اُس مشابہت کو جو اِن دو نظاموں میں موجود ہے اور زیادہ وسیع کرسکے ۔

ابتدائی متغیروں کو یعنے ثنائی نظام کے متغیروں کو لا ، ما سے تعبیر کرو اور انکو ایک ثلاثی نظام میں ابدالات

$$لا = لا^۲ ، ما = ۲ لا ما ، ے = ما^۲$$

سے ستحیل کرو۔ یہ وہ شکل ہے جس پر عام دو درجی استحالہ ثلاثی متغیروں کے ایک خطی استحالہ کے ذریعہ لایا جا سکتا ہے[1]۔

مثلاً دو درجی کی سادہ صورت لینے سے جسکی اصلیں عہ، بہ ہیں یعنی دو درجی

$$لا^2 - (عہ + بہ)\, لا\, ما + عہ\, بہ\, ما^2 = ۰$$

لینے سے اور اسکو ستحیل کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$ٹ - \frac{1}{2}(عہ + بہ)\, ما + عہ\, بہ\, ے = ۰ \qquad (۱)$$

نیز ہمیں یہ مساوات

$$ما^2 - ۴\, ے\, ٹ = ۰$$

بھی ملتی ہے۔

یہ ایک مخروطی کی مساوات ہے جسکو ہم ہمیشہ ک سے موسوم کرینگے اور (۱) صریحاً اس مخروطی کے ایک وتر کی مساوات ہے جو نقطوں عہ اور بہ کو ملاتا ہے۔ وہ نقطہ جو مساواتوں

$$\frac{ٹ}{فہ^2} = \frac{ما}{۲\, فہ} = ے،\ جہاں\ فہ = \frac{ٹ}{ما}$$ (217)

سے متعین ہوتا ہے مخروطی ک پر کے نقطہ فہ سے موسوم کیا جاتا ہے۔

---

[1] اگر $لاَ = ل_1 لا^2 + ۲ ب_1 لا ما + ج_1 ما^2$، $ماَ = ل_2 لا^2 + ۲ ب_2 لا ما + ج_2 ما^2$، $ےَ = ل_3 لا^2 + ۲ ب_3 لا ما + ج_3 ما^2$ تو $لا^2$، $لا ما$، $ما^2$ کے لئے حل کرنے سے اور یہ مان کر کہ $(ل_1، ب_2، ج_3) \neq ۰$۔ ہمیں حاصل ہوتا ہے:۔

$$لا^2 = \frac{ا_1 لاَ + ا_2 ماَ + ا_3 ےَ}{(ل_1\, ب_2\, ج_3)}$$

اور متشابہ قیمتیں ما اور ے کے لئے۔

جب عہ۱ = عہ۲ یہ تو دو درجی (لا − عہ ما)² یعنے پہلے درجہ کے ایک جزو ضربی کا مربع ہو جاتا ہے۔ نیز (۱) لا − ۲عہ ما + عہ² = ۰ میں تحویل ہوتا ہے جو صریحاً اُس مماس کی مساوات ہے جو مخروطی ک کے نقطہ عہ پر کھینچا گیا ہے۔ پس دو درجی کے جواب میں جسکی اصلیں مختلف ہوں جو خط ملتا ہے وہ ک کا ایک وتر ہے اور یہ خط مماس بن جاتا ہے جب اصلیں مساوی ہوتی ہیں۔

اس طریقہ کو اور زیادہ واضح کرنیکے لئے ہم ثنائی چھہ درجی اور پانچ درجی پر غور کرتے ہیں تاکہ یہ بتایا جا سکے کہ کثیر درجی کے درجہ کے جفت یا طاق ہونے سے استحالہ کس طرح مختلف شکل میں پیش ہوتا ہے۔ پہلی صورت لیتے ہے

ع ≡ (لا − عہ۱ ما)(لا − عہ۲ ما)(لا − عہ۵ ما)(لا − عہ۴ ما)(لا − عہ۶ ما)

جو استحالہ سے

ج۲۱ ج۴۳ ج۶۵، ج۲۱ ج۵۳ ج۶۴، ج۲۱ ج۶۳ ج۵۴

یا وتروں کے ایسے ہی پندرہ حاصل ضربوں میں سے کوئی اور ہو جاتا ہے جہاں ج۲۱ ≡ لا − ½ (عہ۱ + عہ۲) ما + عہ۱ عہ۲ سے وتر ۱، ۲ ہے اور ج۴۳، ج۶۵ وغیرہ بھی ایسے ہی وتروں کو تعبیر کرتے ہیں۔ دوسری صورت میں یعنے جب ثنائی کثیر درجی کا درجہ طاق ہو تو استحالہ کو عمل میں لانے سے پیشتر ع کا مربع لینا چاہئے۔ اس طرح اگر ع سے مندرجۂ بالا حاصل ضرب کے پہلے پانچ اجزائے ضربی تعبیر ہوں تو ع² مستحیل ہونیکے بعد ت۱ ت۲ ت۳ ت۴ ت۵ ہو جاتا ہے جہاں ک کے نقطہ عہ۱ پر کا مماس ت۱ ≡ لا − ۲عہ۱ ما + عہ۱² سے ہے اور ایسے ہی معنی ت۲، ت۳ وغیرہ کے ہیں۔

لیکن چونکہ ایسے استحالوں میں ہم ۴ لا² ما² کی بجائے ۴ لا ما یا ما² = ۴ لا ہے۔ ک

رکھ سکتے ہیں اسلئے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ استحالے مختلف طریقوں سے مکمل کئے جا سکتے ہیں لیکن ہر دو استحالوں میں جو فرق ہوتا ہے اس کا جزو ضربی ک ہوگا۔

۲۱۳ — دو درجی اور دو درجیونکے نظام۔ دو درجی کا ممیز ہی صرف اسکا غیر متغیر ہے اور یہ ثلاثی نظام میں بھی غیر متغیر ہے۔ اسکا معدوم ہونا وہ
شرط ہے کہ دو درجی کے جواب میں جو خط ہے وہ مخروطی ک کو مس کرے (218)
اب ہم دو دو درجیوں کے نظام

ا لا^{۲} + ۲ ب لا ما + ج ما^{۲} ، اَ لا^{۲} + ۲ بَ لا ما + جَ ما^{۲}

پر غور کرتے ہیں جنکو ہم ل اور م سے موسوم کرینگے۔

جب انکو مستحیل کیا جاتا ہے تو وہ دو خط ہو جاتے ہیں

ل ≡ ا لا + ب ما + ج ے ، م ≡ اَ لا + بَ ما + جَ ے

اب وہ شرط کہ خط لہ ل + مہ م = ۰ مخروطی ک کو مس کرے یہ ہے

لہ^{۲} (ا ج − ب^{۲}) + لہ مہ (ا جَ + اَ ج − ۲ ب بَ) + مہ^{۲} (اَ جَ − بَ^{۲}) = ۰ ،

......(۲)

اس مساوات کے تمام سر دونوں نظامات کے غیر متغیر ہیں۔ ہم قبل ازیں دیکھ چکے ہیں کہ پہلے اور آخری سروں کے لئے یہ مسئلہ درست ہے۔ درمیانی سر جو ثنائی نظام کا موسیقی غیر متغیر ہے ثلاثی نظام میں بھی ایک غیر متغیر ہے جسکا معدوم ہونا اس بات کی شرط ہے کہ خطوط ل ، م مخروطی ک کے لحاظ سے مزدوج ہوں۔ اس مساوات سے وہ مماس متعین ہوتے ہیں جو ل اور م کے نقطہ تقاطع میں سے مخروطی ک پر کھینچے جائیں۔ جب یہ نقطہ مخروطی پر ہو تو یہ مماس منطبق ہوتے ہیں اور دو درجی کا ممیز معدوم ہوتا ہے۔ پس دو درجیوں کے حاصل اسقاط کے لئے ہندسی طور پر ہمیں حسب ذیل شکل ملتی ہے :-

ر = ۴ (اج − ب٢)(اَجَ − بَ٢) − (اجَ + اَج − ٢ ب بَ)٢

کیونکہ اگر ل، م اور ک ایک مشترک نقطہ میں سے گذریں تو اصلی دو درجیوں کی ایک اصل مشترک ہونی چاہئے اور ہر صورت میں شرط وہی ہے۔

نیز مساوات لہ ل + مہ م = ۰ سے حاصل ہونیوالے نقطوں یا خطوں کے زوج درپیچ میں ایک نظام بناتے ہیں (دیکھو دفعہ ۱۹۰)؛ یہ دوہرے نقطے یا خطوط مساوات (۲) سے متعین ہوتے ہیں۔ ثلاثی نظام میں خطوں کا متناظر پنسل جو ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے درپیچ میں نقطوں کا ایک ایسا ایک نظام مخروطی پر متعین کرتا ہے، دوہرے نقطے مماسوں کے نقاط تماس ہیں جو ثابت نقطے سے مخروطی پر کھینچے گئے ہیں۔

پھر اگر ہم تین دو درجیوں (219)

ا١ لا٢ + ٢ ب١ لا ما + ج١ ما٢ ، ا٢ لا٢ + ٢ ب٢ لا ما + ج٢ ما٢ ،

ا٣ لا٢ + ٢ ب٣ لا ما + ج٣ ما٢

پر غور کریں تو یہ معلوم ہوتا ہے کہ مقطع (ا١ ب٢ ج٣) دونوں نظاموں کا ایک غیر متغیر ہے۔ اس غیر متغیر کا معدوم ہونا ثنائی نظام کے لئے اس شرط کو بیان کرتا ہے کہ (۱) دئے ہوئے دو درجی ایک درپیچ کو متعین کرتے ہیں (مثال ۱۶ صفحہ ۳۳۸) اور (۲) ثلاثی نظام کے لئے اس شرط کو بیان کرتا ہے کہ تین متناظر خطوط ایک نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔

آخری مثال کے طور پر ہم تین دو درجیوں کے ایک نظام پر غور کرتے ہیں جنمیں سے دو دو ان موسیقی رشتوں

ا٢ ج٣ + ا٣ ج٢ − ٢ ب٢ ب٣ = ۰، وغیرہ

سے مربوط ہیں۔ دو درجیوں کو مستحیل کیا جاتا ہے تو تین خط ل، م، ن

حاصل ہوتے ہیں جو مخروطی ک کے لحاظ سے ایک خود مزدوج مثلث بناتے ہیں۔ وہ مسئلہ جو تین باہم موسیقی دو درجیوں سے متعلق ہے یہ کہ انکے مربع ایک مماثل خطی رشتے سے مربوط ہوتے ہیں (دیکھو مثال ۶ صفحہ) مخروطیوں کی ایک مشہور خاصیت سے مستنتج ہوتا ہے کیونکہ ک کو ل، م، ن کی رقوم میں شکل

$$\text{ک} = \text{ل}^{2} + \text{م}^{2} + \text{ن}^{2}$$

میں بیان کیا جا سکتا ہے۔ اسلئے ابتدائی متغیروں لا، ما پر عمل کرنے سے ک متماثلاً معدوم ہوتا ہے اور ل، م، ن ابتدائی دو درجی ہو جاتے ہیں اور ہر دو درجی ایک جزو ضربی پر تقسیم کیا ہوا ہوتا ہے اور یہ آسانی کیساتھ معلوم ہو سکتا ہے کہ یہ جزو ضربی اپنے متعلقہ دو درجی کے ممیز کا جذرالمربع ہے (دیکھو (۱) مثال ۶ صفحہ ۲۱۰ نیز مثال ۱۷ صفحہ ۳۳۹)۔

۲۱۴ — چار درجی اور اسکے ہم متغیروں پر ہندسی طریقہ سے بحث

دفعات آئندہ کی تحقیقاتوں سے یہ معلوم ہوگا کہ زیر بحث استحالہ کو چار درجی ع ≡ (ا، ب، ج، د، ص) (لا، ما)^۴ پر استعمال کرنے میں رقم ۶ ج لا^۲ ما^۲ کی بجائے ۲ ج لا ے + ج ما^۲ رکھنا چاہئے۔ اس طرح اس چار درجی کی جگہ دو حسب ذیل مخروطیاں لینگی:۔

$$\text{ع} \equiv \text{ا لا}^{2} + \text{ج ما}^{2} + \text{ص ے}^{2} + \text{۲ د ما ے} + \text{۲ ج ے لا} + \text{۲ ب لا ما}$$

$$\text{ک} \equiv \text{۴ ے لا} - \text{ما}^{2}$$

ع کی شکل جو یہاں منتخب کیگئی ہے ک کے ساتھ ایک غیر متغیر رشتے سے مربوط ہے۔ ع اور ک کے غیر متغیر ابتدائی ثنائی شکل کے غیر متغیر ہیں کیونکہ ع + غہ ک کا ممیز

$$\text{۴ غہ}^{3} - \text{ع غہ} + \text{جے}$$

(220)

ہے اور اسلئے ثلاثی نظام کے غیر متغیر ہیں

Δَ = + ۴ طاَ ۔ طا - ع Δ = جے

جہاں ع اور جے چار درجی کے غیر متغیر ہیں اور ع + غ ک کا ممیز حسب معمول اس شکل

Δ + غ طا + غ² طاَ + غ³ Δَ

میں لکھا گیا ہے۔

فرض کرو کہ مخروطی ع اور ک نقاط ا، ب، ج، د میں قطع کرتے ہیں جہاں یہ نقطے مساواتوں

لا / فہ² = ما / ۲ فہ = ے

سے متعین ہوتے ہیں جبکہ فہ یہ چار قیمتیں عہ، بہ، جہ، ضہ اختیار کرتا ہے جو ثنائی چار درجی کی اصلیں ہیں۔ اور فرض کرو کہ مشترک وتر ب ج، ا د؛ ج ا، ب د؛ ا ب، ج د؛ کے نقاطِ تقاطع علی الترتیب غ، ف، گ ہیں جہاں غ ف گ وہ مثلث ہے جو دونوں مخروطیوں کے لحاظ سے خود مزدوج ہے۔ اب خط ا ب کی مساوات کو (عہ بہ) = ۰ سے تعبیر کرنے اور اسی طرح کی ترقیم دیگر وتروں کے لئے استعمال کرنے سے ہمیں مخروطیوں کے نظریہ سے حاصل ہوتا ہے

ع + غ₁ ک = (بہ جہ) (عہ ضہ)، ع + غ₂ ک = (جہ عہ) (بہ ضہ)،

ع + غ₃ ک = (عہ بہ) (جہ ضہ)

جہاں غ₁، غ₂، غ₃ مساوات ۴ غ³ - ع غ + جے = ۰ کی اصلیں ہیں۔

ان مساواتوں میں ابتدائی متغیروں لا، ما کو داخل کرنے سے

ک ثنائی مربع کا معاوم ہوتا ہے اور ع دو درجی اجزائے ضربی کے ایک زوج میں تین مختلف طریقوں سے تحلیل کیا جا سکتا ہے جو چار درجی کے

محول کعبی کے حل پر منحصر ہیں۔ پس یہ معلوم ہوا کہ چار درجی کو اسکے دو دو دو درجی اجزائے ضربی میں تحلیل کرنا اور خطوں کے اُن جوڑوں کی تعیین کرنا جو دو مخروطیوں کے چار نقاط تقاطع میں سے گذرتے ہیں۔ یہ دونوں عملی مسئلے تماثل ہیں کیونکہ انمیں سے ہر ایک ایک ہی کعبی مساوات کے حل پر منحصر ہے۔

اب ہم یہ دکھائینگے کہ ع، ک کے مشترک خود عز دو ج مثلث کے اضلاع ثنائی نظام کے چھ درجی ہم متغیر کے دو درجی اجزائے ضربی کے متناظر ہیں۔ چونکہ ضلع ف گ ع کا قطبی ہے اس لئے ع (221)
کے محدد لاَ، ماَ، ےَ اِن مساواتوں (به جه)=۰، (عه ضه)=۰ کو حل کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔ پس

لاَ / (به + جه − عه − ضه) = ماَ / ۲(به جه − عه ضه) = ےَ / (به جه (عه + ضه) − عه ضه (به + جه))

اِن مساواتوں سے لاَ، ماَ، ےَ کی جو قیمتیں ملتی ہیں انکو ع کے قطبی

لاَ ے − ما ماَ / ۲ + لا ےَ = ۰

میں لاَ، ماَ، ےَ کی بجائے درج کرنے سے یہ مساوات شکل

(به + جه − عه − ضه) لا − (به جه − عه ضه) ما + {به جه (عه + ضه) − عه ضه (به + جه)} ے = ۰

میں بیان ہوتی ہے۔

اب ابتدائی متغیروں لا، ما کو اسمیں داخل کرنے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ یہ جملہ چھ درجی ہم متغیر (دفعہ ۱۸۳) کا ایک دو درجی جزو ضربی ہے۔ پس یہ ثابت ہو گیا کہ وہ نقطے جہاں ف گ، ک کو قطع کرتا ہے اس دو درجی مساوات

(به + جه − عه − ضه) فه^۲ − ۲ (به جه − عه ضه) فه + به جه (عه + ضه) − عه ضه (به + جه) = ۰

کو حل کرنے سے متعین ہوتے ہیں اور اسلئے ک پر کے چھ نقطے جو چھ درجی

ہم متغیر کی اصلوں کے متناظر ہیں وہ نقطے ہیں جہاں یہ مخروطی ع اور ک کے مشترک خود مزدوج مثلث کے اضلاع سے ملتا ہے۔

ک پر کے اُن نقطوں کو جو حیسوی کی اصلوں کے متناظر ہیں متعین کرنے کے لئے ہم مخروطیوں ع اور ک کے ہم متغیر مخروطی فا (سامن کی (Conic Section) دفعہ ۳۷۸) کو منسوب کرتے ہیں اس طرح

$$-\tfrac{1}{4}\,\text{فا} \equiv (\text{اج}-\text{ب}^2)\,\text{لا}^2 + (\text{ب د}-\text{ج}^2)\,\text{ما}^2 + (\text{ج ص}-\text{د}^2)\,\text{ے}^2$$
$$+ (\text{ب ص}-\text{ج د})\,\text{ما ے} + (\text{ا ص}-2\,\text{ب د}+\text{ج}^2)\,\text{ے لا} + (\text{ا د}-\text{ب ج})\,\text{لا ما}$$

اور ابتدائی متغیروں لا، ما کو داخل کرنے سے

$$\text{ھ}\,(\text{لا}،\ \text{ما})^2 = -\tfrac{1}{4}\,\text{ت}$$

نیز چونکہ مخروطی فا، ع اور ک کو انکے مشترک ماسوں کے نقاط تماس پر قطع کرتا ہے اسلئے ک پر کے وہ نقطے جو حیسوی کی اصلوں کے متناظر ہیں وہ ہیں جو اس طور پر معین ہوتے ہیں۔

برعکس اس کے حیسوی $\text{ع}_{11}\,\text{ع}_{22} - \text{ع}_{21}^2$ کو ثلاثی متغیروں میں مستحیل کرنے سے وہ ہو جاتا ہے

$$(\text{ا لا}+\text{ب ما}+\text{ج ے})(\text{ج لا}+\text{د ما}+\text{ص ے}) - (\text{ب لا}+\text{ج ما}+\text{د ے})^2 \equiv -\tfrac{1}{4}\,\text{فا}$$

جو ک پر کے تمام نقطوں کیلئے قطبی $\text{لاَ}\,\text{ع}_1 + \text{ماَ}\,\text{ع}_2 + \text{ےَ}\,\text{ع}_3$ کا لفاف ہے۔ فا کی یہ تعیین، ع اور ک کے غیر متغیر طا کے معدوم ہونیکی وجہ سے عمل میں آئی ہے۔ (222)

۲۱۵ — اب ہم ثنائی نظام کو ثلاثی نظام میں تحویل کرنیکے لئے چند

عام استحالات بیان کرتے ہیں جو دونوں نظاموں کے ہمدوں کا مقابلہ کرنے میں مفید ثابت ہونگے۔

(۱) دونوں نظاموں کا خطی استحالہ۔

اگر ثنائی متغیروں کو خطی طور پر مستحیل کیا جائے تو چونکہ نئے متغیر پرانے متغیروں کی رقوم میں یہ ہیں

لاَ = لہ لا + مہ ما ، ماَ = لہَ لا + مہَ ما ،

اسلئے نئے ثلاثی متغیر پرانے ثلاثی متغیروں کی رقوم میں حسب ذیل شکل میں بیان ہونگے :-

لاَ = لہ² لا + لہ مہ ما + مہ² ے ،

ماَ = ۲ لہ لہَ لا + (لہ مہَ + لہَ مہ) ما + ۲ مہ مہَ ے ،

ےَ = لہَ² لا + لہَ مہَ ما + مہَ² ے ،

اور اسلئے

۴ ےَ لاَ − ماَ² = (لہ مہَ − لہَ مہ)² (۴ ے لا − ما²) ،

جس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ لا، ما، ے کے اوپر کے مخصوص خطی استحالہ سے ثابت مخروطی کی شکل نہیں بدلتی اور برعکس اسکے اس سے ابتدائی ثنائی متغیروں کا عام خطی استحالہ حاصل ہوتا ہے۔ اس استحالہ کا مقیاس (لہ مہَ − لہَ مہ)³ ہے (دیکھو مثال ۴ صفحہ ۱۴۱)۔

(۲) جزوی تفرقی سروں کا استحالہ۔

دفعہ ۲۱۲ کے ابدال سے اگر ع (لا، ما)، عَ ہوجائے تو

جف ع / جف لا = ۲ لا (جف عَ / جف لاَ) + ۲ ما (جف عَ / جف ماَ)

اور اسلئے

$$\frac{\text{جف}^{2}\,\text{ع}}{\text{جف لا}^{2}} = ۲\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} + ۴\,\text{لا}\left(\text{لا}\,\frac{\text{جف}^{2}\,\text{ع}}{\text{جف لا}^{2}} + \text{ما}\,\frac{\text{جف}^{2}\,\text{ع}}{\text{جف لا جف ما}} + \text{ے}\,\frac{\text{جف}^{2}\,\text{ع}}{\text{جف لا جف ے}}\right)$$

$$- ۴\,\text{ے}\left(\frac{\text{جف}^{2}\,\text{ع}}{\text{جف لا جف ے}} - \frac{\text{جف}^{2}\,\text{ع}}{\text{جف ما}^{2}}\right)،$$

$$= ۴\,\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\left(\text{لا}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} + \text{ما}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} + \text{ے}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ے}}\right)$$

$$- ۲\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} - ۴\,\text{ے}\,\Pi(\text{ع})،$$

جہاں Π عمل $\frac{\text{جف}^{2}}{\text{جف ے جف لا}} - \frac{\text{جف}^{2}}{\text{جف ما}^{2}}$ کو ظاہر کرنیکے لئے استعمال کیا گیا ہے۔

پس چونکہ ع کا درجہ ن اور اسلئے ع کا $\frac{1}{2}$ن ہے ہمیں حاصل ہوتا ہے (223)

$$\frac{\text{جف}^{2}\,\text{ع}}{\text{جف لا}^{2}} = ۲(\text{ن}-۱)\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} - ۴\,\text{ے}\,\Pi(\text{ع})،$$ اور اسی طرح

$$\frac{\text{جف}^{2}\,\text{ع}}{\text{جف لا جف ما}} = ۲(\text{ن}-۱)\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} + ۲\,\text{ما}\,\Pi(\text{ع})،$$

$$\frac{\text{جف}^{2}\,\text{ع}}{\text{جف ما}^{2}} = ۲(\text{ن}-۱)\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ے}} - ۴\,\text{لا}\,\Pi(\text{ع})،$$

اگر استحالہ ایسا ہو کہ $\Pi(\text{ع})$ تماثلاً معدوم ہوتا ہے تو دوسرے رتبہ کے تفرقی سروں سے کے استحالہ کے لئے حسب ذیل سادہ قیمتیں ملتی ہیں:

$$\frac{\text{جف}^{2}\,\text{ع}}{\text{جف لا}^{2}} = ۲(\text{ن}-۱)\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}،\quad \frac{\text{جف}^{2}\,\text{ع}}{\text{جف لا جف ما}} = ۲(\text{ن}-۱)\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}$$

$$\frac{\text{جف}^{2}\,\text{ع}}{\text{جف ما}^{2}} = ۲(\text{ن}-۱)\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ے}}$$

ان قیمتوں سے آسانی کے ساتھ معلوم ہو سکتا ہے

$$\frac{1}{2}\left(\bar{\text{لا}}\,\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}+\bar{\text{ما}}\,\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\right)^{2}\text{ع}=(\text{ن}-1)\left(\bar{\text{لا}}\,\frac{\text{جف}^{2}\text{ع}}{\text{جف لا}^{2}}+\bar{\text{ما}}\,\frac{\text{جف}^{2}\text{ع}}{\text{جف ما}^{2}}+\bar{\text{ے}}\,\frac{\text{جف}^{2}\text{ع}}{\text{جف ے}^{2}}\right)$$

جس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ ثنائی نظام کا دوسرا استخرجہ ثلاثی نظام کے پہلے قطبی میں مستحیل ہوتا ہے۔

اب ہم ثنائی اور ثلاثی متغیروں کے درمیانی ربط پر عود کرتے ہیں اور یہ ثابت کرتے ہیں کہ کثیر درجی کے بنیادی خواص دونوں نظاموں میں متناظر ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ ہمارے پاس عام طور پر متغیروں کے درمیان تین مساواتیں ہیں

$$\text{لا}'=\text{فہ}_{1}(\text{لا}،\text{ما})،\quad \text{ما}'=\text{فہ}_{2}(\text{لا}،\text{ما})،\quad \text{ے}'=\text{فہ}_{3}(\text{لا}،\text{ما})$$

ہم دیکھ چکے ہیں کہ ان مساواتوں کو شکل

$$\text{لا}'=\text{لا}^{2}،\quad \text{ما}'=2\,\text{لا}\,\text{ما}،\quad \text{ے}'=\text{ما}^{2}$$

میں تحویل کیا جاسکتا ہے۔ لا ما کو ساقط کرنے سے ہمیں لا' ما' ے' میں ایک مساوات ملتی ہے۔ استحالہ شدہ ثنائی مساوات سے لا' ما' ے' میں ایک اور رشتہ ملتا ہے۔ اس مساوات کی اصلیں مذکورہ دو منحنیوں کے تقاطع سے تعبیر ہونگی۔ ان دو تعبیروں میں جس میں ایک تو خط مستقیم پر کے نقطے ہیں اور دوسرے مخروطی پر کے نقطے ہیں جو مشابہت ہے وہ ہندسۂ تحلیلی (224)
کے طالب علم پر بخوبی واضح ہوگی۔ ہم ایک ایسی مثال دینگے جس سے یہ مشابہت سمجھ میں آجائے گی۔ ہم ثابت کرینگے کہ کس طرح ع کی ایک دوہری اصل سے شش درجی ہم متغیر کی پہیری اصل حاصل ہوتی ہے

[1] دفعہ ۱۷۴

(مثال ۲ صفحہ ۳۸۵) کیونکہ ع اور ک کے قطبی مثلث کے دو اضلاع مخروطی کو مثلث کے راس پر مس کرتے ہیں اور تیسرے ضلع کا قطب مماس پر کا ایک نقطہ ہے۔

(۳) جیکوبی کا استحالہ۔ کسی نظام ع، و کا جیکوبی

ع، و، ک کے جیکوبی میں مستحیل ہوتا ہے جہاں ع، و کی استحالہ شدہ قیمتیں ع، و ہیں لیکن ان استحالوں کا ایسا ہونا ضروری نہیں ہے کہ جسکی وجہ سے $\pi(\text{ع}) = 0$، $\pi(\text{و}) = 0$ ہو۔ کیونکہ

$$\text{ج}(\text{ع}،\text{و}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} & \dfrac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} \\ \dfrac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} & \dfrac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} \end{vmatrix} = \frac{1}{(\text{ن}-1)(\text{نَ}-1)} \begin{vmatrix} \text{ا لا} + \text{ب ما} & \text{ب لا} + \text{ج ما} \\ \text{اَ لا} + \text{بَ ما} & \text{بَ لا} + \text{جَ ما} \end{vmatrix}$$

جہاں ع اور و کے درجے ن اور نَ ہیں اور دوسرے تفرقی سروں کو تعبیر کرنے کے لئے ا، ب، ج استعمال کئے گئے ہیں۔ پس

$$\text{ج}(\text{ع}،\text{و}) = \frac{1}{(\text{ن}-1)(\text{نَ}-1)} \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{اَ} & \text{بَ} & \text{جَ} \\ \text{ما}^2 & -\text{لا ما} & \text{لا}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} & \dfrac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} & \dfrac{\text{جف ع}}{\text{جف ے}} \\ \dfrac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} & \dfrac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} & \dfrac{\text{جف و}}{\text{جف ے}} \\ \dfrac{\text{جف ک}}{\text{جف لا}} & \dfrac{\text{جف ک}}{\text{جف ما}} & \dfrac{\text{جف ک}}{\text{جف ے}} \end{vmatrix}$$

آخری مقطع اس سے پہلے کے مقطع سے (۲) کے استحالہ کے ذریعہ حاصل ہوا ہے اور آخری صف کو $4\pi(\text{ع})$ سے ضرب دیکر پہلی صف میں جمع کیا گیا ہے اور آخری صف کو $4\pi(\text{و})$ سے ضرب دیکر دوسری صف میں جمع کیا گیا ہے۔

(۴) ھیسوی اور دوسرے ہم رو۔

ھیسوی کے استحالہ کے لئے ہم جانتے ہیں کہ

$$\text{ن}^{۲}(\text{ن}-۱)^{۲}\,\text{ھ}(\text{ع})=\frac{\text{جف}^{۲}\text{ع}}{\text{جف لا}^{۲}}\,\frac{\text{جف}^{۲}\text{ع}}{\text{جف ما}^{۲}}-\left(\frac{\text{جف}^{۲}\text{ع}}{\text{جف لا جف ما}}\right)^{۲}$$

$$=۴(\text{ن}-۱)^{۲}\left\{\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ی}}-\left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\right)^{۲}\right\}\ \text{اگر}\ \Pi(\text{ع})=۰$$

جس سے یہ ثابت ہے کہ ایک منحنی جسمیں ھیسوی مستحیل ہو سکتا ہے ع کے (225)
لحاظ سے ثابت مخروطی پر کے مماسوں کے قطبوں کا طریق ہے۔

ثنائی ہم رو

$$(\text{لا ما}'-\text{لا}'\text{ ما})^{۲}$$

کے جواب میں خط

$$\text{لا ی}'-\tfrac{۱}{۲}\text{ما ما}'+\text{ی لا}'$$

ہے جو ثابت مخروطی ک کے لحاظ سے لا' ما' ی' کا قطبی ہے۔

اگر دو درجی

$$\text{ا لا}^{۲}+۲\text{ب لا ما}+\text{ج ما}^{۲}\ ،\ \text{اَ لا}^{۲}+۲\text{بَ لا ما}+\text{جَ ما}^{۲}$$

استحالہ کے بعد خطوط ل اور م ہو جائیں تو جیکوبی ج (ل، م، ک) اِن کے تقاطع کے قطبی خط کو متعین کرتا ہے جو ثابت مخروطی ک کے لحاظ سے ہے۔

اگر $\Pi(\text{ع})=۰$، $\Pi(\text{و})=۰$ تو ہم متغیر (۱، ۲) ع، و کے متناظر صریحاً منحنی

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف ی}}+\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ی}}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}-۲\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}}$$

حاصل ہوتا ہے جسکو صفر کے مساوی رکھنے سے وہ شرط ملتی ہے کہ ع اور و کے لحاظ سے ایک نقطہ کے قطبی خطوط ثابت مخروطی کے لحاظ سے مزدوج ہوں۔ اسس ہم متغیر کو شکل $\Pi(\text{ع و})$ میں لکھا جاسکتا ہے

کیونکہ Π (ع) ≡ ۰، Π (و) ≡ ۰ ۔۔

۲۱۶ — جب دفعہ ۲۱۲ کا استحالہ جفت درجہ ۲ م کے کثیر درجی ف (لا، ما) پر استعمال کیا جاتا ہے تو یہ واضح ہے کہ اس کثیر درجی کی اصلیں ہندسی طور پر م ویں درجہ کے ایک منحنی اور ثابت مخروطی ک کے نقاطِ تقاطع سے متعین ہونگی ۔ اگر کثیر درجی کا درجہ طاق ہے تو استحالہ کو عمل میں لانے سے پیشتر اسکا مربع لے لینا چاہئے۔ جیسا کہ پہلے بیان کردیا گیا ہے ۔ تب اسکی اصلیں ہندسی طور پر متناظر منحنی اور ثابت مخروطی کے نقاطِ تماس سے متعین ہونگی ۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ کثیر درجی ع (لا، ما) کو مستحیل کرنے میں استحالہ کے طریقہ کو بدلنے سے ثلاثی شکلوں کی ایک تعداد حاصل ہوسکتی ہے نیز اگر ان شکلوں میں سے ایک ع ہو تو ع + فم-۲ ک بھی (جسمیں اب فم-۲ کے سر اختیاری ہیں) ع (لا، ما) کا ایک استحالہ ہوگا کیونکہ یہ شکل ابتدائی متغیروں کو داخل کرنے سے پھر کثیر درجی ع (لا، ما) کی طرف رجعت کریگی ۔ مزید برآں ہر ممکن استحالہ قبل الذکر شکل میں شامل ہے کیونکہ جیسا ہم دیکھ چکے ہیں استحالہ کے عمل کی تکمیل میں تبدیلی اس وجہ سے پیدا ہوتی ہے کہ ایک جزو ضربی ۴ لا۲ ما۲ کی بجائے ۴ لا ے یا ۴ لا ے ۔ ک رکھا جاسکتا ہے اور اسلئے دو نتیجوں کا فرق ایک استحالہ شدہ ایسا جملہ ہوتا ہے جس کا جزو ضربی ک ہے ۔ یہ دیکھنا ضروری ہے کہ ان متعدد ثلاثی شکلوں کے درمیان ہمیشہ ایک اور صرف ایک شکل ایسی ہے کہ Π (ع) ≡ ۰ ۔ اور اسلئے جیسا کہ ہم ثابت کرینگے یہ شکل ایسی ہے کہ ک کے ساتھ ملکر اسکے غیر متغیر اور ہم متغیر (226)

ثنائی کثیر درجی کے بھی غیر متغیر اور ہم متغیر ہیں ۔ اس شکل کو معلوم کرنیکے لئے دفعہ سابق کا عامل TT لو جو ک کی ماسی شکل میں تفرقی علامتوں $\frac{1}{2}$ عف$_{لا}$، $\frac{1}{2}$ عف$_{ما}$، $\frac{1}{2}$ عف$_{ی}$ کو درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ تب ع + فہ$_{م-۲}$ ک پر عامل TT سے عمل کرنے سے درجہ م - ۲ کا ایک تفاعل ہ$_{م-۲}$ حاصل ہوتا ہے اور اس کے سروں کو صفر کے مساوی رکھنے سے اتنی مساواتیں ملجاتی ہیں جو فہ$_{م-۲}$ کے سروں کو متعین کرنیکے لئے کافی ہیں ۔ بس ایسی ایک شکل موجود ہوتی ہے ۔

لیکن یہ دیکھنے کا کہ ایسی صرف ایک شکل موجود ہے اور اسکے اجزائے ترکیبی کو حاصل کرنیکا بہتر طریقہ حسب ذیل ہے ۔ متناظر ثنائی اور ثلاثی متغیروں کو ہم لا$_۱$، لا$_۲$ اور لا$_۱$، لا$_۲$، لا$_۳$ سے تعبیر کرتے ہیں جہاں لا$_۱$ = لا$_۱^۲$، لا$_۲$ = ۲ لا$_۱$ لا$_۲$، لا$_۳$ = لا$_۲^۲$ اور متناظر تفرقی علامتوں کو عف$_۱$، عف$_۲$ اور عف$_۱$، عف$_۲$، عف$_۳$ سے تعبیر کرتے ہیں ۔ م ویں درجہ کے ایک ثلاثی کثیر درجی ع کو

$$ع \equiv \sum \text{ا}_{عہ\ بہ\ جہ\ ضہ \ldots}\ لا_{عہ}\ لا_{بہ}\ لا_{جہ}\ لا_{ضہ} \ldots$$

سے تعبیر کرتے ہیں جہاں عہ، بہ، جہ، ضہ، ... م حروف ہیں اور شکل کو عہ، بہ، جہ، ضہ، ... کی ۱ سے ۳ تک تمام قیمتوں کے لئے جمع کرنا چاہئے

عہ، بہ، جہ، ضہ، . . . کی قیمتوں کے ایک خاص نظام کو کسی طرح ترتیب
دینے سے سر $\text{ا}_{\text{عہ بہ جہ ضہ}\ldots}$ کی قیمت میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی۔
چونکہ عہ، بہ، جہ، ضہ، . . . میں سے ہر ایک اکائی کے مساوی
ہو سکتا ہے اسلئے

$$\text{عف}_1\,\epsilon \equiv \text{م}\,\text{ا}_{\text{ا بہ جہ ضہ}\ldots}\,\text{لا}_{\text{بہ}}\,\text{لا}_{\text{جہ}}\,\text{لا}_{\text{ضہ}}\ldots\ldots$$

$$\text{عف}_1\,\text{عف}_2\,\epsilon = \text{م}(\text{م}-1)\,\text{ا}_{31\,\text{جہ ضہ}\ldots}\,\text{لا}_{\text{جہ}}\,\text{لا}_{\text{ضہ}}\ldots\ldots$$

$$(\text{عف}_1\,\text{عف}_2-\text{عف}_2^2)\,\epsilon=\text{م}(\text{م}-1)(\text{ا}_{31\,\text{جہ ضہ}\ldots}-\text{ا}_{22\,\text{جہ ضہ}\ldots})\,\text{لا}_{\text{جہ}}\,\text{لا}_{\text{ضہ}}\ldots$$

پس اگر $\Pi(\epsilon)\equiv$ ۔ تو وہ تمام سر $\text{ا}_{\text{عہ بہ جہ ضہ}\ldots}$ مساوی ہیں جو ۳۱ کی بجائے
۲۲ رکھنے سے حاصل ہوتے ہیں۔ اب چونکہ $\text{لا}_1=\text{لا}_1^2$، $\text{لا}_2=2\,\text{لا}_1\text{لا}_2^1$، $\text{لا}_2=\text{لا}_2^2$ (227)
ایسے تمام سر جو مساوی ہونے چاہئیں ثنائی شکل ۶ میں ایک ہی رقم
کے مستحیل ہونے سے پیدا ہوتے ہیں اور اسلئے ہم صرف ایک طریقہ سے
ایسی ترکیب کر سکتے ہیں کہ یہ سر مساوی ہوں۔ مثلاً چار درجی ۶ کو مستحیل
کرنے میں رقم $6\,\text{ا}_{1,1,2,2}\,\text{لا}_1^2\,\text{لا}_2^2$ بدلکر $2\,\text{ا}_{1,3}\,\text{لا}_1\,\text{لا}_3+\text{ا}_{2,2}\,\text{لا}_2^2$ ہو جاتی ہے

جہاں $\text{ا}_{1,3}$ اور $\text{ا}_{2,2}$ صرف رشتہ $2\,\text{ا}_{1,3}+4\,\text{ا}_{2,2}=6\,\text{ا}_{1,1,2,2}$ پورا کرتے ہیں ورنہ
اختیاری ہیں۔

لیکن اگر $\Pi(\epsilon)\equiv$ ۔ تو جیسے اوپر بیان ہوا $\text{ا}_{1,3}=\text{ا}_{2,2}$ اور اسلئے $\text{ا}_{1,3}=\text{ا}_{2,2}=\text{ا}_{1,1,2,2}$

یہ دیکھنے کے بعد ء کو صرف ایک طریقہ پر اس طرح مستحیل کیا جا سکتا ہے کہ
$ٹ(ء) \equiv ۰$ ۔ اب ہم ء اور ع کے سروں میں رشتہ دریافت کر سکتے ہیں
جو بہت سادہ ہے۔ سروں کے لئے ایک دوسری ترقیم اختیار کرو اور

فرض کرو کہ $ء \equiv ا_{۸،۰} لا_۱^۸ + ۸ ا_{۷،۱} لا_۱^۷ + \ldots$ بدلکر

$$ع \equiv ا_{۴،۰،۰} لا_۱^۴ + ۴ ا_{۳،۱،۰} لا_۱^۳ لا_۲ + \ldots$$

ہو جاتا ہے ۔ $لا_۱ لا_۲^۲ لا_۳$ کے سر کا حرفی حصہ $ا_{۱،۲،۱} \equiv \frac{۱}{\underline{|۴}}$ عف$_۱^۲$ عف$_۲$ عف$_۳$ ع

اور چونکہ $ٹ(ع) \equiv ۰$ اور اسلئے

عف$_۱^۲$ = ۲ (ن - ۱) عف$_۱$ عف$_۲$ = ۲ (ن - ۱) عف$_۲$ عف$_۲^۲$ = ۲ (ن - ۱) عف$_۳$

اسلئے $\frac{۱}{\underline{|۴}}$ عف$_۱^۲$ عف$_۲$ عف$_۳$ ع = $\frac{۱}{۱\times۲\times۳\times۲\times۵\times۲\times۷\times۲\times\underline{|۴}}$ عف$_۱^۲$ عف$_۱^۲$ عف$_۱$ عف$_۲$ عف$_۲^۲$ ء

= $\frac{۱}{\underline{|۸}}$ عف$_۱^۵$ عف$_۲^۳$ ء

= $لا_۱^۵ لا_۲^۳$ کے سر کا حرفی حصہ $ا_{۵،۳}$

اسی طریقہ سے بالعموم ثابت کیا جا سکتا ہے کہ ع میں کی کسی رقم کے سر کا حرفی حصہ ء میں کی اُس رقم کے جس سے ع والی رقم بذریعۂ استحالہ پیدا ہوتی ہے سر کے حرفی حصہ کے مساوی ہے ۔

مثلاً چھ درجی کے لئے

$$ا_{۴،۰،۰} = ا_{۶،۰}،\ ا_{۲،۱،۲} = ا_{۵،۱}،\ ا_{۲،۰،۲} = ا_{۴،۲}،\ ا_{۱،۱،۲} = ا_{۳،۳}،\ ا_{۰،۲،۲} = ا_{۲،۴}،\ ا_{۰،۰،۴} = ا_{۰،۶}$$ وغیرہ ۔

اور آٹھ درجی کے لئے

ا۰۰۴ = ا۰۰۸، ا۰۱۳ = ا۱۰۳، ا۱۷ = ا۰۲۲، ا۲۶ = ا۱۱۲، ا۰۳۱ = ا۲۰۲، ا۳۵ = ا۰۴۰، ا۱۲۱ = ا۳۴۴ وغیرہ۔

اب ہم ثابت کرینگے کہ اگر ع، و، ط… بدلکر ع، و، ط… ہو جائیں اور Π(ع) ≡ ۰، Π(و) ≡ ۰، Π(ط) ≡ ۰… ہو تو ع، و، ط… کے ہمرد نظام ع، و، ط… اور ک ≡ ۴ سے $\text{لا} - \text{ما}^{۲}$ کے ہمرد میں مستحیل ہو جاتے ہیں۔ متغیروں کے متناظر جٹوں کو ہم $\text{لا}^{\text{ع}}_{۱}$، $\text{لا}^{\text{ع}}_{۲}$ اور $\text{لا}^{\text{ع}}_{۱}$، $\text{لا}^{\text{ع}}_{۲}$، $\text{لا}^{\text{ع}}_{۳}$ سے اور متناظر تفرقی علامتوں کو $\text{عف}^{\text{ع}}_{۱}$، $\text{عف}^{\text{ع}}_{۲}$ اور $\text{عف}^{\text{ع}}_{۱}$، $\text{عف}^{\text{ع}}_{۲}$، $\text{عف}^{\text{ع}}_{۳}$ سے تعبیر کریں گے۔ نیز ع ($\text{لا}^{\text{ع}}_{۱}$، $\text{لا}^{\text{ع}}_{۲}$) کو $\text{ع}_{\text{ع}}$ سے

ع ($\text{لا}^{\text{ع}}_{۱}$، $\text{لا}^{\text{ع}}_{۲}$، $\text{لا}^{\text{ع}}_{۳}$) کو $\text{ع}_{\text{ع}}$ سے اور تفرقی عوامل

$$\begin{vmatrix} \text{عف}^{\text{ع}}_{۱} & \text{عف}^{\text{ع}}_{۲} \\ \text{عف}^{\text{ب}}_{۱} & \text{عف}^{\text{ب}}_{۲} \end{vmatrix}$$
کو (ع، ب) سے اور
$$\begin{vmatrix} \text{عف}^{\text{ع}}_{۱} & \text{عف}^{\text{ع}}_{۲} & \text{عف}^{\text{ع}}_{۳} \\ \text{عف}^{\text{ب}}_{۱} & \text{عف}^{\text{ب}}_{۲} & \text{عف}^{\text{ب}}_{۳} \\ \text{عف}^{\text{ج}}_{۱} & \text{عف}^{\text{ج}}_{۲} & \text{عف}^{\text{ج}}_{۳} \end{vmatrix}$$
کو (ع، ب، ج) سے تعبیر کریں گے۔

اس لئے

$$(\text{ع، ب، ج})\,\text{ع}_{\text{ع}}\,\text{و}_{\text{ب}}\,\text{ط}_{\text{ج}} = \frac{۱}{۸\,(\text{ن}_{۱}-۱)(\text{ن}_{۲}-۱)(\text{ن}_{۳}-۱)} \begin{vmatrix} \text{عف}^{\text{ع}}_{۱}\text{عف}^{\text{ع}}_{۱} & \text{عف}^{\text{ع}}_{۱}\text{عف}^{\text{ع}}_{۲} & \text{عف}^{\text{ع}}_{۲}\text{عف}^{\text{ع}}_{۲} \\ \text{عف}^{\text{ب}}_{۱}\text{عف}^{\text{ب}}_{۱} & \text{عف}^{\text{ب}}_{۱}\text{عف}^{\text{ب}}_{۲} & \text{عف}^{\text{ب}}_{۲}\text{عف}^{\text{ب}}_{۲} \\ \text{عف}^{\text{ج}}_{۱}\text{عف}^{\text{ج}}_{۱} & \text{عف}^{\text{ج}}_{۱}\text{عف}^{\text{ج}}_{۲} & \text{عف}^{\text{ج}}_{۲}\text{عف}^{\text{ج}}_{۲} \end{vmatrix} \text{ع}_{\text{ع}}\,\text{و}_{\text{ب}}\,\text{ط}_{\text{ج}}$$

$$= \frac{۱}{۸\,(\text{ن}_{۱}-۱)(\text{ن}_{۲}-۱)(\text{ن}_{۳}-۱)} (\text{ع، ب})(\text{ع، ج})(\text{ب، ج})\,\text{ع}_{\text{ع}}\,\text{و}_{\text{ب}}\,\text{ط}_{\text{ج}}$$

جہاں $ن_1$، $ن_2$، $ن_3$ علی الترتیب ع، و، ط کے درجے ہیں۔

(۲)

$$\text{(ع، ب، ج)}\ \text{ع و ک}_{\text{ع ب ج}} = \frac{1}{2(ن_1-1)(ن_2-1)} \begin{vmatrix} \text{عف}_1^{\text{ع}} & \text{عف}_1^{\text{ب}} & \text{عف}_2^{\text{ع}} & \text{عف}_2^{\text{ب}} \\ \text{عف}_1^{\text{ب}} & \text{عف}_1^{\text{ع}} & \text{عف}_2^{\text{ب}} & \text{عف}_2^{\text{ع}} \\ 2\,\text{لا}_1^{\text{ج}}\,\text{لا}_2^{\text{ب}} - 2\,\text{لا}_1^{\text{ب}}\,\text{لا}_2^{\text{ج}} & & 2\,\text{لا}_1^{\text{ج}}\,\text{لا}_2^{\text{ع}} & \end{vmatrix} \text{ع}_{\text{ب}}$$

$$= \frac{1}{2(ن_1-1)(ن_2-1)}\ \Delta_{\text{ج ع}}\ \Delta_{\text{ج ب}}\ \text{(ع ب)}\ \text{ع}_{\text{ب}}$$

جہاں $\Delta_{\text{ج ع}} = \text{لا}_1^{\text{ج}}\,\text{عف}_2^{\text{ع}} + \text{لا}_2^{\text{ج}}\,\text{عف}_1^{\text{ع}}$

(۳) اسی طرح ہم آسانی سے دیکھ سکتے ہیں کہ

$$\text{(ع، ب، ج)}\ \text{ع ک}_{\text{ب ج}} = \frac{8}{ن_1-1}\left(\text{لا}_1^{\text{ب}}\,\text{لا}_2^{\text{ج}} - \text{لا}_1^{\text{ج}}\,\text{لا}_2^{\text{ب}}\right) \Delta_{\text{ب ع}}\ \Delta_{\text{ج ع}}\ \text{ع}_{\text{ع}}$$

چونکہ مساواتوں (۱)، (۲)، (۳) کے بائیں طرف والے عامل غیر متغیر عامل ہیں اس لئے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ شکل (ع، ب، ج) والی علامتوں کی کسی تعداد کا حاصل ضرب ثنائی نظام میں غیر متغیر عاملوں کے حاصل ضرب میں مستحیل ہوتا ہے اور اس لئے ثلاثی نظام کے تمام ہم رو ثنائی نظام کے بھی ہم رو ہیں۔

اس کے برعکس یہ دیکھنے کے لئے کہ ثنائی نظام کے تمام ہم رو ثلاثی نظام کے بھی ہم رو ہیں، ہم یہ ثابت کریں گے کہ متغیروں کے جٹوں کو یکساں بنا دینے کے بعد شکل (ع ب) والے عاملوں کی کسی تعداد کا حاصل ضرب شکل (ع ب ج) والے عاملوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔ یہاں ج مقدار $\text{ک}_{\text{ج}}$ سے متعلق ہے اور ایک عددی جزو ضربی سے مضروب ہے۔

مساوات (۲) کی رو سے (ع، ب، ص) (ج، ض، ضا) $\text{ع}_{\text{ع}}\ \text{ع}_{\text{ج}}\ \text{و}_{\text{ب}}\ \text{و}_{\text{ض}}\ \text{ک}_{\text{ص}}\ \text{ک}_{\text{ضا}}$

(229)

$$= \frac{1}{(\text{ن}_1-1)(\text{ن}_2-1)} \underset{\text{ضاجه}}{\Delta}\ \underset{\text{ضاضه}}{\Delta} (\text{جه ضه})\ \frac{1}{(\text{ن}_1-1)(\text{ن}_2-1)} \underset{\text{صه به}}{\Delta}\ \underset{\text{صه عه}}{\Delta} (\text{عه به})$$

چونکہ بائیں طرف لاحقوں صہ اور ضا والے متغیروں کے لحاظ سے تفرق کا کوئی عمل نہیں ہے اس لئے عاملوں کو جس ترتیب میں چاہیں لیا جاسکتا ہے

فرض کرو کہ ہم عامل $\underset{\text{ضاضه}}{\Delta}$ کو لیتے ہیں۔ اب چونکہ بعد میں لاحقوں ضہ یا ضا والے متغیروں کے لحاظ سے تفرق کا عمل نہیں ہے اور بالآخر متغیروں کے تمام جٹوں کو یکساں بنا دینا ہے اس لئے $\underset{\text{ضاضه}}{\Delta}$ میں ضا کو ضہ کے مساوی رکھدیا جاسکتا ہے اور اس لئے $\underset{\text{ضاضه}}{\Delta}$ کی بجائے ن٫ - ۱ رکھا جاسکتا ہے۔ $\underset{\text{ضاجه}}{\Delta}$، $\underset{\text{صه به}}{\Delta}$، $\underset{\text{صه عه}}{\Delta}$ کے ساتھ بھی اسی طرح کا عمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ جب بالآخر متغیروں کے جٹوں کو یکساں بنا دیا جاتا ہے تو

$$(\text{عه به})(\text{جه ضه}) = (\text{عه، به، صه})(\text{جه، ضه، ضا})$$

اوپر کے عمل میں ہم نے یہ مان لیا ہے کہ عہ $\neq$ جہ اور بہ $\neq$ ضہ اور مطلوبہ نتیجہ حاصل کرنے کے لئے ہم صہ کو کبھی ضا کے مساوی نہیں لیتے۔ اگر ہم عہ = جہ لیں تو

$$(\text{عه به صه})(\text{عه ضه ضا})$$

$$= \frac{1}{(\text{ن}_1-3)(\text{ن}_2-1)} \underset{\text{ضاعه}}{\Delta}\ \underset{\text{ضاضه}}{\Delta} (\text{عه ضه})\ \frac{1}{(\text{ن}_1-1)(\text{ن}_2-1)} \underset{\text{صه به}}{\Delta}\ \underset{\text{صه عه}}{\Delta} (\text{عه جه})$$

$$= \frac{1}{(\text{ن}_1-3)(\text{ن}_1-1)(\text{ن}_2-1)} \underset{\text{ضاعه}}{\Delta}\ \underset{\text{صه به}}{\Delta}\ \underset{\text{ضاضه}}{\Delta}\ \underset{\text{صه عه}}{\Delta} (\text{عه به})(\text{عه ضه})$$

پہلے کی طرح $\underset{\text{ضاضه}}{\Delta}$، $\underset{\text{صه به}}{\Delta}$ میں سے ہر ایک کی بجائے (ن - ۱) رکھا جاسکتا ہے

اور $\Delta_{\text{صہ عہ}}$ ، $\Delta_{\text{ضاعہ}}$ کو پھیلانے کے بعد اس میں صہ اور ضا کی بجائے عہ

رکھا جا سکتا ہے اور اسلئے حاصل $\Delta_{\text{صہ عہ}}\,\Delta_{\text{ضاعہ}}$ کی بجائے (ن۱ - ۲) (ن۱ - ۳) رکھا جا سکتا ہے۔ اسطرح جب عمل کی تکمیل کی جاتی ہے اور تمام متغیروں کے جٹوں کو یکساں بنا دیا جاتا ہے تو اوپر کی مساوات میں بائیں طرف والی رقم

$$= \frac{\text{ن}_1 - 2}{\text{ن}_1 - 1}\ (\text{عہ بہ})(\text{عہ ضہ})\ \text{ءٔ بٔ شٔہ}$$

اب یہ علانیہ دیکھا جا سکتا ہے کہ شکل (عہ بہ) والے عاملوں کی کسی تعداد کا (230)
حاصل ایک عددی جزو ضربی کے لئے وہی ہوتا ہے جو شکل (عہ بہ صہ) والے متناظر عاملوں کا۔ یہاں صہ ، کَ صہ سے متعلق ہے اور صہ کی کوئی دو قیمتیں مساوی نہیں ہیں۔ پس یہ ثابت ہو گیا کہ ثنائی نظام کے تمام ہم رو ثلاثی نظام کے بھی ہم رو ہیں ۔

۲۱۷ ۔ چار درجی اور دو درجی کا مخلوط نظام ۔ اس ثنائی نظام کو مستحیل کرنے سے دو مخروطیوں اور ایک خط سے ترکیب یافتہ ایک ثلاثی نظام ملتا ہے اور سادگی کی خاطر ہم فرض کرینگے کہ یہ مخروطی اپنے مشترک خود مزدوج مثلث کے حوالے سے لئے گئے ہیں۔ چار درجی اور دو درجی کی ثلاثی شکلوں کو علی الترتیب ع اور ل سے تعبیر کرنے اور اسکا خیال رکھنے سے کہ استحالہ ایسا ہے جسکے لئے $\Pi(\text{ع}) \equiv 0$. یعنے ایسا ہے کہ کَ کی مماسی مساوات میں تفرقی علامتیں رکھنے اور ع پر عمل کرنے سے حاصل متماثلہ صفر ہو جاتی ہے یعنی استحالہ ایسا ہے کہ ع + غہ کَ کے ممیز میں غہ کا سر متماثلاً صفر ہے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{ع} = \text{ا}\,\text{لا}^2 + \text{ب}\,\text{ما}^2 + \text{ج}\,\text{ئے}^2 ،\quad \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} = 0 ،$$

ک = لا² + ما² + ے² ، ب ج + ج ا + ا ب = ع₂ ،

ل = ع لا + ب ما + ج ے ، ا ب ج = ع₃ ،

اب ہم اس نظام کے خطی ہم متغیر معلوم کرینگے۔ چونکہ ک کے لحاظ سے ل کے قطب کے محدد ع، ب، ج ہیں اس لئے اس نقطہ کا قطبی بلحاظ ھ کے یہ ہے

ا ع لا + ب ب ما + ج ج ے ≡ م

جو پہلا ہم متغیر ہے۔ اسی طرح م کے ساتھ سلوک کرنے سے چونکہ بلحاظ ک کے اس کے قطب کے محدد ا ع، ب ب، ج ج ہیں اس لئے اس نقطہ کا قطبی بلحاظ ع کے ا² ع لا + ب² ب ما + ج² ج ے ≡ ن ہے جو دوسرا ہم متغیر ہے (دیکھو صفحہ ۳۶۵)۔ ان سے زیادہ غیر تابع خطی ہم متغیر اس طریقہ سے اخذ نہیں کئے جا سکتے کیونکہ اس طور پر اخذ کردہ تیسرا ہم متغیر ہوگا

ا³ ع لا + ب³ ب ما + ج³ ج ے = ا (ب ج - ع₂) ع لا + ب (ج ا - ع₂) ب ما

+ ج (ا ب - ع₂) ج ے

اور اسلئے یہ ل اور م کی رقوم میں ع₃ ل - ع₂ م میں بیان ہو سکتا ہے۔ لیکن تین اور خطی ہم متغیر لَ، مَ، نَ حاصل کئے جا سکتے ہیں اگر ہم ل، م، ن کے قطب بلحاظ ک کے لیں اور انہیں سے دو دو کو ملا لیں یہ نظام ان جیکوبیوں

بج (م، ن، ک)، بج (ن، ل، ک)، بج (ل، م، ک) (231)

سے بیان ہو سکتا ہے۔ پس یہیں چھ ہم متغیر حاصل ہوئے ل، م، ن اور لَ، مَ، نَ۔ دیگر تمام ہم متغیر ان میں تحویل ہو سکتے ہیں مثلاً

$$ت_ن \equiv ا^ن عہ لا + ب^ن بہ ما + ج^ن جہ ے$$

$$= ا^{ن-۲}(ب ج - ع_۲) عہ لا + ب^{ن-۲}(ج ا - ع_۲) بہ ما + ج^{ن-۲}(ا ب - ع_۲) جہ ے$$

$$= ع_۳ ت_{ن-۳} - ع_۲ ت_{ن-۲}$$

نیز $ب ج\, عہ لا + ج ا\, بہ ما + ا ب\, جہ ے = ع_۲ ل + ع_۳ م + ع_۲ ن$

کیونکہ $ب ج = ا^۲ + ع_۲ ،\ ج ا = ب^۲ + ع_۲ ،\ ا ب = ج^۲ + ع_۲$

اسی طرح $ب^ن ج^ن عہ لا + ج^ن ا^ن بہ ما + ا^ن ب^ن جہ ے$ کو اس شکل $ا ل + ب م + ج ن$ میں تحویل کیا جا سکتا ہے اور دیگر تحویلات میں جو درپیش ہوتے ہیں کوئی اشکال نہیں ہوتی۔

جب ان چھ ہم متغیروں کو مستخیل کیا جاتا ہے تو ان سے ثنائی نظام میں چھ دو درجی ہم متغیر حاصل ہوتے ہیں۔

اس نظام کے چھ غیر متغیر ہیں لیکن ان میں سے صرف تین خاص غیر متغیر ہیں۔ ان کو حاصل کرنے کے لئے فرض کرو کہ وہ شرط کہ $لہ ل + مہ م + نہ ن$ مخروطی ک کو مس کرے یہ ہے

$$د_. لہ^۲ + د_۲ مہ^۲ + د_۴ نہ^۲ + ۲ د_۳ مہ نہ + ۲ د_۲ نہ لہ + ۲ د_۱ لہ مہ = ۰$$

اسلئے پانچ غیر متغیر $د_. ، د_۱ ، د_۲ ، د_۳ ، د_۴$ حاصل ہوتے ہیں جہاں

$د_ن \equiv ا^ن عہ^۲ + ب^ن بہ^۲ + ج^ن جہ^۲$ اور انمیں سے صرف تین غیر تابع ہیں کیونکہ

$$د_ن = ا^{ن-۲}(ب ج - ع_۲) عہ^۲ + ب^{ن-۲}(ج ا - ع_۲) بہ^۲ + ج^{ن-۲}(ا ب - ع_۲) جہ^۲$$

$$= \text{ع}_{۳}\,\text{د}_{ن-۳} - \text{ع}_{۲}\,\text{د}_{ن-۲}$$

اسلئے $\text{د}_{۳} = \text{ع}_{۳}\,\text{د} - \text{ع}_{۲}\,\text{د}_{۱}$ ، $\text{د}_{۴} = \text{ع}_{۳}\,\text{د}_{۱} - \text{ع}_{۲}\,\text{د}_{۲}$

اور اس طرح ہمیں پانچ غیر متغیروں یعنے $\text{ع}_{۲}$، $\text{ع}_{۳}$، د، $\text{د}_{۱}$، $\text{د}_{۲}$ سے زیادہ غیر متغیر حاصل نہیں ہوتے اور انہیں سے آخری دو غیر متغیر خاص غیر متغیر ہیں

$\text{د}_{۱}$ معدوم ہوتا ہے جب ل اور م بلحاظ ک کے مزدوج ہوں اور $\text{د}_{۲}$ معدوم ہوتا ہے جب ل اور ن بلحاظ ک کے مزدوج ہوں۔

تیسرا خاص غیر متغیر جو معوج ہے ل، م، ن کے حاصل اسقاط (232)
کے طور پر پایا جے (ل، م، ن) کے طور پر معلوم ہو سکتا ہے اور وہ

$$\begin{vmatrix} \text{عہ} & \text{بہ} & \text{جہ} \\ \text{ا عہ} & \text{ب بہ} & \text{ج جہ} \\ \text{ا}^{۲}\text{عہ} & \text{ب}^{۲}\text{بہ} & \text{ج}^{۲}\text{جہ} \end{vmatrix} \equiv \text{ک}_{۱۲۳}$$

ہے۔ اس آخری غیر متغیر کا مربع د، $\text{د}_{۱}$، $\text{د}_{۲}$ کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے کیونکہ

$$\text{ک}_{۱۲۳}^{۲} = \begin{vmatrix} \text{عہ} & \text{بہ} & \text{جہ} \\ \text{ا عہ} & \text{ب بہ} & \text{ج جہ} \\ \text{ا}^{۲}\text{عہ} & \text{ب}^{۲}\text{بہ} & \text{ج}^{۲}\text{جہ} \end{vmatrix}^{۲} = \begin{vmatrix} \text{د} & \text{د}_{۱} & \text{د}_{۲} \\ \text{د}_{۱} & \text{د}_{۲} & \text{د}_{۳} \\ \text{د}_{۲} & \text{د}_{۳} & \text{د}_{۴} \end{vmatrix}$$

نیز $\text{د}_{۳} = \text{ع}_{۳}\,\text{د} - \text{ع}_{۲}\,\text{د}_{۱}$ ، $\text{د}_{۴} = \text{ع}_{۳}\,\text{د}_{۱} - \text{ع}_{۲}\,\text{د}_{۲}$

یہ ظاہر ہے کہ $\text{ک}_{۱۲۳}$ معدوم ہوتا ہے جب ل، م اور ک کے مشترک خود مزدوج مثلث کے ایک راس میں سے گذرتا ہے۔

اب ہم دو درجی اور چار درجی کے حاصل کو د، $\text{د}_{۱}$، $\text{د}_{۲}$ کی رقوم میں

بیان کرینگے۔ یہ مسئلہ اس شرط کے معلوم کرنیکے معادل ہے کہ ل چار نقطوں ع، ک میں سے کسی ایک نقطہ میں سے گذرے اور بہت آسانی کے ساتھ یہ شرط معلوم کرنے سے حل ہوجاتا ہے کہ نظام ع + غہ ک کا صرف ایک مخروطی کھینچا جا سکتا ہے جو ل کو مس کرے۔ اب اگر ل ع + غہ ک کو مس کرے تو

$$\text{غہ}^2(\text{عہ}^2+\text{بہ}^2+\text{جہ}^2)-\text{غہ}(\text{ا عہ}^2+\text{ب بہ}^2+\text{ج جہ}^2)+\text{ب ج عہ}^2+\text{ج ا بہ}^2+\text{ا ب جہ}^2=0$$

یا
$$\text{د}_0\,\text{غہ}^2-\text{د}_1\,\text{غہ}+\text{د}_2+\text{ع}_2\,\text{د}_0=0$$

اور اگر اس دو درجی کا ممیز ر ہو تو

$$\text{ر}=\text{د}_1^2-4\,\text{د}_0\,\text{د}_2-4\,\text{ع}_2\,\text{د}_0^2$$

ربط $\text{د}_1=0$ کا ہندسی مفہوم یہ ہے کہ خط ل، مخروطیوں ع اور ک سے موسیقی نسبت میں قطع ہوتا ہے۔

اب ہم ثلاثی نظام کے دو درجی ہم متغیروں سے ثنائی نظام کے چار درجی ہم متغیر معلوم کرینگے نظام میں تین دو درجی ہم متغیر ہیں یعنے جیکوبی

جے (ل، ع، ک)، جے (م، ع، ک)، جے (ن، ع، ک)

اور نیز تین مخروطی ہیں

(233) جے (ل، ف، ک)، جے (م، ف، ک)، جے (ن، ف، ک)

جہاں $\text{ا لا}^2+\text{ب ما}^2+\text{ج نا}^2$ سے موسیقی مخروطی ف بہ تبدیل علامت ہے۔ یہ تین مخروطی آسانی کے ساتھ تحویل ہوجاتے ہیں کیونکہ

جے (ل، ف، ک) = جے (م، ع، ک)، جے (م، ف، ک) = جے (ن، ع، ک)

جے (ن، ف، ک) = ع_2 جے (م، ع، ک) − ع_3 جے (ل، ع، ک)

اسلئے صرف تین خاص دو درجی ہم متغیر ہیں اور اسلئے ثنائی نظام کے صرف

تین خاص چار درجی ہم متغیر ہیں۔

اس دفعہ کو ختم کرنے سے پیشتر ہم چند شکلیں بیان کرینگے جو مخروطیوں ع اور ک کی معمولی مساواتیں یعنے

ع ≡ ا لا^۲ + ج ما^۲ + ص ے^۲ + ۲ د ما ے + ۲ ج ے لا + ۲ ب لا ما،

ک ≡ ۴ ے لا − ما^۲

کو استعمال کرنے سے حاصل ہوتیں۔

وہ شرط کہ خط ل ≡ عہ لا + بہ ما + جہ ی، مخروطی ع + غ ک یا اسکی مماسی مساوات کو مس کرے اب یہ ہے

ح − غ فا + غ^۲ حَ = ۰، جہاں

ح = (ج ص − د^۲) عہ^۲ + (ا ص − ج^۲) بہ^۲ + (ا ج − ب^۲) جہ^۲
+ ۲ (ب ج − ا د) بہ جہ + ۲ (ب د − ج^۲) جہ عہ + ۲ (ج د − ب ص) عہ بہ

فا = ص عہ^۲ + ۴ ج بہ^۲ + ا جہ^۲ − ۴ ب بہ جہ + ۲ ج جہ عہ − ۴ د عہ بہ

حَ = ۴ (جہ عہ − بہ^۲)

نیز ح، فا، حَ، مخروطی متصور ہوں تو انکا جیکوبی ک~۱۲۳~ ہے۔ اور

ع ≡ − ۲ ع~۲~ بے، ≡ + ۴ ع~۲~ د، ≡ حَ، د~۱~ ≡ فا، د~۲~ ≡ ح − ع~۲~ حَ،

جہاں ع اور بے حسب معمول چار درجی کے غیر متغیر ہیں۔

۲۱۸ – چھہ درجی کے صدر ہم رَو۔ کثیر درجی کی بعہ والی جفت شکل چونکہ ثنائی چھہ درجی ۶ ہے ہم مختصر طور پر یہ بتائینگے کہ اسکے غیر متغیر اور دو صدر ہم متغیر کس طرح ایک کعبی اور مخروطی کے مخلوط ثلاثی نظام سے اخذ کئے جا سکتے ہیں۔

یہ دو ہم متغیر چار درجی ع~لا~ (جسکا فائق سر ا~۰~ ا~۴~ − ۴ ا~۱~ ا~۳~ + ۳ ا~۲~^۲ = ع ہے) اور دو درجی ل~لا~ ≡ ع~عہ~ (۶) ہیں۔ کیونکہ اگر ہم انکو ایک مخلوط نظام کے

(234)

طور پر دفعہ ۲۱۷ کی طرح استعمال کریں تو ہم ثنائی چھ درجی کی وہ تمام شکلیں جو چوتھے درجہ تک ہیں حاصل کر سکتے ہیں ۔

چھ درجی $\text{ع} \equiv (\text{ا}_۰، \text{ا}_۱، \text{ا}_۲، \text{ا}_۳، \text{ا}_۴، \text{ا}_۵، \text{ا}_۶)(\text{لا}، \text{ما})^۶$ کو ستعمیل کرنے سے ثلاثی کعبی

$$\text{ع} \equiv \text{ا}_۰\text{لا}^۳ + \text{ا}_۴\text{ما}^۳ + \text{ا}_۶\text{ے}^۳ + ۶\,\text{ا}_۳\,\text{لا ما ے}$$

$$+\,۳\{\text{ا}_۱\text{لا}^۲\text{ما} + \text{ا}_۲\text{لا}^۲\text{ے} + \text{ا}_۲\text{ما}^۲\text{لا} + \text{ا}_۴\text{ما}^۲\text{ے} + \text{ا}_۴\text{ے}^۲\text{لا} + \text{ا}_۵\text{ے}^۲\text{ما}\}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $\Pi(\text{ع}) \equiv ۰$ ۔

اب

$$\frac{۱}{۶}\left(\text{لاَ}\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{ماَ}\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}} + \text{ےَ}\frac{\text{جف}}{\text{جف ے}}\right)^۲\text{ع} - \text{لکَ}$$

یا $(\text{ع}_{۱۱}، \text{ع}_{۲۲}، \text{ع}_{۳۳}، \text{ع}_{۳۲}، \text{ع}_{۱۳}، \text{ع}_{۲۱})(\text{لاَ}، \text{ماَ}، \text{ےَ})^۲ - \text{لکَ}$

کا ممیز بنانے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$۴\,\text{ل}^۳ - \text{ع}(\text{ع})\,\text{ل} + \text{ج}(\text{ع})$$

جہاں

$$\text{ع}(\text{ع}) = \text{ع}_{۱۱}\text{ع}_{۳۳} - ۴\,\text{ع}_{۲۱}\text{ع}_{۳۲} + ۳\,\text{ع}_{۲۲}^۲ ،$$

اور

$$\text{ج}(\text{ع}) = \begin{vmatrix} \text{ع}_{۱۱} & \text{ع}_{۲۱} & \text{ع}_{۳۱} \\ \text{ع}_{۱۲} & \text{ع}_{۲۲} & \text{ع}_{۳۲} \\ \text{ع}_{۱۳} & \text{ع}_{۲۳} & \text{ع}_{۳۳} \end{vmatrix}$$

$\text{ع}(\text{ع})$ کو شکل $(\text{ا}_{۱۱}، \text{ا}_{۲۲}، \text{ا}_{۳۳}، \text{ا}_{۳۲}، \text{ا}_{۱۳}، \text{ا}_{۲۱})(\text{لاَ}، \text{ماَ}، \text{ےَ})^۲$

میں پھیلانے سے حاصل ہوتا ہے :-

$$\text{ا}_{۱۱} = \text{ا}\,\text{ا}_{۴} - ۴\,\text{ا}_{۱}\text{ا}_{۳} + ۳\,\text{ا}_{۲}^{۲} ،\quad ۲\,\text{ا}_{۱۲} = \text{ا}\,\text{ا}_{۵} - ۳\,\text{ا}_{۱}\text{ا}_{۴} + ۲\,\text{ا}_{۲}\text{ا}_{۳} ،$$

$$\text{ا}_{۲۲} = \text{ا}_{۱}\text{ا}_{۵} - ۴\,\text{ا}_{۲}\text{ا}_{۴} + ۳\,\text{ا}_{۳}^{۲} ،\quad ۲\,\text{ا}_{۱۳} = \text{ا}\,\text{ا}_{۶} - ۴\,\text{ا}_{۱}\text{ا}_{۵} + ۷\,\text{ا}_{۲}\text{ا}_{۴} - ۴\,\text{ا}_{۳}^{۲} ،$$

$$\text{ا}_{۳۳} = \text{ا}_{۲}\text{ا}_{۶} - ۴\,\text{ا}_{۳}\text{ا}_{۵} + ۳\,\text{ا}_{۴}^{۲} ،\quad ۲\,\text{ا}_{۲۳} = \text{ا}_{۱}\text{ا}_{۶} - ۳\,\text{ا}_{۲}\text{ا}_{۵} + ۲\,\text{ا}_{۳}\text{ا}_{۴} ،$$

نیز

$$\text{ج}(۶) = \begin{vmatrix} \text{ا}\,\text{لا} + \text{ا}_{۱}\text{ما} + \text{ا}_{۲}\text{ی} ، & \text{ا}_{۱}\text{لا} + \text{ا}_{۲}\text{ما} + \text{ا}_{۳}\text{ی} ، & \text{ا}_{۲}\text{لا} + \text{ا}_{۳}\text{ما} + \text{ا}_{۴}\text{ی} \\ \text{ا}_{۱}\text{لا} + \text{ا}_{۲}\text{ما} + \text{ا}_{۳}\text{ی} ، & \text{ا}_{۲}\text{لا} + \text{ا}_{۳}\text{ما} + \text{ا}_{۴}\text{ی} ، & \text{ا}_{۳}\text{لا} + \text{ا}_{۴}\text{ما} + \text{ا}_{۵}\text{ی} \\ \text{ا}_{۲}\text{لا} + \text{ا}_{۳}\text{ما} + \text{ا}_{۴}\text{ی} ، & \text{ا}_{۳}\text{لا} + \text{ا}_{۴}\text{ما} + \text{ا}_{۵}\text{ی} ، & \text{ا}_{۴}\text{لا} + \text{ا}_{۵}\text{ما} + \text{ا}_{۶}\text{ی} \end{vmatrix}$$

اب $\text{ع}(۶)$ پر Π سے عمل کرنے سے چھ درجی کا حسب ذیل

دو درجی غیر متغیر حاصل ہوتا ہے

$$\text{ع}_{۲} = \text{ا}\,\text{ا}_{۶} - ۶\,\text{ا}_{۱}\text{ا}_{۵} + ۱۵\,\text{ا}_{۲}\text{ا}_{۴} - ۱۰\,\text{ا}_{۳}^{۲}$$

اور اسلئے

$$\Pi\left\{ \text{ع}(۶) + \tfrac{۱}{۶}\,\text{ع}_{۲}\,\text{ک} \right\} \equiv ۰ .$$

نیز Π $\text{ج}(۶) \equiv \text{ل}_{۲}$ استحالہ کے بعد $\text{ل}_{۱}$ ہو جاتا ہے۔ (235)

پھر، اگر ہم

$$\text{ع}(۶) + \tfrac{۱}{۶}\,\text{ع}_{۲}\,\text{ک} - \text{لہ}\,\text{ک}$$

کا ممیز بنائیں تو ہمیں

$$۴\,\text{لہ}^{۳} - \text{ع}_{۲}\,\text{لہ} + \text{ع}_{۳}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $\text{ع}_{۲}$ اور $\text{ع}_{۳}$ ($\text{ع}_{۱}$ کے غیر متغیر) چھ درجی کے

غیر متغیر ہیں جنکے رُتبے ۴ اور ۶ ہیں۔ ایسے تمام غیر متغیروں کی عام شکل یہ ہے

$$ل ع_۴ + م ع_۲^۲ ، ل ع_۲ ع_۴ + م ع_۲^۳ + ن ع_۶$$

وہ غیر متغیر جسکا انتخاب سامن (Higher Algebra صفحہ ۲۶۲)

اساسی غیر متغیروں کے طور پر کرتا ہے کعبی منحنی ع کے غیر متغیر س اور ت ہیں (Higher Plane Curves دفعات ۲۲۰، ۲۲۱ تیسرا اڈیشن)۔

وہ شرط کہ کعبی اور مخروطی مس کریں غیر متغیر $ع_{۱۰}$ کے معدوم ہونے سے بیان ہوتی ہے اور یہ غیر متغیر چھہ درجی کا ممیز ہے۔

وہ شرط کہ ع اور ک کے چھہ نقاط تقاطع کو ملانیوالے تین خطوط ایک نقطہ پر ملیں غیر متغیر $ع_{۱۵}$ کے معدوم ہونے سے بیان ہوتی ہے۔ یہ غیر متغیر چھہ درجی کا معوج غیر متغیر ہے اور مخلوط نظام

$$ع(۶) + \frac{۱}{۲} ع_۲ ک ، ک ، ہ ج(۶)$$

کے غیر متغیر (دفعہ ۲۱۷) کے طور پر حاصل کیا جا سکتا ہے۔

ہم متغیر $ع_{۱۱}$ ، منحنی $۶_۱ ۶_۲ - ۶_۲^۲$ سے بھی جو $ھ_{۱۱}$ میں مستعمل ہوتا ہے حاصل ہو سکتا ہے۔ کیونکہ رشتہ $۶_{۱۲} = ۶_{۲۲}$ سے تحویل کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\frac{۱}{۲} ہ (۶_۱ ۶_۲ - ۶_۲^۲) = ۶_{۱۱} ۶_{۲۲} - ۴ ۶_{۲۱} ۶_{۳۲} + ۳ ۶_{۲۲}^۲ = ع(۶) ،$$

ہم متغیر $ل_۸$ ، ع(۶) میں لا ، ما ، ے کی بجائے عف، ، ۲ عف، عف، درج کرنے اور ۶ پر عمل کرنے سے بھی حاصل ہو سکتا ہے۔

۲۱۹۔ جیکوبی کی ہندسی تعبیر۔ اس دفعہ میں ہم دو منحنی دریافت کرینگے جو ثابت مخروطی ک کو ایسے نقطوں میں قطع کرتا ہے جو ن ویں درجہ کے دو کثیر درجیوں ف اور پہ کے جیکوبی کی اصلوں کو تعبیر کرتے ہیں
$\frac{پہ}{ف}$ کو جزوی کسور میں تحلیل کرنے اور پھر تفرق کرنے سے حاصل (286)
ہوتا ہے

$$ج\,(ف،\,پہ) = ن\,ف^{۲} \sum_{ر=۱}^{ر=ن} \frac{پہ\,(عر)}{ف'\,(عر)} \cdot \frac{۱}{(لا - عر\,ما)^{۲}}$$

اب ثنائی متغیروں کو ثلاثی متغیروں میں مستعمل کرنے سے استحالہ شدہ ج (ف، پہ) ہوجاتا ہے

$$ج = ن\,(ت_{۱}\,ت_{۲} \ldots ت_{ن}) \sum_{ر=۱}^{ر=ن} \frac{پہ\,(عر)}{ف'\,(عر)} \cdot \frac{۱}{ت_{ر}}$$

جہاں $ت_{ر} = لا - عر\,ما + عر^{۲}$ سے اور ف (عر) = ۰۔

صریحاً منحنی ج، نقاط ف = ۰ پر ک کے ماسوں کے تمام نقاط تقاطع میں سے گذرتا ہے۔ مزید برآں ف اور پہ کا باہمی تبادلہ کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ منحنی ج نقاط پہ = ۰ پر ک کے ماسوں کے نقاطِ تقاطع میں سے گذرتا ہے۔ اس تبادلہ سے ج صرف اپنی علامت بدلتا ہے۔ پس یہ منحنی ج دو حائط کثیر الاضلاع کے ن (ن − ۱) راسوں میں سے گذرتا ہے اور مخروطی ک کو ۲ (ن − ۱) نقطوں میں قطع کرتا ہے جو مساوات ج (ف، پہ) = ۰ سے متعین ہوتے ہیں۔

یہ دیکھنا ضروری ہے کہ منحنی ج کی مساوات نہیں بدلتی جبکہ پہ کی بجائے لہ ف + پہ درج کیا جاتا ہے جس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ

ان کثیر الاضلاعوں کی تعداد لامتناہی ہے جو ک کو حائط کرتے ہیں اور جے کے اندرونی ہیں۔ انکے ضلعوں کے نقاط تماس مساوات $له فه + په = ۰$ سے متعین ہوتے ہیں جہاں له کوئی قیمت اختیار کرسکتا ہے۔ نیز (ن - ۱) ویں درجہ کا منحنی جے، ۲ (ن - ۱) جیکوبی نقطوں اور ایک حائط کثیرالاضلاع کے $\frac{ن(ن-۱)}{۲}$ راسوں سے پوری طرح مقرر ہو جاتا ہے کیونکہ وہ

$\frac{(ن-۱)(ن+۲)}{۲}$ اختیاری نقطوں سے متعین ہوتا ہے۔

مثالیں

۱ — اگر چار درجی ع میں ایک دوہرا جزو ضربی ہو تو ثابت کرو کہ یہ جزو ضربی، $ھ_{لا}$ کا ایک دوہرا جزو ضربی ہے اور بتاؤ کہ $گ_{لا}$ کے دو دو درجی اجزائے ضربی حقیقی اصلیں رکھتے ہیں جبکہ ع کی اصلیں سب کی سب حقیقی ہوں یا سب کی سب خیالی، نیز یہ کہ صرف ایک جزو ضربی حقیقی اصلیں رکھتا ہے جب، ع کی دو اصلیں حقیقی اور دو اصلیں خیالی ہوں۔

۲ — اگر چار درجی کا ایک جزو ضربی مربع ہو تو ہندسی طور پر ثابت کرو کہ یہ جزو ضربی، ہم متغیر $گ_{لا}$ کا پانچ گنا جزو ضربی ہے۔ مخروطی ک پر وہ نقطہ معلوم کرو جو مساوات $گ_{لا} = ۰$ کی بقیہ اصل کے جواب میں ہے۔

۳ — ثابت کرو کہ چار درجی فہ (لا) کے چھ درجی ہم متغیر کے دو درجی (237)
اجزائے ضربی جنکو اصلوں کی رقوم میں بیان کیا گیا ہو شکل

$$\frac{(لا - عہ_۱ ما)^۲}{فہ'(عہ_۱)} + \frac{(لا - عہ_۲ ما)^۲}{فہ'(عہ_۲)}، \quad وغیرہ$$

میں لکھے جا سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ت_ر = لا − ع_ر ما + ع_ر^{2} ے

تب $\frac{ت_1}{ف'(ع_1)} + \frac{ت_2}{ف'(ع_2)} + \frac{ت_3}{ف'(ع_3)} + \frac{ت_4}{ف'(ع_4)} \equiv 0$ بولر کے مسئلہ سے

لیکن مخروطی ک پر کے نقطوں ع_۱، ع_۲، ع_۳، ع_۴ کے جواب میں خود مزدوج مثلث کے اضلاع اُس چار ضلعی کے وتر ہیں جو مماسوں ت_۱، ت_۲، ت_۳، ت_۴ سے بنتا ہے اور اسلئے انہیں سے ایک ضلع کی مساوات ہے

$$\frac{ت_1}{ف'(ع_1)} + \frac{ت_2}{ف'(ع_2)} = 0 \text{، یا } \frac{ت_3}{ف'(ع_3)} + \frac{ت_4}{ف'(ع_4)} = 0$$

اب متغیروں کے ثنائی نظام پر عود کرنے سے مطلوبہ شکل حاصل ہو جاتی ہے

۴ — دفعہ ۱۹۶ کی طرح چار درجی ع کو مخروطی ک کے اُن مماسوں کو معلوم کرنے سے جہاں ع اس سے ملتا ہے تحلیل کرو جبکہ ع اور ک کو مربعوں کے مجموعوں کے طور پر بیان کیا گیا ہے۔

(۵) — وہ شرط معلوم کرو کہ ل ع + مہ و، دو دو درجی اجزائے ضربی میں تحلیل ہو سکے جہاں ع اور و ثنائی چار درجی ہیں۔

ثلاثی متغیروں میں تحویل کرنے سے اس صورت میں ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(ل ع + مہ و + نہ ک \equiv (ع لا + ب ما + جہ ے)^{2}$$

اسلئے ل ع + مہ و + نہ ک کی جامع شکل میں ہر رقم معدوم ہونی چاہیئے۔ اس طرح ل^{2}، مہ^{2}، نہ^{2}، مہ نہ، نہ ل، ل مہ کو ساقط کرنے کے لئے چھ مساواتیں ملتی ہیں۔ پس مطلوبہ شرط متعین ہو جاتی ہے۔

۶ — اگر ع، و اور ط تین ثنائی چار درجی ہوں تو ثابت کرو کہ چار چار زیر ایسے معلوم کئے جا سکتے ہیں کہ

$$ل ع + مہ و + نہ ط \equiv (ع لا^{2} + ۲ ب لا ما + جہ ما^{2})^{2}$$

ثلاثی متغیروں میں تحویل کرنے سے ہمیں یہ ثابت کرنا ہے کہ چار خطوط ایسے معلوم کئے جا سکتے ہیں کہ

$$\text{له ع} + \text{مه و} + \text{نه ط} + \text{غه ک} = (\text{عه لا} + \text{به ما} + \text{جه ے})^2$$

یہ خط دو معلومہ مخروطیوں کے مشترک مماس ہیں (دیکھو Salmon's Conics) مثال ۳ دفعہ ۳۷۳)

۷ ـ دفعہ ۲۱۲ کا ہندسی استحالہ استعمال کرکے ثابت کرو کہ چرن ہاوزن[1] کا استحالہ

$$ی = \frac{\text{عه لا}^2 + ۲\ \text{به لا} + \text{جه}}{\text{عَه لا}^2 + ۲\ \text{بَه جه} + \text{جَه}}$$

ایک دو درجی کو ایک ایسے دوسرے دو درجی میں تحویل کردیتا ہے جس کا مطلق غیر متغیر وہی ہے جو اُس چار درجی کا ہے جس کی اصلیں ک، غه₁، غه₂، غه₃ ہیں ـ بالفاظ دیگر دفعہ ۱۹۸ کے مسئلہ کو ثابت کرو ـ

اس کسر کے شمار کنندہ اور نسب نما کو لا، ما میں متجانس بناؤ، ی کی جگہ ـ له رکھو اور تحلیل کرو تو چرن ہاوزن کا استحالہ

$$\text{ل} + \text{له لَ} = ۰$$

ہو جاتا ہے جہاں

$$\text{ل} = \text{عه لا} + \text{به ما} + \text{جه ے}، \quad \text{لَ} = \text{عَه لا} + \text{بَه ما} + \text{جَه ے}$$

(238) اگر لا، ما، ے کو مساواتوں ل + له لَ = ۰، ع = ۰، ک = ۰ سے ساقط کیا جائے تو له میں استحالہ شدہ چار درجی ملیگا جس سے، اگر اسکو ہندسی طور پر لیا جائے، وہ خطوطِ مستقیم متعین ہوتے ہیں جو ل اور لَ کے نقطۂ تقاطع پ سے ع اور ک کے نقاط تقاطع ا، ب، ج، د تک کھینچے گئے ہیں ـ پھر اگر ک ایک مقدار ایسی معلوم ہو کہ مخروطی ع + ک ک نقطہ پ میں سے گذرے تو خطوط پ ا، پ ب، پ ج، پ د کی غیر موسیقی نسبت، خطوط ت د، د ا، د ب، د ج کی غیر موسیقی نسبت کے مساوی ہے جہاں ت د نقطۂ د پر ع + ک ک کا مماس ہے ـ یعنی خطوط پ ا، پ ب، پ ج، پ د کی غیر موسیقی نسبت خطوط

ت + ک تَ، ت + غه₁ تَ، ت + غه₂ تَ، ت + غه₃ تَ

[1] Tschirnhausen

کی غیر موسیقی نسبت کے مساوی ہے جہاں ت اور تَ نقطۂ د پر ع اور ک کے مماس ہیں چونکہ یہ غیر موسیقی نسبت وہی ہے اسلئے دونوں چار درجیوں کی یعنے دیے ہوئے چار درجی اور اُس چار درجی کے لئے جسکی اصلیں ک، غہ۱، غہ۲، غہ۳ ہیں مطلق غیر متغیر ایک ہی ہے۔

۸۔ ایک چار درجی کو ایک ایسے چار درجی میں تحویل کرو جسکی تین اصلیں اس کے ہیسین کی اصلوں کے ساتھ مشترک ہوں۔

اس استحالہ کے متعلق گزشتہ مثال سے ہمیں اشارہ ملتا ہے کہ ل = ت اور لَ = تَ رکھا جائے جہاں ت اور تَ نقطۂ نقاطع د پر جو ضہ کے جواب میں ہے ع اور ک کے مماس ہیں۔ اب چونکہ

$$\text{ت} + \text{غہ}_1\,\text{تَ}\ ،\ \text{ت} + \text{غہ}_2\,\text{تَ}\ ،\ \text{ت} + \text{غہ}_3\,\text{تَ}$$

وہ خطوط ہیں جو ضہ متناظر نقطہ کو علی الترتیب عہ، بہ، جہ کے متناظر نقطوں سے ملاتے ہیں اس لئے ثنائی نظام میں مستعمل کرتے ہوئے ہم رکھتے ہیں

$$\frac{\text{ضا}}{\text{عا}} = \frac{\text{ت}}{\text{تَ}} = -\frac{1}{24}\,\frac{\left(\text{لا}\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{ما}\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\right)^2 \text{ع}_{\text{لا}}}{(\text{لا ماَ} - \text{لاَ ما})^2} = -\frac{1}{24}\,\frac{\left(\text{ضہ}\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\right)^2 \text{ع}_{\text{لا}}}{(\text{لا} - \text{ضہ ما})^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{\text{لا}^2(\text{ا ضہ}^2 + 2\text{ب ضہ} + \text{ج}) + 2\,\text{لا ما}(\text{ب ضہ}^2 + 2\text{ج ضہ} + \text{د}) + \text{ما}^2(\text{ج ضہ}^2 + 2\text{د ضہ} + \text{ص})}{(\text{لا} - \text{ضہ ما})^2}$$

یہ مساوات علی الترتیب $\frac{\text{ضا}}{\text{عا}} = \text{غہ}_1، \text{غہ}_2، \text{غہ}_3$ اور $\frac{\text{لا}}{\text{ما}} = \text{عہ}، \text{بہ}، \text{جہ}$ رکھنے سے پوری ہوتی ہے۔ نسب نما اور شمار کنندہ دونوں کو لا ـ ضہ ما سے تقسیم کرکے ہم

عا = لا ـ ضہ ما لیتے ہیں اور

$$\text{ضا} = -\frac{1}{2}(\text{ا ضہ}^2 + 2\text{ب ضہ} + \text{ج})\,\text{لا} - \frac{1}{2}\Big\{(\text{ا عہ}^2 + 2\text{ب عہ} + \text{ج})\,\text{عہ}$$

$$+ 2(\text{ب عہ}^2 + 2\text{ج عہ} + \text{د})\Big\}\,\text{ما}$$

$\equiv - \frac{1}{12}$ ا Σ (ضہ-عہ)(ضا-بہ)لا + $\frac{1}{12}$ ا Σ عہ(ضہ-بہ)(ضہ-جہ) ما

جہاں عہ، بہ، جہ کے لحاظ سے جمع کرنا ہے ۔

اس استحالہ کی مدد سے ع لا مستحیل ہو کر ک عا (۴ ضا^3 - ع ضا عا^2 + عا^3)

ہو جاتا ہے جہاں $\frac{1}{ک} = -\frac{ا^2}{12}$ (ضہ - عہ) (ضہ - بہ)^2 (ضہ - جہ)^2

(دیکھو مثال ۲۴ صفحہ ۳۵۰)

۹ - فرض کرو کہ مخروطی ک پر تین نقطے ا، ب، ج جو ان مساواتوں

غہ لا = فہ^2، غہ ما = ۲ فہ ، غہ ی = ۱

سے متعین ہوتے ہیں لئے گئے ہیں جہاں ان نقطوں پر فہ کی قیمتیں عہ، بہ، جہ ہیں جو ایک کعبی ع کی اصلیں ہیں ۔ مخروطی پر وہ نقطے متعین کرنیکے لئے جو کعبی ہم متغیر گ لا اور ھیسوی ھ لا کی اصلوں کے جواب میں ہیں حسب ذیل اعمال ثابت کرو :-

آ - فرض کرو کہ مخروطی کے مماس نقاط ا، ب، ج پر کھینچے گئے ہیں جو ایک مثلث اَ بَ جَ بناتے ہیں - تب خطوط ا اَ، ب بَ، ج جَ مخروطی کو نقطوں اً، بً، جً پر ملینگے جو گ لا کی اصلوں کے جواب میں ہیں ۔

۲ - اگر اً، بً، جً پر مخروطی ک کے مماس کھینچے جائیں اور ان سے مثلث اٌ، بٌ، جٌ بنے تو چار مثلث ا ب ج، اَ بَ جَ، اً بً جً، اٌ بٌ جٌ، ہم وصف ہیں اور ان کی ہم وصفیت کے محور مخروطی ک کو ھ لا کی متناظر اصلوں پر قطع کرتے ہیں ۔

(239) ۳ - پچھلے اعمال سے ثابت کرو کہ ع لا اور گ لا کا ھیسوی ھ لا ایک ہی ہے

اور یہ کہ $\text{ھ}_{\text{لا}}$ کی اصلیں خیالی ہیں جبکہ $\text{ع}_{\text{لا}}$ کی اصلیں حقیقی ہوں۔

(Dublin Exam. Papers, Bishop Law's Prize, 1879)

فرض کرو کہ ثابت مخروطی ک پر کے مماس نقاط عہ، بہ، جہ پر $\text{ت}_{\text{عہ}}$، $\text{ت}_{\text{بہ}}$، $\text{ت}_{\text{جہ}}$ ہیں۔ تب

$$\text{غہ}\,\text{ت}_{\text{عہ}} = (\text{فہ} - \text{عہ})^{۲}\text{،}\quad \text{غہ}\,\text{ت}_{\text{بہ}} = (\text{فہ} - \text{بہ})^{۲}\text{،}$$

$$\text{غہ}\,\text{ت}_{\text{جہ}} = (\text{فہ} - \text{جہ})^{۲}$$

فہ کو ساقط کرنے سے ک کی مساوات ملتی ہے

$$(\text{بہ} - \text{جہ})\sqrt{\text{ت}_{\text{عہ}}} + (\text{جہ} - \text{عہ})\sqrt{\text{ت}_{\text{بہ}}} + (\text{عہ} - \text{بہ})\sqrt{\text{ت}_{\text{جہ}}} = ۰$$

اب خطوط اا، بب، جج کی مساواتیں ہیں

$$(\text{جہ} - \text{عہ})^{۲}\,\text{ت}_{\text{بہ}} - (\text{عہ} - \text{بہ})^{۲}\,\text{ت}_{\text{جہ}} = ۰ \text{، وغیرہ، وغیرہ}$$

اور وہ نقطے جہاں اا مخروطی ک سے ملتا ہے اس مساوات

$$(\text{جہ} - \text{عہ})^{۲}(\text{فہ} - \text{بہ})^{۲} = (\text{عہ} - \text{بہ})^{۲}(\text{فہ} - \text{جہ})^{۲}$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔ اس مساوات کو حل کرنے سے

$$\text{فہ} = \text{عہ} \quad \text{اور} \quad (\text{بہ} + \text{جہ} - ۲\,\text{عہ})\,\text{فہ} = ۲\,\text{بہ}\,\text{جہ} - \text{جہ}\,\text{عہ} - \text{عہ}\,\text{بہ}$$

فہ کی یہ دوسری قیمت $\text{گ}_{\text{لا}}$ کی وہ اصل ہے جو عہ کے (موسیقی طور پر) متناظر ہے۔

پھر، اا، بب، جج کے نقطۂ تقاطع کا قطبی، (۲) کا ہم وصفیت کا محور ہے اور اسکی مساوات ہے

$$(\text{بہ} - \text{جہ})^{۲}\,\text{ت}_{\text{عہ}} + (\text{جہ} - \text{عہ})^{۲}\,\text{ت}_{\text{بہ}} + (\text{عہ} - \text{بہ})^{۲}\,\text{ت}_{\text{جہ}} = ۰$$

یہ خط مخروطی ک کو ان نقطوں پر ملتا ہے جو مساوات

$$(\text{بہ} - \text{جہ})^{۲}(\text{فہ} - \text{عہ})^{۲} + (\text{جہ} - \text{عہ})^{۲}(\text{فہ} - \text{بہ})^{۲} + (\text{عہ} - \text{بہ})^{۲}(\text{فہ} - \text{جہ})^{۲} = ۰$$

سے متعین ہوتے ہیں اور یہ مساوات، ج کے حیسوی کی مساوات ہے۔

۱۰ — دو درجی اور کعبی کے معوج غیر متغیر کو اصلوں کی رقوم میں تین اجزائے ضربی میں تحلیل کرو اور اسکا ہندسی مفہوم بیان کرو۔

معوج غیر متغیر اس شکل

و۳عف (علا، گلا)   (دفعہ ۱۹۱)

میں بیان ہوتا ہے۔ اب علا اور گلا کے اجزائے ضربی کو جو موسیقی طور پر ایک دوسرے کے متناظر ہیں متحد کرنے سے علا گلا، تین دو درجیوں ل، م، ن کے حاصل ضرب کے طور پر بیان ہو سکتا ہے جہاں

ل = (به + جه − ۲ عه) لا۲ − ۲ (به جه − عه۲) لا ما + عه (۲ به جه − جه عه − عه به) ما۲

اور ایسی ہی قیمتیں م اور ن کے لئے۔

پھر، و۳عف (ل م ن) = ک وعف ل × وعف م × وعف ن

جہاں ک ایک عددی ضارب ہے۔

متغیروں کا ثلاثی نظام استعمال کرنے سے اس عمل کی آسانی کیساتھ تکمیل ہو سکتی ہے۔ چنانچہ اس صورت میں اگر

ولا = لا۲ − (مه + نه) لا ما + مه نه ما۲،

تو وعف جبکو ل م ن پر ایک عامل سمجھا جائے

مه نه عفلا + (مه + نه) عفما + عفے = طا،

میں مستحیل ہو جاتا ہے کیونکہ جیسا کہ ہم دیکھیں گے ۳ ل م ن =۔ اور اسلئے

طا۳ (ل م ن) = ۶ طا ل × طا م × طا ن

جہاں ل، کا استحالہ ل میں، م کا م میں، وغیرہ ہوا ہے۔

پس

(240)

$$\text{ط}(\text{ل}) = \begin{vmatrix} \text{عہ}^2 & \text{۲ عہ} & \text{۱} \\ \text{مہ نہ} & \text{مہ + نہ} & \text{۱} \\ \text{بہ جہ} & \text{بہ + جہ} & \text{۱} \end{vmatrix}$$

یہ مقطع معدوم ہوتا ہے جبکہ عہ سے نقطوں مہ، نہ اور بہ، جہ کے درمیان کا ایک ماسکہ متعین ہوتا ہو یا جبکہ و اور ل سے ایک خط پر چار موسیقی نقطے متعین ہوتے ہوں یا نیز جبکہ مثال ۹ کے خطوط ا ا، ب ب، ج ج میں کا ایک خط اور و لا کے جواب میں حاصل ہونیوالا خط ثابت مخروطی ک کے لحاظ سے مزدوج ہوتے ہوں۔ ان صورتوں میں معوج غیر متغیر بھی معدوم ہوتا ہے۔

لیکن یہ آسانی کے ساتھ بتایا جا سکتا ہے کہ $\pi(\text{ل م ن}) \equiv$ ۔
اس کے لئے مثال ۹ کی طرح متغیروں کو

$$\text{لا} = (\text{بہ} - \text{جہ})^2 \text{ت}_{\text{عہ}} = (\text{بہ} - \text{جہ})^2 (\text{لا} - \text{عہ ما} + \text{عہ}^2 \text{ے})\text{، وغیرہ}$$

میں تبدیل کرو تو ل بدلکر $\dfrac{\text{ما} - \text{ے}}{\text{بہ} - \text{جہ}}$ ہو جاتا ہے اور π بدلکر

$$(\text{بہ} - \text{جہ})^2 (\text{جہ} - \text{عہ})^2 (\text{عہ} - \text{بہ})^2 \left(\frac{\text{جف}^2}{\text{جف ما جف ے}} + \frac{\text{جف}^2}{\text{جف ے جف لا}} + \frac{\text{جف}^2}{\text{جف لا جف ما}} \right)$$

ہو جاتا ہے اور اسلئے $\pi(\text{ل م ن}) \equiv$ ۔

۱۱۔ نقطوں کے دو سلسلے جنمیں تین تین نقطے ہیں جو دو کعبیوں ع اور و سے متعین ہوئے ہیں مخروطی ک پر لئے گئے ہیں۔ ان نقطوں پر ک کے مماس کھینچنے سے دو مثلث بنائے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ مخروطی جو ان دو مثلثوں کو گھیرتا ہے مخروطی ک کو مس کریگا جبکہ ان دو کعبیوں کا اجتماعیہ ف معدوم ہو اور یہ کہ انکا اجتماعیہ پ معدوم ہوگا جبکہ حائط

مخروطی، مخروطی ک کو چار مساوی غیر موسیقی نقطوں پر ملے ۔

۱۲۔ وہ شرط معلوم کرو کہ چار درجی ع سے کوئی دو دو درجی اجزائے ضربی مثلاً

(لا ـ عہ ما) (لا ـ بہ ما)، (لا ـ جہ ما) (لا ـ ضہ ما)

ایک دئے ہوئے دو درجی لہ لا² + ۲ مہ لا ما + نہ ما² کے ساتھ ملکر درپیچ میں ایک نظام بنائیں ۔

ان دو درجیوں کو مستحیل کیا جائے تو انکے جواب میں حاصل ہونیوالے تین خطوں کو ایک نقطہ پر ملنا چاہئے اور یہ نقطہ، مخروطیوں ع اور ک کے مشترک خود مزدوج مثلث کا ایک رأس ہے ۔ ان نقطوں کی مماسی مساوات ج (ح، ط، فا) = ۰ ہے اور اس لئے یہ مطلوبہ شرط ہے ۔ غ ع + ک کی مماسی شکل ہے غ² ح + غ فا + ط (دیکھو دفعہ ۲۱۷) ۔

اس شرط کو شکل

$$\left(\text{لہ}\frac{\text{جف}^2}{\text{جف ما}^2} - ۲\,\text{مہ}\frac{\text{جف}^2}{\text{جف لا جف ما}} + \text{نہ}\frac{\text{جف}^2}{\text{جف لا}^2}\right)^3 \text{گ}_{\text{لا}} = ۰$$

میں بھی رکھا جا سکتا ہے جیسا کہ اب ہم بتائینگے ۔

اگر
$$\text{طا} = \text{لہ}\frac{\text{جف}^2}{\text{جف ما}^2} - ۲\,\text{مہ}\frac{\text{جف}^2}{\text{جف لا جف ما}} + \text{نہ}\frac{\text{جف}^2}{\text{جف لا}^2}$$

اور $\text{گ}_{\text{لا}} \equiv$ ل م ن جب اسکو اسکے دو درجی اجزائے ضربی میں تحلیل کیا جائے تو (241)

$$\text{طا}^3\,\text{گ}_{\text{لا}} = ۶\ \text{طا ل} \times \text{طا م} \times \text{طا ن}$$

کیونکہ ثلاثی متغیروں میں مستحیل کرنے سے

$$\text{طا} = \left(\text{لہ}\frac{\text{جف}}{\text{جف ی}} - ۲\,\text{مہ}\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}} + \text{نہ}\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\right)$$

جب اسکو ایک ایسے تفاعل فہ (لا، ما، یے) پر استعمال کیا جائے کہ ۲ فہ = ۔

اب ل، م، ن، تین خطوط ل، م، ن ہو جاتے ہیں جو ک کے لحاظ سے

ایک خود مزدوج مثلث بناتے ہیں اور ۲ ل م ن ≡ ۰ جبکہ کوئی تین خط باہم مزدوج ہوں ۔ اس لئے

طا^{۲} ل م ن ؛ طا ل × طا م × طا ن میں تحویل ہو جاتا ہے

اور طا ل ≡ ۰ وہ شرط ہے کہ خطوط لہ لا + مہ ما + نہ ے اور ل مخروطی ک کے لحاظ سے مزدوج ہوں یعنی یہ کہ خط لہ لا + مہ ما + نہ ے خط ل کے قطب میں سے گذرے یا وہ شرط ہے کہ ع ، کے دو دو درجی اجزائے ضربی، لہ لا^{۲} + ۲ مہ لا ما + نہ ما^{۲} کے ساتھ درپیچ میں ایک نظام بنائیں ۔

۱۳ ۔ ثابت کرو کہ چار درجیوں

و ≡ (عہ$_۱$ لا^{۲} + ۲ بہ$_۱$ لا ما + جہ$_۱$ ما^{۲})(عہ$_۲$ لا^{۲} + ۲ بہ$_۲$ لا ما + جہ$_۲$ ما^{۲}) ۔ (عہ$_۳$ لا^{۲} + ۲ بہ$_۳$ لا ما + جہ$_۳$ ما^{۲})^{۲} ..(۱)

ع ≡ (عہ$_۱$ لا^{۲} + ۲ عہ$_۲$ لا ما + عہ$_۳$ ما^{۲})(جہ$_۱$ لا^{۲} + ۲ جہ$_۲$ لا ما + جہ$_۳$ ما^{۲}) ۔ (بہ$_۱$ لا^{۲} + ۲ بہ$_۲$ لا ما + بہ$_۳$ ما^{۲})^{۲} (۲) .....

کے غیر متغیر ایک ہی ہیں ۔

(۲) کو ثلاثی نظام میں مستحیل کرنے سے مخروطی

(عہ$_۱$ لا + عہ$_۲$ ما + عہ$_۳$ ے)(جہ$_۱$ لا + جہ$_۲$ ما + جہ$_۳$ ے) ۔ (بہ$_۱$ لا + بہ$_۲$ ما + بہ$_۳$ ے)^{۲} + ک (۴ ے لا ۔ ما^{۲})

حاصل ہوتا ہے جہاں ۳ ک = ع$_{۲۲}$ ۔ ع$_{۱۳}$ کی ایسی قیمت معلوم کی گئی ہے کہ ۲ (ع) ≡ ۰ اور ع، و دونوں کے لئے ک وہی ہے ۔

اختصار کی خاطر ہم لکھتے ہیں

ل ≡ عہ$_۱$ لا + عہ$_۲$ ما + عہ$_۳$ ے، م ≡ بہ$_۱$ لا + بہ$_۲$ ما + بہ$_۳$ ے،

ن ≡ جہ$_۱$ لا + جہ$_۲$ ما + جہ$_۳$ ے، ... (۳)

اب اگر ع + لہ (۴ ے لا ۔ ما^{۲}) ≡ ل ن ۔ م^{۲} + (ک + لہ)(۴ ے لا ۔ ما^{۲})

کا ممیز بنایا جاتا ہے تو

ن عہ۱ − ۲ مہ بہ۱ + ل جہ۱ + ۴ (لہ + ک) ے = ۰
ن عہ۲ − ۲ مہ بہ۲ + ل جہ۲ − ۲ (لہ + ک) ما = ۰ (۴)
ن عہ۳ − ۲ مہ بہ۳ + ل جہ۳ + ۴ (لہ + ک) لا = ۰

اور لا، ما، ے ساقط کرکے یا مساواتوں (۴) کے ساتھ مساواتوں (۳)
کو لیکر ان میں سے لا، ما، ے، ل، م، ن کو ساقط کرنے سے اور
لہ + ک = لہَ، رکھنے سے حاصل ذیل کی شکل میں ملتا ہے:۔

Δ (لہَ) ≡

عہ۱	بہ۱	جہ۱	۰	۰	+ ۴ لہَ
عہ۲	بہ۲	جہ۲	۰	− ۲ لہَ	۰
عہ۳	بہ۳	جہ۳	+ ۴ لہَ	۰	۰
۰	۰	− ۱	عہ۱	عہ۲	عہ۳
۰	+ ½	۰	بہ۱	بہ۲	بہ۳
− ۱	۰	۰	جہ۱	جہ۲	جہ۳

اگر ہم اسی طرح کا عمل چار درجی (۱) پر کرتے تو یہی حاصل استقاط Δ (لہَ) (242)
حاصل ہوتا۔ اس صورت میں جو شکل مقطع اختیار کرتا ہے وہ مقطع بالا کی پہلی تین صفوں کو − ۴ لہَ سے تقسیم کرنے اور پہلے تین ستونوں کو − ۴ لہَ سے ضرب دیتے آخری تین ستونوں کو پہلے لانے اور نچلی تین صفوں کو اوپر لانے سے حاصل ہوتی ہے۔ لہٰذا دونوں صورتوں میں غیر متغیر ایک ہی ہیں۔

Δ (لہَ) کو پھیلانے کے لئے ل، م، ن کی بجائے انکی قیمتیں مساواتوں (۴) سے درج کرو اور لا، ما، ے کو ساقط کرو تو حاصل ہوتا ہے

ع۱۱	ع۲۱	ع۳۱ + ۲ لہَ
ع۲۱	ع۲۲ − لہَ	ع۳۲
ع۳۱ + ۲ لہَ	ع۳۲	ع۳۳

، جہاں ع فق = عف عق + بف بق ۲ جف جق

اس منقطع کو پھیلاؤ تو یہ ہو جاتا ہے

$$۴\,\text{لہ}^{۳} - ۴(\text{ع}_{۲۲} - \text{ع}_{۳۱})\,\text{لہ}^{۲} - \{\text{ع}_{۱۱}\text{ع}_{۳۳} - \text{ع}_{۳۱}^{۲} + ۴(\text{ع}_{۳۱}\text{ع}_{۲۲} - \text{ع}_{۲۱}\text{ع}_{۳۲})\}\,\text{لہ} + \begin{vmatrix} \text{ع}_{۱۱} & \text{ع}_{۲۱} & \text{ع}_{۳۱} \\ \text{ع}_{۲۱} & \text{ع}_{۲۲} & \text{ع}_{۳۲} \\ \text{ع}_{۳۱} & \text{ع}_{۳۲} & \text{ع}_{۳۳} \end{vmatrix}$$

یہ خیال رہے کہ جب لہ کی بجائے لہ + ک رکھا جاتا ہے تو اس مساوات کی دوسری رقم نہیں ہوتی اور اس کا ہر سر دونوں چار درجیوں کے لئے ایک ہی ہے جس کی تصدیق بالراست ہو سکتی ہے ۔
دیکھو زوتھن (Zeuthen) کا حل (Proceedings of the L.M.S.) جلد دہم صفحہ ۱۹۶ ۔

۱۴ ۔ دو تفاعل معلوم کرو کہ ترین دو درجی خطی استحالہ سے ایک ساتھ ان شکلوں

$$\frac{\text{جف}^{۲}\,\text{فہ}}{\text{جف}\,\text{لا}^{۲}} \text{ ، } \frac{\text{جف}^{۲}\,\text{فہ}}{\text{جف}\,\text{لا}\,\text{جف}\,\text{ما}} \text{ ، } \frac{\text{جف}^{۲}\,\text{فہ}}{\text{جف}\,\text{ما}^{۲}}$$

میں تحویل ہو سکیں ۔

جواب:۔ $\text{ع}_{۱۱}\text{ع}_{۳۳} - ۴\,\text{ع}_{۲۱}\text{ع}_{۳۲} + \text{ع}_{۲۲}^{۲} + ۲\,\text{ع}_{۲۲}\text{ع}_{۱۳} = ۰$ ،

$$۲\,\text{ع}_{\text{فق}} = \text{ع}_{\text{ف}}\text{ج}_{\text{ق}} + \text{ع}_{\text{ق}}\text{ج}_{\text{ف}} - ۲\,\text{ب}_{\text{ف}}\text{ب}_{\text{ق}}$$

۱۵ ۔ ثابت کرو کہ مثال ۱۴ کی شرط دو درجیوں کے حسب ذیل دو جٹوں کے لیے بھی وہی ہے :۔

$\text{ع}_{۱}\text{لا}^{۲} + ۲\,\text{ب}_{۱}\text{لا}\,\text{ما} + \text{ج}_{۱}\text{ما}^{۲}$ ، $\text{ع}_{۲}\text{لا}^{۲} + ۲\,\text{ب}_{۲}\text{لا}\,\text{ما} + \text{ج}_{۲}\text{ما}^{۲}$ ، $\text{ع}_{۳}\text{لا}^{۲} + ۲\,\text{ب}_{۳}\text{لا}\,\text{ما} + \text{ج}_{۳}\text{ما}^{۲}$ ،

اور عہ$_{۱}$ لاٗ + ۲ عہ$_{۱}$ لا ما + عہ$_{۲}$ ما^{۲}، بہ$_{۱}$ لاٗ + ۲ بہ$_{۲}$ لا ما + بہ$_{۳}$ ما^{۲}، جہ$_{۱}$ لاٗ + ۲ جہ$_{۲}$ لا ما + جہ$_{۳}$ ما^{۲}

مثال ۱۴ کی شرط اس شکل

$$(ع_{۲۲} - ع_{۱۳})^{۲} + ع_{۱۱} - ع_{۲۳} - ع_{۳۱}^{۲} + ۴ (ع_{۱۳}\ ع_{۲۲}\ ع_{۲۱}\ ع_{۳۲})$$

میں رکھی جاسکتی ہے اور یہ، مثال ۱۳ کے ∆ (لہ) کے سروں کی رقوم فوراً بیان کیجاسکتی ہے۔

اِس شرط کا ہندسی مفہوم یہ ہے کہ ع اور ک کے موسیقی مخروطی میں ایک مثلث بنایا جاسکتا ہے اور یہ مثلث، ک پر حائط مثلث ہے۔ کیونکہ مثال ۱۳ میں ل، م، ن کی بجائے ع$_{۱}$، ع$_{۲}$، ع$_{۳}$ (مثال ۱۴ کے مفروضہ کے مطابق) رکھے جائیں جہاں

$$ع \equiv (ا، ج، ص، د، ج، ب) (لا، ما، ے)^{۲}$$

تو

$$ع_{۱} ع_{۲} - ع_{۳}^{۲} \equiv (ع_{۱۱}، ع_{۲۲}، ع_{۳۳}، ع_{۲۳}، ع_{۱۳}، ع_{۲۱}) (لا، ما، ے)^{۲}$$

(243) ع اور ک کا موسیقی مخروطی فا ہو جاتا ہے (دیکھو دفعہ ۲۱۴)۔ نیز اگر لہ ک + فا کا ممیز یعنے ∆ (لہ) حسب معمول اس شکل

$$\Delta\ لہ^{۳} + طا\ لہ^{۲} + طا_{۱}\ لہ + \Delta_{۱}$$

میں لکھا جائے تو مثال (۱۴) کی شرط اس طرح بیان ہو سکتی ہے

$$طا^{۲} - ۴\ \Delta\ طا_{۱} = ۰$$

اور یہ اس بات کی مشہور غیر متغیری شرط ہے کہ ایک ایسا مثلث کھینچا جاسکتا ہے جو ایک مخروطی کو گھیرے اور دوسرے مخروطی سے گھر جائے۔

(دیکھو (Salmon's conic sections) دفعہ ۳۷۶)

۱۶۔ اگر دو درجیوں ع اور و کی ثلاثی اشکال ع اور و ہوں اور فا انکا موسیقی مخروطی تو ثابت کرو کہ Π (فا) = ۰۔ وہ شرط ہے کہ ع اور و ایک ثنائی کثیر درجی کے دو پہلے مستخرجے ہیں۔

(244)

بیسواں باب

ابدالات اور گروہوں کا نظریہ

فصل (۱) - ابدالات بالعموم

۲۲۰ — **تعریفات - ترقیم** - اگر ن علامتیں (حروف) لا۱، لا۲، لا۳، ... ، لان دی جائیں اور ہر حرف اسی جٹ میں سے کسی نہ کسی حرف سے بدلا جائے اور اس طرح حاصل، انہی ن حرفوں کی ایک نئی ترتیب ہو تو پہلی ترتیب سے دوسری ترتیب پر گزرنے کے عمل کو ہم ابدال سے موسوم کرینگے - حروف لا۱، لا۲، ... ، لان کو ایک دوسرے سے بالکل غیر تابع خیال کیا جائیگا اور ان کا حوالہ متغیروں یا ابدال سے متاثر عنصروں کے نام سے دیا جائیگا -

اس عمل کو اگر ہم س سے تعبیر کریں تو ابدال س کو اس طور پر ظاہر کیا جا سکتا ہے

$$\text{س} \equiv \begin{pmatrix} \text{لا}_{۱}, & \text{لا}_{۲}, & \text{لا}_{۳}, & \ldots, & \text{لا}_{\text{ن}} \\ \text{لا}_{\text{ا}}, & \text{لا}_{\text{ب}}, & \text{لا}_{\text{ج}}, & \ldots, & \text{لا}_{\text{ہ}} \end{pmatrix}$$

جہاں ہر افقی خط میں ن حرفوں کا ایک ہی جٹ شامل ہوتا ہے اور عمل

اس بات پر مشتمل ہے کہ اوپر کے خط کے ہر حرف کو اس کے تحت نیچے کے خط میں جو حرف ہے اس سے بدلا جائے۔ یہ عمل متغیروں کے ایک تفاعل فہ (لا، لا، ... لان) پر استعمال کیا جا سکتا ہے اور ایسی صورت میں حاصل ہونیوالا تفاعل س فہ، جہاں جہاں فہ میں لا واقع ہو اسکو لاء میں، لا کو لاب میں، لا کو لاج میں، وغیرہ بدلنے سے حاصل ہو گا۔ اگر کوئی حرف زیر بحث ابدال سے اپنی جگہ نہ بدلے تو وہ دو حرف جو ایک ہی انتصابی خط میں ہونگے مماثل ہونگے۔ اب چونکہ لا کے لاحقوں کی ترتیبوں کی تعداد صرف ۱ × ۲ × ۳ × ... × ن = ن ہے اس لئے مختلف ابدالات کی اتنی ہی تعداد ممکن ہے اس تعداد میں وہ ترتیب بھی شامل ہے جسمیں لاحقوں کی ترتیب دونوں افقی سطروں میں ایک ہی ہے یعنی وہ ترتیب جسمیں ابدال سے کوئی حرف اپنی جگہ نہیں بدلتا۔ ایسا ابدال جس سے کوئی عنصر متاثر نہیں ہوتا متماثل ابدال کہلاتا ہے (245)
یا اکائی ابدال اور اس کو س = ۱ سے تعبیر کیا جا سکتا ہے۔

بالعموم عمل میں سہولت پیدا ہو گی اگر زیر عمل حرفوں کو واحد حروف ا، ب، ج، ... یا صرف اعداد ۱، ۲، ۳، ... سے تعبیر کیا جائے جہاں حرف لا نکال دیا گیا ہے۔

۱۲۲ — متذکرۂ صدر ترقیم کو سادہ شکل دیجا سکتی ہے۔ مثلاً ابدال

$$س \equiv \begin{pmatrix} ا & ب & ج & د & ص & ف \\ ب & ج & د & ص & ف & ا \end{pmatrix}$$

پر غور کرو جسمیں پہلی سطر کا ہر حرف اپنے بعد والے حرف سے بدلا گیا ہے اور آخری حرف ف کی جگہ ا نے لی ہے۔ ایسے ابدال کو دائری ابدال کہتے ہیں اور اسکو صرف پہلی سطر کے حرفوں کو خطوط وحدانی میں بند کرنے سے ظاہر کرتے ہیں، اس طرح

$$س \equiv (ا\ ب\ ج\ د\ ص\ ف)$$

یہ واضح ہے کہ س متعدد مختلف طریقوں سے لکھا جا سکتا ہے اور جو حروف س میں شامل ہوتے ہیں انمیں سے کوئی پہلی جگہ اختیار کر سکتا ہے بشرطیکہ دوری ترتیب قائم رہے۔ مثلاً

س ≡ (ب ج د ص ف ا) ≡ (ج د ص ف ا ب)

≡ (د ص ف ا ب ج) ≡ (ص ف ا ب ج د) ≡ (ف ا ب ج د ص)

اب یہ دیکھنا آسان ہے کہ ہر ابدال کو ایک یا زیادہ دائری ابدالات میں تحلیل کیا جا سکتا ہے۔ کیونکہ کسی ابدال س کو عمل میں لانے میں اگر اوپر کے خط کے حرف ا کی جگہ ب لے اور ب کی جگہ ج لے اور علیٰ ہذا القیاس تو اس عمل کو جاری رکھنے سے ہم یقیناً ایک حرف (فرض کرو ھ) پر پہنچینگے جس کی جگہ ا لے لیگا۔ یہانتک اس عمل کا حاصل، دائری ابدال (ا ب ج .... ھ) ہے۔ اگر اس عمل سے تمام حروف ختم نہ ہوں تو ہم باقی ماندہ حرفوں میں سے ایک حرف لیتے ہیں اور اسی طرح ایک نیا دائری ابدال بناتے ہیں۔ اگر پھر بھی حروف ختم نہ ہوں تو اس عمل کو جاری رکھتے ہیں حتیٰ کہ کوئی حروف باقی نہ رہیں۔

اس طور پر حاصل کردہ مختلف ابدالات کو اگر ہم ج۱، ج۲، ج۳، ... ، ج‌ر سے تعبیر کریں تو ہم لکھ سکتے ہیں

س ≡ ج۱ ج۲ ج۳ .... ج‌ر

اور یہ کہا جا سکتا ہے کہ س اپنے دائری اجزائے ضربی میں تحلیل ہو چکا ہے۔ ان اجزائے ضربی کو ہم س کے دَورئیے کہینگے۔ وہ دَورئیے جنمیں صرف دو حروف شامل ہوں انتقالات کہلاتے ہیں۔ مثلاً ابدال (246)

$$\begin{pmatrix} ۸ & ۷ & ۶ & ۵ & ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۴ & ۵ & ۷ & ۲ & ۱ & ۶ & ۸ \end{pmatrix} \equiv$$ س

لیا جاتا ہے۔ اوپر کے خط میں ۱ سے شروع کریں تو دوریہ (۱۸۳) فوراً حاصل ہوجاتا ہے اور اسی طرح ۲ سے شروع کریں تو دوریہ (۲۶۵۷۴) ملتا ہے پس

$$\text{س} \equiv (1\,8\,3)(2\,6\,5\,7\,4)$$

یہ ظاہر ہے کہ اعمال کی ترتیب کچھ بھی ہوسکتی ہے کیونکہ کوئی دوریہ کسی دوسرے دوریہ کے عناصر پر متاثر نہیں ہوتا اور اس لئے س کے اجزائے ضربی کی ترتیب جسمیں وہ لکھے گئے ہیں کچھ بھی ہوسکتی ہے۔

اگر صرف عمل اول میں ہی تمام عناصر شامل ہوں تو ابدال خود دائری ہوگا مثلاً

$$\text{س} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 7 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \equiv (1\,3\,7\,4\,5\,2\,6)$$

اگر ابدال سے کسی عنصر کا محل غیر متغیر رہے تو اس عنصر کو خود خطوط وحدانی کے اندر بند کیا جاسکتا ہے جب ابدال کو دوریوں کے حاصل ضرب کے طور پر بیان کیا جائے، یا اسکو بالکل خارج کر دیا جاسکتا ہے مثلاً

$$\text{س} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \equiv (1\,3\,4)(2\,6)(5)$$

$$\equiv (1\,3\,4)(2\,6)$$

یہاں (۵) چونکہ متماثل ابدال ≡ ۱ ہے اسلئے اسکی بجائے ایک رکھا جاسکتا ہے۔ اگرچہ وہ عنصر جو خود ایک دوریہ ہو اکائی سے بدلا جاسکتا ہے لیکن اسکا رکھنا اکثر ضروری ہوتا ہے تاکہ یہ بتایا جاسکے کہ یہ عنصر زیر عمل عنصروں میں شامل تھا۔

دائری ابدال س ایک ہی عنصروں پر کئی مرتبہ دُہرایا جاسکتا ہے اور متواتر اعمال، س^2، س^3، وغیرہ سے تعبیر کئے جاسکتے ہیں۔ مثلاً

$$\text{س} \equiv \begin{pmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} & \text{د} & \text{ص} & \text{ف} \\ \text{ب} & \text{ج} & \text{د} & \text{ص} & \text{ف} & \text{ا} \end{pmatrix}،$$

$$س^2 = \begin{pmatrix} ا & ب & ج & د & ص & ف \\ ج & د & ص & ف & ا & ب \end{pmatrix}،$$

$$س^3 = \begin{pmatrix} ا & ب & ج & د & ص & ف \\ د & ص & ف & ا & ب & ج \end{pmatrix}،$$

اس عمل کو جاری رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ $س^6 = ۱$ ۔ بالعموم (247)
اگر غہ وہ کم سے کم صحیح عدد ہو ایسا کہ $س^{غہ} = ۱$ تو ہم کہتے ہیں کہ ابدال س کا رتبہ غہ ہے ۔ پس یہ ظاہر ہے کہ دائری ابدال کا رتبہ عناصر کی اُس تعداد کے مساوی ہے جنکو وہ ہٹاتا ہے ۔

دو عناصر عہ، بہ کیلئے $(عہ\ بہ) = (بہ\ عہ)$ اور $(عہ\ بہ)^2 = ۱$،

تین عناصر عہ، بہ، جہ کیلئے $(عہ\ بہ\ جہ)^2 = (عہ\ جہ\ بہ)$، $(عہ\ بہ\ جہ)^3 = ۱$

۲۲۲ ــ ابدالوں کے حاصل ضرب اور قوتیں ۔ اگر عناصر کے دئے ہوئے جٹ پر علی التواتر دو یا زیادہ ابدال $س_1$، $س_2$ ... $س_n$ سے عمل کیا جائے تو نتیجہ ایک نئی ترتیب ہے جو ایک واحد ابدال س سے حاصل ہو سکتی تھی ۔ اس ابدال کو پہلے کے ابدالوں کا حاصل ضرب کہا جا سکتا ہے اور ہم لکھ سکتے ہیں $س = س_1 س_2 ... س_n$ جبکہ ترکیبی اجزائے ضربی اس ترتیب $س_1$، $س_2$ ... میں یعنی دائیں جانب سے بائیں جانب میں استعمال کئے جائیں ۔ جب کسی ابدال کو اپنے ترکیبی دوریوں میں دفعہ سابق کے مطابق تحلیل کیا جاتا ہے تو ہم نے دیکھا تھا کہ اجزائے ضربی کی ترتیب کچھ بھی ہو سکتی ہے کیونکہ کسی دو دوریوں میں کوئی عنصر مشترک نہیں ہوتا ۔ لیکن بالعموم ابدالات کے حاصل ضرب میں جس میں دو یا زیادہ اجزائے ضربی $س_1$، $س_2$ ... میں ایک ہی عنصر واقع ہو سکتا ہے یہ دیکھنا سب سے زیادہ ضروری ہے کہ جبری ضرب کے مبادلہ کا قانون صادق نہیں آتا اور اسلئے اجزائے ضربی کی ترتیب قائم رکھنی چاہئے ۔

مثلاً تین عناصر کی صورت میں طالب علم اسکی آسانی سے تصدیق کرسکتا ہے کہ حاصل ضرب (۳۱) (۲۱)، حاصل ضرب (۲۱) (۳۱) سے مختلف ابدال ہے۔ اس طرح قانون مبادلہ پورا نہیں ہوتا لیکن اتلافی قانون صادق آتا ہے یعنے

$$س_1 س_2 \times س_3 = س_1 \times س_2 س_3$$

کیونکہ اگر $س_1$، کسی عنصر ا کو ب میں تبدیل کرتا ہے اور $س_2$، ب کو ج میں اور پھر $س_3$، ج کو د میں تو ا کی بجائے د کا ابدال بہرحال آخری ماحصل ہے خواہ پہلے ا کو ج میں تبدیل کیا جائے ($س_1 س_2$ کے ذریعہ) اور پھر ج کو د میں یا پہلے ا کو ب میں تبدیل کیا جائے اور پھر ب کو د میں ($س_2 س_3$ کے ذریعہ)۔

ایک ہی ابدال س کو علی التواتر متعدد مرتبہ (فرض کرو ف مرتبہ) عمل میں لانے سے جو نتیجہ حاصل ہو اسکو $س^{ف}$ سے تعبیر کیا جا سکتا ہے اور صریحاً ہمیں مساوات حاصل ہوتی ہے

$$س^{ف} س^{ق} = س^{ف+ق} = س^{ق} س^{ف}،$$

ایک دئے ہوئے ابدال س کا مقلوب ابدال وہ ہے جو س کے
ترتیب عمل کو الٹ دیتا ہے اور $س^{-1}$ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ مثلاً اگر (248)

$$س \equiv \begin{pmatrix} ا_1، & ا_2، & \ldots، & ا_ن \\ ب_1، & ب_2، & \ldots، & ب_ن \end{pmatrix} \text{ تو } س^{-1} \equiv \begin{pmatrix} ب_1، & ب_2، & \ldots، & ب_ن \\ ا_1، & ا_2، & \ldots، & ا_ن \end{pmatrix}$$

پس $$س\, س^{-1} = س^{-1} س = 1$$

چونکہ ممکن ابدالوں کی کل تعداد محدود ہے اسلئے س کی کسی نہ کسی تکرار سے عنصروں کی ابتدائی ترتیب پیدا ہونی چاہئے۔ چنانچہ اگر غ ایسا چھوٹے سے چھوٹا عدد ہو کہ $س^{غ} = 1$ تو س کو رتبہ غ کا کہا جاتا ہے

اور ابدالوں کا محدود سلسلہ یہ ہے:۔

ا، س، س^۲، س^۳، ..... ، س^(غہ-۱)

منفی قوت نماؤں میں بیان کرنیکا یہ طریقہ س^(-ف) کو شکل س^(ک غہ-ف) میں رکھنے سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں غہ، س کا رتبہ ہے اور اسلئے س^(ک غہ) = ا-اب

س^ف س^(-ف) = س^ف س^(ک غہ-ف) = س^(ک غہ) = ا اور ابدال س^ف اور س^(-ف) ایک دوسرے کو خارج کردیتے ہیں۔

کسی دائری ابدال کو انتقالات کے حاصل ضرب کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے کیونکہ یہ واضح ہے کہ عمل (ا ب ج د ص ف) کی تکمیل یوں ہو سکتی ہے کہ پہلے ا اور ب کو باہم بدلا جائے، پھر ا اور ج کو، پھر ا اور د کو اور علیٰ ہذا القیاس۔ اس لئے ہم لکھ سکتے ہیں

(ا ب ج د ص ف) = (ا ب) (ا ج) (ا د) (ا ص) (ا ف)

اس سے یہ ظاہر ہے کہ کوئی دوریہ انتقالات کے ایک حاصل ضرب میں تحلیل کیا جا سکتا ہے اِن انتقالات کی تعداد، دوریہ میں شامل ہونیوالے عناصر کی تعداد سے بقدر ایک کے کم ہوگی۔ ایسے کسی حاصل ضرب میں اجزائے ضربی کی ترتیب کا خیال رکھنا ضروری ہے اور یہ اجزائے ضربی ایک دوسرے میں قابل تبادلہ نہیں ہیں۔ پس یہ نتیجہ اخذ ہوتا ہے کہ

ہر ابدال انتقالات کے ایک حاصل ضرب کے طور پر بیان ہو سکتا ہے کیونکہ اسکا ہر دوریہ اس طور پر بیان کیا جا سکتا ہے۔

اگر ابدال س میں جو ن عناصر پر اثرانداز ہو ک دوریے شامل ہوں تو آسانی کے ساتھ یہ معلوم کیا جا سکتا ہے کہ س، ن-ک انتقالات کے حاصل ضرب کے طور پر بیان ہو سکتا ہے۔ تاہم یہ مشاہدہ طلب

ہے کہ ایک ہی ابدال، انتقالات کے حاصل ضرب کے طور پر متعدد طریقوں سے بیان کیا جا سکتا ہے۔ کتاب کے ختم پر یہ بتایا جائیگا کہ کسی دئے ہوئے ابدال میں خواہ اسکو کتنے ہی مختلف متعدد طریقوں میں بیان کیا گیا ہو انتقالات کی تعداد وہی یکسانیت قایم رکھتی ہے۔ اسکے یہ معنے ہیں کہ اگر یہ تعداد جفت ہے تو وہ ہمیشہ جفت رہے گی، اگر طاق ہے تو ہمیشہ طاق رہے گی۔

(249)

مثالیں

۱۔ $س \equiv \begin{pmatrix} ل_{1} & ل_{2} & ل_{3} & ل_{4} & ل_{5} & ل_{6} & ل_{7} & ل_{8} & ل_{9} & ل_{10} & ل_{11} & ل_{12} & ل_{13} & ل_{14} & ل_{15} \\ ل_{11} & ل_{7} & ل_{5} & ل_{12} & ل_{1} & ل_{2} & ل_{3} & ل_{4} & ل_{6} & ل_{9} & ل_{10} & ل_{8} & ل_{14} & ل_{13} & ل_{15} \end{pmatrix}$

کو اس کے دوریوں میں تحلیل کرو۔

جواب:۔ $س \equiv (ل_{1}\ ل_{11}\ ل_{10}\ ل_{9}\ ل_{6}\ ل_{2}\ ل_{7}\ ل_{3}\ ل_{5})(ل_{4}\ ل_{12}\ ل_{8})(ل_{13}\ ل_{14})(ل_{15})$

نتیجہ میں جزو ضربی $(ل_{15}) \equiv 1$ کا اظہار اس بات کی دلیل ہے کہ وہ زیر عمل عناصر میں شامل ہے۔

۲۔ $س \equiv \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ & ۹ & ۰ \\ ۳ & ۸ & ۶ & ۹ & ۲ & ۴ & ۰ & ۵ & ۱ & ۷ \end{pmatrix}$

کو انتقالات کے حاصل ضرب کے طور پر بیان کرو۔

جواب:۔ س ≡ (۳۱)(۶۱)(۴۱)(۹۱)(۸۲)(۵۲)(۷۰)

۳۔ اگر دائری ابدال ج کو انتقال ت سے ضرب دیا جائے جبکہ انتقال ت کا ایک عنصر ج میں شامل ہے مگر دوسرا شامل نہیں تو حاصل ابدال ج ت دائری ہوگا۔

فرض کرو کہ مشترک عنصر $ل_{1}$ ہے تو ہم لکھ سکتے ہیں

$ج \equiv (ل_{1}\ ل_{2}\ ل_{3} \ldots ل_{ن})$، $ت \equiv (ل_{1}\ ل_{ط})$

ج کا اثر یہ ہے کہ وہ ترتیب ا$_1$، ا$_2$، ا$_3$، ... اق، اط کو ترتیب
ا$_2$، ا$_3$، ... اق، ا$_1$، اط میں بدل دیگا اور ت کا اثر یہ ہے کہ وہ اس
آخری ترتیب میں ا$_1$ اور اط کا باہمی تبادلہ کردیگا۔ تب

$$\text{ج ت} \equiv \begin{pmatrix} ا_1 & ا_2 & ا_3 & \cdots & ا_{ق-1} & ا_ق & ا_ط \\ ا_2 & ا_3 & ا_4 & \cdots & ا_ق & ا_ط & ا_1 \end{pmatrix} \equiv (ا_1\ ا_2 \cdots ا_ق\ ا_ط)$$

۴۔ اگر دائری ابدال ج کو انتقال ت سے ضرب دیا جائے
جبکہ انتقال کے دونوں عنصر ج میں شامل ہوں تو حاصل ابدال ج ت دو دوریوں کا حاصل ضرب ہوگا جنمیں کوئی عنصر مشترک نہ ہوگا۔

ہم لے سکتے ہیں

$$\text{ج} \equiv (ا_1\ ا_2 \cdots ا_ق\ ب_1\ ب_2 \cdots ب_ط)،\quad \text{ت} \equiv (ا_1\ ب_1)$$

پچھلی مثال کی طرح عمل کرنے سے فوراً حاصل ہوگا

$$\text{ج ت} \equiv (ا_1\ ا_2\ ا_3 \cdots ا_ق)(ب_1\ ب_2 \cdots ب_ط)$$

۵۔ اگر ابدال س کو انتقال ت سے ضرب دیا جائے جبکہ ایک ایک عنصر ابدال س کے دو مختلف دوریوں ج، جَ میں شامل ہوتا ہے تو حاصل ضرب ج جَ ت، ج اور جَ کے سب عنصروں کا ایک غیر شکستہ دوریہ ہوگا۔

یہ فوراً حاصل ہوتا ہے اگر ہم پچھلی مثال میں حاصل کردہ مساوات کے طرفین کو ت سے ضرب دیں کیونکہ ت^2 = ۱۔

۶۔ اگر کوئی ابدال س، ر انتقالات کا حاصل ضرب ہے اور اگر اسکو انتقال ت سے ضرب دیا جائے تو حاصل ضرب س ت میں یا تو ر+۱ انتقالات شامل ہونگے یا ر-۱ انتقالات۔ (250)

اگر س، ن عناصر پہ موثر ہو تو جیسا کہ ہم نے اوپر بیان کیا ہے ر = ن - ک۔ اگر ت کی وجہ سے دو نئے عناصر داخل ہوں تو ایک

مزید انتقال حاصل ہوگا اور اسلئے کل ر+۱ انتقالات حاصل ہو نگے۔ اب تین صورتیں باقی ہیں بموجب اسکے کہ (۱) ت کی وجہ سے صرف ایک نیا عنصر داخل ہو یا (۲) دو عناصر جو س کے ایک ہی دوریہ میں پہلے سے شامل ہیں یا (۳) دو عناصر جو س کے مختلف دوریوں میں پہلے سے شامل ہیں۔ یہ صورتیں پچھلی تین مثالوں میں زیر بحث آچکی ہیں اور یہ آسانی کے ساتھ حاصل ہوتا ہے کہ س ت میں انتقالات کی تعداد ہمیشہ ر+۱ ہے سوائے اس صورت کے جبکہ ت کے دونوں عناصر س کے ایک ہی دوریہ میں واقع ہوں اور اس صورت میں ن نہیں بدلتا اور ک بدلکر ک+۱ ہو جاتا ہے اور اسلئے ر بدلکر

ن - (ک + ۱) = ن - ک - ۱ = ر - ۱

ہو جاتا ہے۔

اس مثال سے یہ واضح ہے کہ س کو انتقالات کے حاصل ضرب کے طور پر خواہ کسی طرح بیان کیا جائے ایک واحد مزید انتقال سے ضرب دینے کا اثر یہ ہوتا ہے کہ اسکی یکسانیت (Parity) بدلجاتی ہے یعنی طاق سے جفت یا جفت سے طاق ہو جاتا ہے۔

۷۔ ابدال س کا رتبہ اس کے دوریوں کے رتبوں کے ذواضعاف اقل کے مساوی ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ س = ج۱ ج۲ ج۳ ... جز

اور فرض کرو کہ ج۱، ج۲، ج۳، ... کے رتبوں کا کوئی مشترک ضعف مہ ہے

چونکہ

س^مہ = ج۱^مہ ج۲^مہ ... جز^مہ

اور ج۱^مہ = ج۲^مہ = ... = جز^مہ = ۱

اس لئے س^مہ = ۱، اور اگر مہ کی کم سے کم قیمت غہ ہو تو س^غہ = ۱

پھر س کا رتبہ غ ہے۔

اس سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ اگر $ج_1$، $ج_2$، $ج_3$ ......

ایک ہی رتبہ کے ہوں تو یہ رتبہ، س کا رتبہ بھی ہے۔ ایسے ابدالات کو منتظم کہا جاتا ہے کیونکہ ہر دوریہ میں حروف کی ایک ہی تعداد شامل ہوتی ہے۔

۸۔ اگر دائری ابدال س میں ف حروف شامل ہیں اور اگر م، پ کے لئے مفرد ہے تو $س^م$ خود دائری ہے۔

۹۔ اگر دائری ابدال س میں ف ق حروف شامل ہیں تو $س^ف$ ایک منتظم ابدال ہے جسمیں ف دوریے شامل ہوتے ہیں اور ہر دوریہ ق حروف کا ہے مثلاً اگر

$$س \equiv (۱۲۳۴۵۶)$$

تو $س^۲ \equiv (۱۳۵)(۲۴۶)$، $س^۳ \equiv (۱۴)(۲۵)(۳۶)$

۱۰۔ ہر منتظم ابدال کسی قوت پر اٹھائے ہوئے دائری ابدال کے معادل ہے۔

مثال ۔ کے ابدال س کو لیکر فرض کرو کہ اس کے اجزائے ضربی

$$ج_1 \equiv (ا_1\ ب_1\ ج_1 \ldots ل_1)،\ ج_2 \equiv (ا_2\ ب_2\ ج_2 \ldots ل_2)، \ldots ج_ر \equiv (ا_ر\ ب_ر \ldots ل_ر)$$

ہیں یعنے س ایسا ابدال ہے کہ ہر دوریہ میں حروف کی ایک ہی تعداد شامل ہوتی ہے۔ اب اگر ہم دائری ابدال

$$ج \equiv (ا_1\ ا_2\ ا_3 \ldots ا_ر\ ب_1\ ب_2\ ب_3 \ldots ب_ر \ldots ل_1\ ل_2\ ل_3 \ldots ل_ر)$$

لکھ لیں جسمیں پہلے ر حروف اوپر کے ر دوریوں کے ابتدائی حروف ہیں اور اسکے بعد والا جٹ ان دوریوں کے دوسرے حروف کا ہے اور علی ہذا تو آسانی کے ساتھ اس بات کی تصدیق ہو سکتی ہے کہ ج کی ر ویں قوت

متواتر دوریوں ج$_1$، ج$_2$، ... ج$_ژ$ کے حاصل ضرب میں رکھی جا سکتی ہے
پس

$$س = ج^{ژ}$$

۱۱ — منتظم ابدال

س ≡ (۱ ۳ ۵ ۱۲) (۲ ۷ ۶ ۱۱) (۴ ۸ ۱۰ ۹)

کو ایک دائری ابدال کی قوت کے طور پر بیان کرو۔

جواب: — س ≡ (۱ ۲ ۴ ۳ ۷ ۸ ۵ ۶ ۱۰ ۱۲ ۱۱ ۹)^3

(251) ۱۲ — عناصر لا$_1$، لا$_2$، لا$_3$، ... ، لا$_ن$ کا ہر ایک انتقال، ان انتقالات کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے جو ن − ۱ انتقالات کے حسب ذیل سلسلے میں شامل ہیں :—

(لا$_1$ لا$_2$)، (لا$_1$ لا$_3$)، (لا$_1$ لا$_4$)، ... ، (لا$_1$ لا$_{ن-1}$)، (لا$_1$ لا$_ن$)

کیونکہ اس بات کی آسانی کے ساتھ تصدیق ہو سکتی ہے کہ اگر لا$_ع$، لا$_ب$ کوئی دو عنصر ہوں تو

(لا$_ع$ لا$_ب$) = (لا$_1$ لا$_ع$) (لا$_1$ لا$_ب$) (لا$_1$ لا$_ع$)

۱۳ — ہر وہ ابدال جو انتقالات کی جفت تعداد میں تحلیل ہو سکتا ہو تیسرے رتبہ کے دائری ابدالات کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے۔

دیا ہوا ابدال نمونۃ (عہ بہ) (عہ جہ) یا نمونۃ (عہ بہ) (جہ ضہ) کے حاصل ضربوں کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے۔ اب (عہ بہ) (عہ جہ) = (عہ بہ جہ) اور (عہ بہ) (جہ ضہ) = (عہ بہ جہ) (عہ ضہ جہ) کیونکہ

(عہ بہ جہ) (عہ ضہ جہ) = (عہ بہ جہ) (جہ عہ ضہ)

= (عہ بہ) (عہ جہ) (جہ عہ) (جہ ضہ)

= (عہ بہ) (عہ جہ)^2 (جہ ضہ) اور (عہ جہ)^2 = ۱

۱۴۔ بتاؤ کہ عناصر لا۱، لا۲، لا۳ ... لان میں سے تین کا کوئی دائری ابدال، ن - ۲ دائری ابدالات

(لا۱ لا۲ لا۳)، (لا۱ لا۲ لا۴)، ... ، (لا۱ لا۲ لان-۱)، (لا۱ لا۲ لان)

کے ذریعہ بیان ہو سکتا ہے۔

اختصار کی خاطر صرف لاحقوں کو رکھ کر ہم (عہ بہ جہ) کو (لہ مہ عہ)، (لہ مہ بہ)، (لہ مہ جہ) کی رقوم میں بیان کرینگے۔

(عہ بہ جہ) = (عہ بہ)(عہ جہ)

= (عہ بہ)(عہ لہ)(عہ لہ)(عہ جہ)، کیونکہ (عہ لہ)۲ = ۱

= (عہ بہ لہ)(عہ لہ جہ)

= (لہ عہ بہ)(لہ جہ عہ)

اب اسی طرح بائیں طرف کے ہر دوریہ میں ایک نئے عنصر مہ کو داخل کرنیکے لئے اوپر کی مساوات سے استفادہ کرکے ہم حاصل کرتے ہیں

(عہ بہ جہ) = (مہ لہ عہ)(مہ بہ لہ)(مہ لہ جہ)(مہ عہ لہ)

= (لہ مہ عہ)۲(لہ مہ بہ)(لہ مہ جہ)۲(لہ مہ عہ)، مطلوبہ جملہ (عہ بہ جہ) کو بیان کرنیکا حسب ذیل طریقہ بھی آسانی کے ساتھ ثابت کیا جاسکتا ہے

(عہ بہ جہ) ≡ (لہ مہ عہ)(لہ مہ جہ)(لہ مہ بہ)(لہ مہ عہ)(لہ مہ جہ)

۲۲۳۔ متشابہ ابدالات۔ ہم دو ابدالات کو متشابہ اسوقت کہینگے جب انمیں دوریوں کی ایک ہی تعداد شامل ہو اور متناظر دوریوں میں حروف کی ایک ہی تعداد ہو۔

دو ابدالات س، ت تبادلہ پذیر کہلائینگے جبکہ س ت = ت س۔

ابدال ت⁻۱ س ت سے تعبیر ہونیوالے عمل کو ہم ت سے س کا استحالہ کہینگے اور حاصل ہونیوالے ابدال کو ت کے لحاظ سے

س کا مزدوج ۔

کوئی ابدال کسی دوسرے ابدال کے لحاظ سے اپنے مزدوج کے متشابہ ہوتا ہے۔ اسکو ثابت کرنیکے لئے فرض کرو کہ ابدال س کو ابدال (252)

$$ت \equiv \begin{pmatrix} ا & ب & ج & \ldots & ل & \ldots \\ اَ & بَ & جَ & \ldots & لَ & \ldots \end{pmatrix}$$

سے مستحیل کیا گیا ہے اور فرض کرو کہ س کا ایک دوریہ (ا ب ج ... ل) ہے۔ عمل تَ کا اثر اَ کو ا سے بدلنا ہے جو س کے عمل سے ب سے مبدل ہوتا ہے جو پھر ت کے عمل سے بَ سے مبدل ہوتا ہے۔ پس ابدال تَ س ت، اَ کو بَ سے، بَ کو جَ سے، ... لَ کو اَ سے مبدل کرتا ہے اور س کے دوریہ (ا ب ج ... ل) کے جواب میں اسکے مزدوج کا دوریہ (اَ بَ جَ ... لَ) ہے۔

نیز ت سے س کا استحالہ اسوقت تکمیل پاتا ہے جبکہ س کے ہر دوریہ کے ہر حرف کو اُس حرف سے مبدل کیا جائے جو اس کے تحت ابدال ت میں واقع ہے۔ اس لئے حاصل ہونیوالا ابدال س کے متشابہ ہے۔ متکافیاً یہ واضح ہے کہ اگر دو ابدالات س، س متشابہ ہیں تو ایک ابدال ت معلوم ہو سکتا ہے جو ایک کو دوسرے میں مستحیل کرے۔

حاصل ضرب س ت اور ت س جو بالعموم مختلف ہوتے ہیں ہمیشہ متشابہ ہونگے کیونکہ

$$س ت = تَ (ت س) ت ۔$$

حاصل ضرب س ت کا مزدوج ایک تیسرے ابدال ع کے لحاظ سے اپنے اجزائے ضربی کے مزدوجوں کے حاصل ضرب کے مساوی

ہوتا ہے کیونکہ ع' (س ت) ع = ع' س ع ع' ت ع

اگر دو ابدالات س، ت پر قانون مبادلہ درست ہو تو ع کے لحاظ سے اِنکے مزدوجوں پر بھی یہ قانون درست رہتا ہے کیونکہ

اگر س ت = ت س

تو

ع' س ع ع' ت ع = ع' ت ع ع' س ع

فصل دوم۔ کثیر قیمتی تفاعل اور گروہ

۲۲۴ ــ گروہ کی تعریف۔ متشاکل گروہ۔ لا، لا، لا ... لا کا ایک تفاعل، ن ممکن ابدالات کے عمل سے قیمتوں کی جتنی تعداد اختیار کرتا ہے اسکے بموجب اسکو ایک قیمتی، دو قیمتی، تین قیمتی ..... غ قیمتی کہا جائیگا۔ اِن عناصر کا کوئی متشاکل تفاعل چونکہ کسی ابدال سے تغیر پذیر نہیں ہوتا اور نہ ابدالات کے حاصل ضرب سے اس لئے وہ ایک قیمتی تفاعل ہے۔ اگر تفاعل متشاکل نہیں ہے تو اسکی دو یا زیادہ قیمتیں ہونگی جو اُس ایک ابدال سے حاصل ہوسکیں گی جسکا ابدال کے عمل سے معلوم ہونا فرض کیا جاتا ہے۔ مثلاً تین عناصر کے دو منطق تفاعلوں (253)

$$ف_۱ = لا_۱^۲ لا_۲ + لا_۲^۲ لا_۳ + لا_۳^۲ لا_۱ ، \sqrt{\Delta} \equiv (لا_۱ - لا_۲)(لا_۱ - لا_۳)(لا_۲ - لا_۳)$$

پر غور کرو۔ انمیں سے ہر ایک دو قیمتی ہے۔ چھ ممکن ابدالات یعنی

۱، (۳ ۲ ۱)، (۲ ۳ ۱)، (۲ ۱)، (۳ ۱)، (۳ ۲)

میں سے پہلے تین ابدالات سے ف۱ نہیں بدلتا لیکن آخری تین ابدال اسکو اسکی دوسری قیمت $لا_۱^۲ لا_۲ + لا_۲^۲ لا_۱ + لا_۳^۲ لا_۲ \equiv ف_۲$ میں بدلدیتے ہیں

اسی طرح $\sqrt{\Delta}$ بھی پہلے تین ابدالات سے نہیں بدلتا لیکن آخری تین ابدالات سے اپنی دوسری قیمت $-\sqrt{\Delta}$ میں بدلجاتا ہے۔ چار عناصر کی صورت میں ذیل کے تمثیلی تفاعل پر غور کرو:۔

$$\text{فہ}_1 \equiv \text{لا}_1\,\text{لا}_2 + \text{لا}_3\,\text{لا}_4$$

اس صورت میں فہ_1 کے علاوہ دو اور قیمتیں ہیں یعنی

$$\text{فہ}_2 \equiv \text{لا}_1\,\text{لا}_3 + \text{لا}_2\,\text{لا}_4$$

اور

$$\text{فہ}_3 \equiv \text{لا}_1\,\text{لا}_4 + \text{لا}_2\,\text{لا}_3$$

اسلئے یہ تفاعل تین قیمتی ہے۔

اس امر کی بہ آسانی تصدیق ہوسکتی ہے کہ فہ_1 حسب ذیل آٹھ ابدالات سے نہیں بدلتا:۔

۱، (۲۱)، (۴۳)، (۲۱)(۴۳)، (۳۱)(۴۲)، (۴۱)(۳۲)، (۴۲۳۱)، (۲۳۴۱)

اور باقی سولہ ابدالات میں سے ہر ابدال اسکو ایک یا دوسری قیمت میں بدلدیگا۔ وہ ابدالات جنکے عمل سے ایک تفاعل نہیں بدلتا ایک گروہ بناتے ہیں۔ یہ واضح ہے کہ گروہ کے دو یا زیادہ ارکان کے عمل ضرب سے جو اجتماع حاصل ہو وہ خود بھی گروہ سے متعلق ابدال ہوگا۔ پس ہم گروہ کی حسب ذیل باقاعدہ تعریف دیسکتے ہیں:۔

مختلف ابدالات کے ایک نظام کو اسوقت گروہ کہا جاتا ہے جبکہ اِن ابدالات کی تمام قوتیں اور اِن کے تمام حاصل ضرب اُسی نظام کا ایک حصہ ہوں۔

جتنے ابدالات گروہ میں شامل ہوتے ہیں انکی تعداد کو گروہ کا رتبہ کہا جائیگا۔

جتنے عناصر پر عمل ہوتا ہے انکی تعداد گروہ کا درجہ کہلائیگی۔ (254)
وہ گروہ جو تفاعل ف (لا۱، لا۲، ... ، لان) کو نہیں بدلتا ف سے متعلق گروہ یا صرف ف کا گروہ کہلائیگا۔

ن ابدالات کی مجموعی تعداد درحقیقت ایک گروہ ہے۔ اسکو ہم متشاکل گروہ کہینگے کیونکہ اس کے تمام ارکان کسی متشاکل تفاعل کو نہیں بدلتے۔

ممکن ہے کہ ایک گروہ میں دوسرے گروہ کے کل ابدالات شامل ہوں علاوہ دیگر ابدالات کے جو قبل الذکر سے مخصوص ہیں۔ ایسی صورت میں اس دوسرے شامل ہونیوالے گروہ کو قبل الذکر گروہ کا تحت گروہ کہا جائیگا۔

متشاکل گروہ ہر دوسرے گروہ کو بطور تحت گروہ کے شامل رکھتا ہے۔ خواہ کوئی ابدال ہو وہ اپنی تمام قوتوں کے ساتھ ملکر ایک گروہ بناتا ہے جو متشاکل گروہ میں بطور تحت گروہ کے شامل ہوگا۔ متشاکل گروہ کے بعد متبادلہ گروہ اہمیت رکھتا ہے جسکی تعریف اب ہم بتلائینگے۔

۲۲۵ ۔ متبادلہ گروہ ۔ ن عناصر کے منطق تفاعل

Π (لاز − لاح) ≡ (لا۱ − لا۲)(لا۱ − لا۳)(لا۱ − لا۴)(لا۱ − لا۵) ... (لا۱ − لان)

(لا۲ − لا۳)(لا۲ − لا۴)(لا۲ − لا۵) ... (لا۲ − لان)

(لا۳ − لا۴)(لا۳ − لا۵) ... (لا۳ − لان)

. . . .

(لان-۱ − لان)

پر غور کرو جو عناصر کے تمام ممکن فرقوں کے حاصل ضرب پر مشتمل ہے۔ Π کا

مُربع مشہور متشاکل تفاعل ہے یعنے ممیز Δ ۔ اس لیے Π کی دو قیمتیں ہیں جو عدداً مساوی ہیں مگر علامت میں مختلف یعنے $\sqrt{\Delta}$ اور $-\sqrt{\Delta}$ ۔ ایسے دو قیمتی تفاعل متبادل تفاعل کہلائینگے ۔ یہ واضح ہے کہ کسی انتقال سے Π کی علامت بدل جاتی ہے چنانچہ انتقال (لا، لا) پر غور کرو اور Π کو اس کی علامت بدلے بغیر مکرر اس طرح ترتیب دو کہ لا، لا بھی محل اختیار کریں جو لا، لا کا ہے یعنے کی علامت کا ثبت ہونا ضروری نہیں ہے ۔ اس انتقال سے اوپر کی صف میں پہلے جزو ضربی کی علامت بدل جاتی ہے اور اوپر کی صف کے باقی دیگر اجزائے ضربی دوسری صف کے اجزائے ضربی کے ساتھ باہم بدلجاتے ہیں ۔ باقی دیگر صفوں کے اجزائے ضربی پر کوئی اثر نہیں پڑتا پس حاصل ضرب کی علامت بدلجاتی ہے ۔ کسی اور انتقال سے یہ حاصل ضرب پھر اپنی ابتدائی علامت کی طرف عود کرتا ہے ۔ پس دو انتقالات یا انتقالات کی جفت تعداد کے حاصل ضرب سے $\sqrt{\Delta}$ نہیں بدلتا لیکن انتقالات کی طاق تعداد کے حاصل ضرب کا اثر $\sqrt{\Delta}$ کو اس کی دوسری قیمت $-\sqrt{\Delta}$ میں یا $-\sqrt{\Delta}$ کو اسکی دوسری قیمت $\sqrt{\Delta}$ میں بدلنے کا ہے ۔

کسی ابدال کو انتقالات کے حاصل ضرب کے طور پر بیان کرنیکے متعدد طریقے ہیں لیکن اسکو خواہ کسی طرح بیان کیا جائے ایسے اجزائے ضربی کی تعداد یا ہمیشہ جفت ہونی چاہئے یا ہمیشہ طاق کیونکہ یہ ہو نہیں سکتا کہ ایک ہی ابدال بوقتِ واحد $\sqrt{\Delta}$ کی علامت کو بھی بدلے اور وہ غیر متغیر بھی رہے ۔ اب چونکہ دو جفت ابدالات کا حاصل ضرب خود ایک جفت ابدال ہے اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اکائی مع اُن سب ابدالات کے جو انتقالات کی جفت تعداد سے بنے ہیں ایک گروہ ہے اور یہ کہ $\sqrt{\Delta}$ اور $-\sqrt{\Delta}$ دونوں تفاعل اس گروہ سے متعلق ہیں ۔ اسکو ہم متبادلہ گروہ کہینگے اور اب اسکا رتبہ دریافت کرینگے ۔

(255)

فرض کرو کہ ن عناصر کا متبادلہ گروہ حسب ذیل ابدالات پر مشتمل ہے:-

س = ۱، س۱، س۲، ... س ر (۱)

اور فرض کرو کہ متشاکل گروہ کے باقی دوسرے ابدالات جو انتقالات کی طاق تعداد پر مشتمل اور اسلئے اوپر کے ابدالات سے مختلف ہیں حسب ذیل ہیں:

سَ۱، سَ۲، سَ۳، ... سَ ت (۲)

اب ہم کسی انتقال ٹ کو لیتے ہیں اور عمل ضرب سے حسب ذیل دو سلسلے بناتے ہیں:-

س۱ ٹ، س۲ ٹ، س۳ ٹ، ... س ر ٹ (۳)

سَ۱ ٹ، سَ۲ ٹ، سَ۳ ٹ، ... سَ ت ٹ (۴)

(۳) کا ہر ابدال انتقالات کی طاق تعداد سے ترکیب یافتہ ہے

اور اس لئے (۲) میں شامل ہے۔ نیز (۴) کا ہر ابدال انتقالات کی جفت تعداد سے بنا ہے اور اس لئے (۱) میں شامل ہے۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ر ≤ ت اور نیز ر ≥ ت، اس لئے ر = ت (256)
اور چونکہ ر + ت = ن!، متبادلہ گروہ کے رتبہ کے لئے آخرالامر ہمیں حاصل ہوتا ہے

ر = ½ ن!

۲۲۶ — کثیر قیمتی تفاعلوں کی مزدوج قیمتیں اور مزدوج گروہ — مسئلہ: کسی گروہ کا رتبہ، ن! کا ٹھیک مقسوم ہوتا ہے اور خارج قسمت سے متناظر کثیر قیمتی تفاعل کی مختلف قیمتوں کی تعداد ظاہر ہوتی ہے۔

اس اہم مسئلہ کو ثابت کرنے میں سہولت پیدا ہو جاتی ہے اگر پہلے ایک تفاعل $ف_۱$ ایسا معلوم کیا جائے جو رتبہ ر اور درجہ ن والے گروہ $گ_۱$ کے ابدالات $س_۱ = ۱، س_۲، س_۳، ... س_ر$ سے نہیں بدلتا۔ ایسا تفاعل $ف_۱$ معلوم کرنیکے لئے ہم ایک تفاعل $ش_۱ = لا_۱^{ا} لا_۲^{ب} لا_۳^{ج} ... لا_ن^{ل}$ لیتے ہیں جہاں ا، ب، ج، ... ل تمام مختلف صحیح عدد ہیں اور اسلئے متشاکل گروہ کے تمام ابدالات کے لئے $ش_۱$، ن مختلف قیمتیں اختیار کرتا ہے۔

$ش_۲ = س_۲ ش_۱$، $ش_۳ = س_۳ ش_۱$ وغیرہ لینے سے ہم ثابت کرینگے کہ $ف_۱ = ش_۱ + ش_۲ + ... + ش_ر$ گروہ $گ_۱$ کے ابدالات سے نہیں بدلتا۔ ہم $ف_۱$ کو $ش_۱، ش_۲، ... ش_ر$ کی کسی قوتوں کے مجموعہ کے برابر بھی لے سکتے ہیں جو ا، ب، ج، ... ل کے لئے اعداد صحیح کے مختلف جٹ لینے کی ایک خاص صورت ہو گی پس اگر

$$ف_۱ = ش_۱ + ش_۲ + ش_۳ + ... + ش_ر = (س_۱ + س_۲ + ... + س_ر) ش_۱$$

لیا جائے اور اسکو گروہ $گ_۱$ کے کسی ابدال $س_م$ سے ضرب دیا جائے تو حاصل ہوتا ہے

$$س_م ف_۱ = (س_۱ س_م + س_۲ س_م + ... + س_ر س_م) ش_۱۔$$

اب اگر $س_ب$، $س_ج$ گروہ $گ_۱$ کے ابدال ہیں تو مفروض کے مطابق $س_ب س_م$ بھی $گ_۱$ کا ابدال ہے اور مزید برآں $س_ب س_م ش_۱ \ne س_ج س_م ش_۱$ کیونکہ اگر $س_ب س_م ش_۱ = س_ج س_م ش_۱$ تو $س_ب =$

ضرب دینے پر $س_{ب} شہ_{۱} = س_{ج} شہ_{۱}$ اور اسلئے چونکہ $شہ_{۱}$ کی صرف ن قیمتیں ہیں $س_{ب} = س_{ج}$۔ پس $شہ_{۱}، شہ_{۲}، \ldots، شہ_{ن}$ کو $س_{ع}$ سے ضرب دینے کا اثر یہ ہے کہ یہ ابدالات کسی دوسری ترتیب میں عود کرتے ہیں اور اس لئے $گ_{۱}$ کے کسی ابدال سے $فہ_{۱}$ غیر متغیر رہتا ہے۔ کوئی ابدال ت جو گروہ $گ_{۱}$ میں نہیں ہے $فہ_{۱}$ کو بدلدیتا ہے کیونکہ اگر $ت\, فہ_{۱} \equiv فہ_{۱}$ تو $ت\, شہ_{ع} \equiv شہ_{پ}$ ہونا چاہئے اس لئے $س_{ع}\, ت\, شہ_{۱} = س_{پ}\, شہ_{۱}$ $\therefore$ $س_{ع}\, ت \equiv س_{پ}$ کیونکہ $شہ_{۱}$ کی ن مختلف قیمتیں ہیں۔ $\therefore$ $ت \equiv س_{ع}^{-۱} س_{پ}$ اور اسلئے ت گروہ $گ_{۱}$ سے متعلق ہے۔

اب عام مسئلہ کا ثبوت دینے کے لئے فرض کرو کہ $ح_{۲}$ ایک ایسا ابدال ہے جو $گ_{۱}$ میں شامل نہیں ہے اور اس لئے یہ ابدال $فہ_{۱}$ کو بدلکر $فہ_{۲}$ کردیتا ہے۔ $گ_{۱}$ کے ارکان کو $ح_{۲}$ سے ضرب دو تو ابدالات کا حسب ذیل سلسلہ ملتا ہے جنہیں سب ابدالات فی الحقیقت متشاکل گروہ سے متعلق ہیں:- (257)

$$س_{۱} ح_{۲}،\ س_{۲} ح_{۲}،\ س_{۳} ح_{۲}،\ \ldots،\ س_{ر} ح_{۲} \qquad (۲)$$

اس سلسلے کے ارکان میں حسب ذیل خواص پائے جاتے ہیں:

(۱) یہ سب ایک دوسرے سے مختلف ہیں کیونکہ اگر ایسا نہ ہوتا تو $س_{ع} ح_{۲} = س_{ب} ح_{۲}$ سے $ح_{۲}^{-۱}$ سے ضرب دینے پر $س_{ع}$ کا $س_{ب}$ کے مساوی ہونا لازم آتا۔ (۲) یہ سب $فہ_{۱}$ کو $فہ_{۲}$ میں مستحیل کرتے ہیں کیونکہ پہلے جزو ضربی $س_{ع}$ سے $فہ_{۱}$ نہیں بدلتا اور $ح_{۲}$ اسکو $فہ_{۲}$ میں

بدل دیتا ہے۔ اور (۳) کوئی اور ابدالات تشاکل گروہ میں شامل نہیں ہیں جنمیں یہ خاصیت ہو کیونکہ اگر کوئی ابدال ت، ف$_1$ کو ف$_2$ میں بدلے تو حاصل ضرب ت ح$_2^{-1}$ سے ف$_1$ نہیں بدلیگا اور اس لئے یہ ابدال ت ح$_2^{-1}$ گروہ گ$_1$ سے متعلق ہوگا یعنی ت ح$_2^{-1}$ = س$_ع$ اور اسلئے ت = س$_ع$ ح$_2$۔

اب ہم ابدال ح$_3$ سے جو گ$_1$ یا سلسلۂ س$_ع$ ح$_2$ میں شامل نہیں ہے ایک اور صف بناتے ہیں۔ یہ ابدال ف$_1$ کو ایک نئی قیمت ف$_3$ میں بدلیگا کیونکہ اگر یہ ف$_1$ کو غیر متغیر رکھے تو یہ گ$_1$ میں شامل ہوگا اور ف$_1$ کو ف$_2$ میں بدلے تو یہ دوسری صف میں شامل ہوگا۔ اسی طرح عمل کرنے سے اور ہر منزل پر ح کی ایسی قیمت لینے سے جو سابقہ صفوں میں شامل نہ ہو ہم تشاکل گروہ کے ن ابدالات کو ختم کر سکتے ہیں اور ان کو غ صفوں میں ترتیب دے سکتے ہیں جن کے ساتھ ف کی قیمتیں ف$_1$، ف$_2$، ... ف$_غ$ منسوب ہیں جو ایک دوسرے سے مختلف ہیں اور جو ف کی تمام قیمتوں پر مشتمل ہیں کیونکہ جدول سے ہمیں ف$_1$ پر کسی ابدال کا اثر معلوم ہو جائیگا۔ اس طرح ہمکو ذیل کی جدول ملتی ہے جس میں تشاکل کی خاطر ا کی بجائے ح$_1$ لکھا گیا ہے۔

س$_1$ ح$_1$، س$_2$ ح$_1$، س$_3$ ح$_1$، ... س$_ع$ ح$_1$

س$_1$ ح$_2$، س$_2$ ح$_2$، س$_3$ ح$_2$، ... س$_ع$ ح$_2$

س$_1$ ح$_3$، س$_2$ ح$_3$، س$_3$ ح$_3$، ... س$_ع$ ح$_3$

. . . .

. . . .

س$_1$ ح$_غ$، س$_2$ ح$_غ$، س$_3$ ح$_غ$، ... س$_ع$ ح$_غ$

تشاکل گروہ کے ابدالات کو گ کے ابدالات کے ذریعہ مذکورۂ بالا طریقہ پر ترتیب دینے کو ہم فہ کے حوالہ کے بغیر بھی اس طرح ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر مثلاً $ح_۳$ کسی سابقہ صفوں میں شامل نہیں ہے تو $س_ع ح_۳$، $س_ب$ یا $س_ب ح_۲$ کے مساوی نہیں ہے۔ کیونکہ اگر $س_ع ح_۳ = س_ب$ تو $ح_۳ = س_ع^{-۱} س_ب$ اور اس لئے $ح_۳$ پہلی صف میں واقع ہوگا۔ اور اگر $س_ع ح_۳ = س_ب ح_۲$ تو $ح_۳ = س_ع^{-۱} س_ب ح_۲$ اور اسلئے $ح_۳$ دوسری صف میں واقع ہوگا۔ اس طرح اگر ہم تشاکل گروہ کا کوئی نیا ابدال $ح_۴$ لیں جو پہلی تین صفوں میں شامل نہیں ہے تو ہمیں ایک نئی صف ملتی ہے جسمیں کا کوئی رکن پہلی تین صفوں میں واقع نہیں ہوتا۔ کیونکہ اگر $س_ع ح_۴ = س_ب$ یا $س_ب ح_۲$ یا $س_ب ح_۳$ تو $ح_۴ = س_ع^{-۱} س_ب$ یا $س_ع^{-۱} س_ب ح_۲$ یا $س_ع^{-۱} س_ب ح_۳$ اور اسلئے $ح_۴$ پہلی یا دوسری یا تیسری صف میں واقع ہوگا۔ اس طرح عمل جاری رکھنے پر ہم تشاکل (258) گروہ کے تمام ن! ابدالات کو ختم کردیتے ہیں اور ان کو مذکورۂ بالا جدول میں ترتیب دیتے ہیں۔

اب چونکہ اس جدول میں غہ صف ہیں اور ہر صف میں ر ارکان ہیں اس لئے ر غہ = ن! اور مسئلہ ثابت ہو جاتا ہے۔

غہ قیمتی تفاعل کی مختلف قیمتوں

$فہ_۱$، $فہ_۲$، ...، $فہ_ر$، ...، فہ

کی متشابہت کی وجہ سے یہ بالکل واضح ہے کہ انمیں سے ہر تفاعل کا ایک گروہ ہوگا جو فہ$_1$ کے گروہ کے متشابہ ہوگا۔ یہ آسانی کے ساتھ ثابت ہو سکتا ہے کہ انہیں سے کسی تفاعل فہ$_ر$ کا گروہ گ$_ر$ کے تمام ابدالات کو ابدال ح$_ر$ سے مستحیل کرنے سے جس سے فہ$_1$، فہ$_ر$ میں بدلتا ہے حاصل ہوتا ہے۔ واقعہ یہ ہے کہ کوئی ابدال ح$_ر^{-1}$ س$_1$ ح$_ر$، فہ$_ر$ کو نہیں بدلتا کیونکہ ح$_ر^{-1}$ سے وہ فہ$_1$ میں تبدیل ہوتا ہے جو س$_1$ سے غیر متبدل رہتا ہے اور پھر ح$_ر$ سے فہ$_ر$ میں تبدیل ہوتا ہے۔ پس فہ$_ر$ کا گروہ یہ ہے

ح$_ر^{-1}$ س$_1$ ح$_ر$، ح$_ر^{-1}$ س$_2$ ح$_ر$، ح$_ر^{-1}$ س$_3$ ح$_ر$، ... ح$_ر^{-1}$ س$_ر$ ح$_ر$

جہاں گ$_1$ کا ہر ابدال، ح$_ر$ سے مستحیل ہوتا ہے۔ اس نتیجہ کو اختصاراً اس ترقیم

گ$_ر$ = ح$_ر^{-1}$ گ$_1$ ح$_ر$

سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

گ$_1$، گ$_2$، ... گ$_ن$ کو مزدوج گروہ کہا جائیگا اور متناظر تفاعلوں فہ$_1$، فہ$_2$، فہ$_3$، ... فہ$_ن$ کو مزدوج تفاعل۔

یہ واضح ہے (دفعہ ۲۲۳) کہ کوئی دو مزدوج گروہ، متشابہ ابدالات پر مشتمل ہوتے ہیں۔

گ اور متشاکل گروہ کے رتبوں کے درمیانی رشتے سے متعلق جو کچھ اوپر ثابت ہوا وہ عام تر صورت یعنی گ$_1$ اور کسی وسیع تر گروہ گ کے رتبوں کے درمیانی رشتے کے لئے بھی درست ہے جبکہ گ میں گ$_1$ تحت گروہ کے طور پر شامل ہو۔ اسکے یہ معنے ہیں کہ گ$_1$ کا رتبہ ر$_1$ کسی وسیع تر گروہ گ کے رتبہ ر کا ٹھیک مقسوم ہے اور خارج قسمت م ایک کثیر قیمتی تفاعل کی مختلف قیمتوں کی تعداد کے مساوی ہے۔ یہ ایسا تفاعل ہے جو گ$_1$ کے ابدالات سے نہیں بدلتا لیکن تفاعل کی مختلف قیمتیں گ کے ابدالات سے حاصل ہوتی ہیں۔ اسکا ثبوت جو مندرجہ بالا ثبوت کے بالکل (259) متشابہ ہے اس طور پر دیا جا سکتا ہے کہ گ کے ر ابدالات کو صفوں کی ایک تعداد (فرض کرو م) میں ترتیب دیا جائے جنمیں سے پہلی صف گ$_1$ کے ر$_1$ ابدالات سے بنی ہو۔ دوسری صف ان ابدالات کو ح$_2$ سے ضرب دینے کے بعد بنائی گئی ہو جہاں ح$_2$ گ کا ایک ایسا ابدال ہے جو گ$_1$ میں شامل نہیں ہے۔ تیسری صف گ$_1$ کے ابدالات کو ح$_3$ سے ضرب دینے کے بعد بنائی گئی ہو جہاں ح$_3$، گ کا ایک ایسا ابدال ہے جو پہلی دو صفوں میں واقع نہیں ہوتا اور علی ہذا یہاں تک کہ گ کے تمام ابدالات ختم ہو جائیں۔ جدول سے گ$_1$ کے ہر ایک ابدال کا اثر فہ$_1$ پر معلوم ہوتا ہے جو یا تو اس کو غیر متغیر رکھتا ہے یا فہ$_1$ یا فہ$_2$ یا ... یا فہ$_م$ میں بدل دیتا ہے۔ پس درحقیقت فہ$_1$ + فہ$_2$ + ... + فہ$_م$ ایک

ایسا تفاعل ہے جو گ۱ کے ابدالات سے نہیں بدلتا۔
اس طرح ہمکو علاوہ رغہ = رَغہَ = ن کے حسب ذیل رشتے حاصل ہوتے ہیں :۔

رَ = م ر اور اس لئے غہ = م غہَ

مثالیں

۱۔ چار عنصروں کے لئے تفاعل فہ۱ ≡ لا۱ لا۲ + لا۳ لا۴ کی مختلف قیمتوں کے جواب میں، مزدوج گروہ بناؤ۔

یہ آسانی سے معلوم ہوتا ہے کہ اس تفاعل کی صرف تین مختلف قیمتیں ہیں یعنے

فہ۱ ≡ لا۱ لا۲ + لا۳ لا۴، فہ۲ ≡ لا۱ لا۳ + لا۲ لا۴، فہ۳ ≡ لا۱ لا۴ + لا۲ لا۳

اور اس لئے ہر تفاعل کے لئے ایک ۸ ویں رتبہ کا گروہ ہے۔

فہ۱ کا گروہ حسب ذیل آٹھ ابدالات پر مشتمل ہے :۔

گ۱ ≡ [۱، (۲۱)، (۴۳)، (۲۱)(۴۳)، (۳۱)(۴۲)، (۴۱)(۳۲)، (۴۲۳۱)، (۳۲۴۱)]

اگر ہم کوئی ابدال مثلاً (۳۲) لیں جو فہ۱ کو فہ۲ میں تبدیل کرتا ہے اور نیز کوئی دوسرا مثلاً (۲۴) لیں جو فہ۱ کو فہ۳ میں تبدیل کرتا ہے اور پھر پچھلی دفعہ کی جدول بنائیں تو ہمیں متشاکل گروہ کے تمام چوبیس ابدالات حسب ذیل حاصل ہوتے ہیں :۔

۱ (۲۱) (۴۳) (۲۱) (۴۳) (۳۱) (۴۲) (۴۱)(۳۲) (۴۲۳۱) (۳۲۴۱)

(۳۲) (۲۳۱) (۴۳۲) (۲۴۳۱) (۳۴۲۱) (۴۱) (۴۲۱) (۳۴۱)

(۴۲) (۲۴۱) (۳۴۲) (۲۳۴۱) (۳۱) (۴۳۲۱) (۴۳۱) (۳۲۱)

پہلی صف گروہ گ۱ ہے۔ دوسری صفیں گروہ نہیں ہیں لیکن اس طرح کی ہیں کہ دوسری صف کے ارکان سب کے سب فہ۱ کو فہ۲ میں

تبدیل کرتے ہیں اور ان کے علاوہ کوئی اور ارکان فہ۱ کو فہ۲ میں تبدیل نہیں کرتے۔ اس طرح تیسری صف کے ارکان سب کے سب فہ۱ کو فہ۳ میں تبدیل کرتے ہیں۔ اور ان کے علاوہ کوئی اور ارکان فہ۱ کو فہ۳ میں تبدیل نہیں کرتے۔ فہ۲ کا متناظر گروہ گ۲، گ۱ کے ابدالات کو (۳۲) سے مستحیل کرنے سے حاصل ہوتا ہے اور اس استحالہ کے لئے گ۱ کے ابدالات میں صرف ۲ اور ۳ کا باہمی تبادلہ کرنا کافی ہے۔ چنانچہ اس طریقہ سے ہمیں فہ۲ اور فہ۳ کے گروہ آسانی کے ساتھ حسب ذیل حاصل ہوتے ہیں :-

گ۲ = [۱، (۳۱)، (۴۲)، (۳۱)(۴۲)، (۲۱)(۴۳)، (۴۱)(۳۲)، (۴۳۲۱)، (۲۳۴۱)]

گ۳ = [۱، (۴۱)، (۳۲)، (۴۱)(۳۲)، (۳۱)(۴۲)، (۲۱)(۴۳)، (۲۴۳۱)، (۳۴۲۱)]

یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ تیسرے رتبہ کے کوئی دائری ابدالات ان گروہوں (280) میں سے کسی گروہ میں موجود نہیں ہیں اور یہ تینوں گروہ بعض مشترک ابدالات رکھتے ہیں۔ کیونکہ اکائی ابدال تمام مزدوج گروہوں میں مشترک ہونا چاہئے اور یہاں گ۱، گ۲، گ۳ میں اس اکائی ابدال کے علاوہ ابدالات (۲۱) (۴۳)، (۳۱) (۴۲)، (۴۱) (۳۲) مشترک ہیں۔ یہ چار ابدال، تین مزدوج گروہوں کا ایک مشترک تحت گروہ ہیں۔

۲۔ اس بات کی تصدیق کرو کہ پہلی مثال میں گ۱ کے ابدالات ایک بند گروہ بناتے ہیں یعنے اس کے ارکان میں سے کسی دو کو ضرب دینے سے ہمیشہ اسی گروہ کا کوئی نہ کوئی رکن پیدا ہوتا ہے۔

گ۱ کے ابدالات کو پہلی مثال کی ترتیب میں ہی رکھ کر انکو علی الترتیب ۱، ا، ب، ج، د، ع، ف، گ سے تعبیر کرو تو حسب ذیل ضربی جدول ملیگی جس کی تصدیق آسانی کے ساتھ ہو سکتی ہے :-

	ا	أ	ب	ج	د	ع	ف	گ
ا ≡ ا	ا	أ	ب	ج	د	ع	ف	گ
(۲۱) ≡ أ	أ	ا	ج	ب	گ	ف	ع	د
(۴۳) ≡ ب	ب	ج	ا	أ	ف	گ	د	ع
(۲۱)(۴۳) ≡ ج	ج	ب	أ	ا	ع	د	گ	ف
(۳۱)(۴۲) ≡ د	د	ف	گ	ع	ا	ج	أ	ب
(۴۱)(۳۲) ≡ ع	ع	گ	ف	د	ج	ا	ب	أ
(۴۲۳۱) ≡ ف	ف	د	ع	گ	ب	أ	ج	ا
(۳۲۴۱) ≡ گ	گ	ع	د	ف	أ	ب	ا	ج

عمل ضرب میں پہلے ستون سے جزو ضربی لیکر اسکو باری باری سے اوپر کی صف کے ہر حرف کی داہنی جانب رکھنا ہوگا۔

یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ گ، میں تحت گروہ

[ا، أ، ب، ج]، [ا، ج، د، ع]، [ا، ج، ف، گ]

شامل ہوتے ہیں جو سب کے سب چوتھے رتبہ کے ہیں، نیز دوسرے رتبہ کے متعدد تحت گروہ بھی شامل ہیں مثلاً

[ا، أ]، [ا، ج] وغیرہ۔

۳۔ چار عناصر کے لئے متبادلہ گروہ گ بناؤ۔ ایسے ابدالات جو انتقالات کی جفت تعداد پر مشتمل ہیں مثال (۱) میں دئے ہوئے چوبیس

ابدالات میں سے آسانی کے ساتھ چن لئے جا سکتے ہیں۔ چنانچہ ایسے
چار ابدالات ۱، (۲۱)(۴۳)، (۳۱)(۴۲)، (۴۱)(۳۲) ہیں اور پھر تیسرے (261)
رتبہ کے آٹھ دائری ابدالات ہیں۔ اِن کو ہم تین صفوں میں حسب ذیل
وضع پر ترتیب دیتے ہیں:-

گ' = {
۱ (۲۱)(۴۳) (۳۱)(۴۲) (۴۱)(۳۲)
(۲۳۱) (۴۳۲) (۴۲۱) (۳۴۱)
(۲۴۱) (۳۴۲) (۴۳۱) (۳۲۱)

اس گروہ سے متعلق تفاعل $\sqrt{\Delta}$ ہے۔ اگر اوپر کے ہر ابدال کو کسی انتقال مثلاً (۳۲) سے ضرب دیا جائے جو $\sqrt{\Delta}$ کو $-\sqrt{\Delta}$ میں تبدیل کرتا ہے تو متشاکل گروہ کے باقی بارہ ابدالات حاصل ہوتے ہیں۔ اگر گ' کے ہر رکن کو (۳۲) سے مستحیل کیا جائے تو $-\sqrt{\Delta}$ کا گروہ حاصل ہوگا اور اسکی آسانی کے ساتھ تصدیق ہو سکتی ہے کہ یہ گروہ گ' پر منطبق ہوتا ہے جو $\sqrt{\Delta}$ کا گروہ ہے۔ مثلاً (۲۱)(۴۳) اِس استحالہ سے (۳۱)(۴۲) ہوتا ہے، (۴۱)(۳۲) غیر متغیر رہتا ہے، (۳۲۱) اور (۲۳۱) آپس میں بدل جاتے ہیں اور علیٰ ہذا القیاس۔ پس یہ دونوں مزدوج گروہ اس صورت میں منطبق ہوتے ہیں کیونکہ $\sqrt{\Delta}$ اور $-\sqrt{\Delta}$ دونوں ایک ہی گروہ سے متعلق ہیں یہی نتیجہ عناصر کی کسی تعداد کے لئے بھی درست ہے (دفعہ ۲۲۵)۔

گ' کے ابدالات کو مذکرہ صدر تین صفوں میں ترتیب دینے سے اس امر کی توضیح ہوتی ہے جو پچھلی دفعہ کے ختم پر ثابت ہوا تھا۔ پہلی صف کے چار ابدال گ' کا ایک تحت گروہ ہیں، ان سے دوسری صف کے چار ابدال (۲۳۱) سے ضرب (اسکو بائیں جانب رکھکر) دینے سے حاصل ہوتے ہیں، اور آخری چار ابدالات (۲۴۱) سے ضرب دینے سے تحت گروہ کا رتبہ ۴ گ' کے رتبہ کا ایک مقسّم ہے۔ اس گروہ کو ہم ھ سے تعبیر کرینگے چنانچہ

ھ ≡ [۱، (۲۱)(۴۳)، (۳۱)(۴۲)، (۴۱)(۳۲)]

تفاعل ا (لا$_1$لا$_2$ + لا$_3$لا$_4$) + ب (لا$_1$لا$_3$ + لا$_2$لا$_4$) + ج (لا$_1$لا$_4$ + لا$_2$لا$_3$)
اس گروہ سے متعلق ہے۔ اس میں ا، ب، ج کوئی اختیاری مستقل ہیں۔

متشاکل گروہ کے ابدالات کے جواب میں اس تفاعل کی چھ مختلف قیمتیں ہیں یعنے

ا ف$_1$ + ب ف$_2$ + ج ف$_3$، ا ف$_2$ + ب ف$_3$ + ج ف$_1$، ا ف$_3$ + ب ف$_1$ + ج ف$_2$،

ا ف$_1$ + ب ف$_3$ + ج ف$_2$، ا ف$_2$ + ب ف$_1$ + ج ف$_3$، ا ف$_3$ + ب ف$_2$ + ج ف$_1$،

ان سب کا ایک ہی گروہ ھ ہے کیونکہ اس صورت میں یہ چھ مزدوج گروہ منطبق ہوتے ہیں۔ فی الحقیقت متشاکل گروہ کا کوئی استحالہ جو ھ کے ابدالات پر عمل کرتا ہو وہی چار ابدالات کسی نہ کسی ترتیب میں پیدا کرتا ہے۔ ایسے گروہ کو غیر متغیر تحت گروہ کہا جائیگا۔ متبادلہ گروہ بھی ایک غیر متغیر تحت گروہ ہے۔

۴۔ ثابت کرو کہ ن ۔ ۱ انتقالات (۱۲)، (۱۳)، (۱۴)، ... (ان) سے اخذ کردہ گروہ متشاکل گروہ پر منطبق ہوتا ہے۔

ہر ابدال چونکہ انتقالات کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے اسلئے وہ مندرجۂ بالا سلسلہ کے ارکان کے حاصل ضرب کے طور پر تعبیر ہو سکتا ہے (مثال ۱۲ دفعہ ۲۲۲)۔

۵۔ ثابت کرو کہ عناصر کی کسی تعداد کے لئے رتبہ $\frac{1}{2}$ ن کا صرف ایک گروہ ہے یعنی متبادلہ گروہ۔

فرض کرو کہ رتبہ $\frac{1}{2}$ ن کا گروہ

س$_1$ ≡ ۱، س$_2$، س$_3$، ...، س$_{\frac{1}{2}ن}$ (۱)

ہے۔

(262) اسکو اول دائیں جانب اور پھر بائیں جانب، متشاکل گروہ کے کسی ابدال ت سے جو اس میں پہلے سے شامل نہ ہو ضرب دینے سے ہمیں یہ دو سلسلے ملتے ہیں :-

$$ت،\ ت\ س_{۲}،\ ت\ س_{۳}،\ ...\ ،\ ت\ س_{\frac{۱}{۲}ن} \qquad (۲)$$

$$ت،\ س_{۲}\ ت،\ س_{۳}\ ت،\ ...\ س_{\frac{۱}{۲}ن}\ ت \qquad (۳)$$

ان میں سے ہر ایک میں وہ $\frac{۱}{۲}$ ت ابدالات ہونے چاہئیں جو (۱) میں شامل نہیں ہیں۔ پس یہ دونوں سلسلے مماثل ہیں اور خ خواہ کچھ ہی ہو جے کی کسی خاص قیمت کے لئے ہمیں یہ رشتہ

$$ت\ س_{خ} = س_{جے}\ ت\ یا\ س_{خ} = ت^{۱}\ س_{جے}\ ت$$

ملتا ہے جس سے آسانی کے ساتھ یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ گروہ (۱) میں وہ سب ابدالات شامل ہیں جو انہیں شریک ہونیوالے کسی ابدال کے متشابہ ہیں۔ پس (۱) کسی واحد انتقال پر مشتمل نہیں ہو سکتا کیونکہ اگر ایسا ہو تو اس میں سب ابدالات ویسے ہی ہونگے اور اس لئے وہ متشاکل گروہ سے مماثل ہوگا (مثال ۴)۔

اب بتایا جا سکتا ہے کہ (۱) میں کسی دو انتقالات کا حاصل ضرب بطور ابدال کے شامل ہے۔ اس مقصد کے لئے فرض کرو کہ سلسلہ (۲) میں ت کوئی انتقال ہے۔ (۱) اور (۲) دونوں کو ایک دوسرے انتقال ع سے ضرب دینے کا اثر یہ ہوگا کہ دونوں سلسلے (۱) اور (۲) ایک دوسرے کی جگہ بدل جائینگے۔ اس لئے یہ ثابت ہو گیا کہ ع ت، (۱) کے ابدالات میں سے ایک ابدال ہونا چاہئے کیونکہ $س_{۱}$ = انہیں سے ایک ہے۔

اس سے یہ واضح ہے کہ ہر دو قیمتی تفاعل متبادلہ گروہ سے متعلق ہوگا

کیونکہ صرف یہی گروہ ہے جسکا رتبہ مساوات ۲ ر = ن کو پورا کرتا ہے۔

۶ ـ متبادلہ گروہ میں طاق رتبہ کے تمام دائری ابدالات شامل ہوتے ہیں اور جفت رتبہ کا کوئی ابدال شامل نہیں ہوتا۔

۷ ـ ثابت کرو کہ وہ گروہ جسمیں تیسرے رتبہ کے تمام دائری ابدال شامل ہوتے ہیں متبادلہ گروہ ہے یا متشاکل گروہ۔

مثال ۱۳ دفعہ ۲۲۲ استعمال کرو۔

۸ ـ ثابت کرو کہ جس گروہ میں پانچویں رتبہ کے تمام دائری ابدالات شامل ہوتے ہیں اس میں تیسرے رتبہ کے تمام دائری ابدالات بھی شامل ہونے چاہئیں کیونکہ

(ا ج د ع ب) (ا ج ب ع د) = (ا ب ج)

۹ ـ گروہ کا رتبہ اس کے ابدالات میں سے کسی ایک کے رتبہ کا ضعف ہوتا ہے۔

۱۰ ـ اگر ن ایک مفرد عدد ہو تو رتبہ ن کا ہر گروہ، رتبہ ن کے ایک دائری ابدال کی ن قوتوں سے ترکیب پاتا ہے۔

۱۱ ـ اگر دو گروہوں میں مشترک ابدالات ہوں تو یہ خود ایک گروہ بناتے ہیں اور انکی تعداد دونوں گروہوں کے رتبوں کا مشترک مقسوم ہے۔

۱۲ ـ اگر ایک گروہ کے ارکان ایک ہی ابدال سے مستخیل کئے جائیں تو اس طور پر اخذ کردہ مزدوج خود ایک گروہ بناتے ہیں۔

دفعہ ۲۲۳ کے ختم پر دئے ہوئے رشتوں کو استعمال کرو۔

(263) ۲۲۷ ـ دئے ہوئے گروہ کے تفاعلوں کا بنانا ـ گیلوا[1] تفاعل

اب ہم پھر اس مسئلہ پر بحث کرینگے جو ن متغیروں لا₁، لا₂، .... لان کے ایسے تفاعلوں کے بنانے سے متعلق ہے جو ایک دئے ہوئے گروہ گ کے تمام ابدالات کے لئے نہیں بدلتے۔

[1] Galois

اس مسئلہ پر ہم نے دفعہ ۲۲۶ کی ابتدا میں بحث کی تھی۔ ہم $سا_1$ کیلئے ذیل کے مختلف نمونہ کا تفاعل انتخاب کرتے ہیں جو متشاکل گروہ کے تمام ابدالات کے لئے ن مختلف قیمتیں رکھتا ہے :۔

$$سا_1 = عم_1 لا_1 + عم_2 لا_2 + عم_3 لا_3 + \dots + عم_ن لا_ن$$

جہاں $عم_1$، $عم_2$، ...، $عم_ن$ ن مختلف مستقل ہیں۔ اس تفاعل $سا_1$ کو "گیالو اتفاعل" کہتے ہیں۔ دفعہ ۲۲۶ کی طرح $سا_1$، $سا_2$، ...، $سا_ر$ کو $گ_1$ کے ابدالات سے حاصل کیا جاتا ہے تو ہم دیکھتے ہیں $سا_1$، $سا_2$، ... $سا_ر$ گروہ $گ_1$ کے ابدالات سے نہیں بدلتے۔ بالخصوص تفاعل

$$فہ_1 = (ما + سا_1) \times (ما + سا_2) \dots (ما + سا_ر)$$

گروہ $گ_1$ کے ابدالات سے نہیں بدلیگا اور ان ابدالات سے جو $گ_1$ میں شامل نہیں ہیں ایک مختلف قیمت میں بدل جائیگا۔ اس لئے کسی وسیع تر گروہ کے ابدالات سے جس میں $گ_1$ بحیثیت تحت گروہ شامل ہو تفاعل $فہ_1$ غیر متغیر نہیں رہتا۔ $فہ_1$ کو ما کی قوتوں میں پھیلایا جائے تو اگرچہ ما کی قوتوں کے بعض سر ایک وسیع تر گروہ کے ابدالات سے نہ بدلیں سب کے سب سر غیر متغیر نہیں رہتے اور اس لئے ان میں سے ایک ابدال سے ہمیں ایک ایسا تفاعل ملیگا جو ابدالات $گ_1$ سے غیر متغیر رہتا ہے اور ایک وسیع تر گروہ کے ابدالات سے بدل جاتا ہے۔ ایک مساوات کی اصلوں کی قوتوں کے مجموعوں کے لئے ان جملوں کا لحاظ رکھتے ہوئے جو سروں کی رقوم میں بیان کئے گئے ہیں ہم دیکھ سکتے ہیں کہ $فہ_1$ میں ما کی قوتوں کے سروں کی بجائے ہم $سا_1$، $سا_2$، ... $سا_ر$ لے سکتے ہیں اور اس سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ قوتوں کے ان ر مجموعوں میں سے کم از کم ایک ایسا ہے جو $گ_1$ کے ابدالات سے نہیں بدلتا

اور متشاکل گروہ سے کسی ایک ابدال سے بدلجاتا ہے۔

ذیل میں ہم دئے ہوئے گروہ سے متعلق تفاعلوں کو معلوم کرنے کے اس طریقہ کی توضیح میں چند مثالیں دیتے ہیں۔

امثلہ

۱۔ تین متغیروں کا ایک تفاعل بناؤ جو متبادلہ گروہ

[(۱)، (۱۲۳)، (۱۳۲)]

کے تمام ابدالات سے غیر متغیر رہے۔

(264) گیا لوا کے تفاعل پر اِن ابدالات سے عمل کرنے سے

$$\text{سا}_1 \equiv \text{عہ}_1\,\text{لا}_1 + \text{عہ}_2\,\text{لا}_2 + \text{عہ}_3\,\text{لا}_3\text{،}$$

$$\text{سا}_2 \equiv \text{عہ}_1\,\text{لا}_2 + \text{عہ}_2\,\text{لا}_3 + \text{عہ}_3\,\text{لا}_1\text{،}$$

$$\text{سا}_3 \equiv \text{عہ}_1\,\text{لا}_3 + \text{عہ}_2\,\text{لا}_1 + \text{عہ}_3\,\text{لا}_2\text{،}$$

$\Sigma\,\text{سا}_1$ اور $\Sigma\,\text{سا}_1^2$ دونوں لا_1، لا_2، لا_3 میں متشاکل ہیں۔ لیکن $\text{سا}_1\text{سا}_2\text{سا}_3$ یا $\Sigma\,\text{سا}_1^3$ کے ذریعہ ہم غیر متشاکل تفاعل

$$\text{لا}_1^2\text{لا}_2 + \text{لا}_2^2\text{لا}_3 + \text{لا}_3^2\text{لا}_1 \quad \text{اور} \quad \text{لا}_1^2\text{لا}_3 + \text{لا}_3^2\text{لا}_2 + \text{لا}_2^2\text{لا}_1\text{،}$$

حاصل کر سکتے ہیں جنہیں سے دونوں، دئے ہوئے گروہ سے متعلق ہونے چاہئیں۔ اگر اِن تفاعلوں کو $\text{فا}_{\text{لا}}$ اور $\bar{\text{فا}}_{\text{لا}}$ کہا جائے تو اس امر کی آسانی کے ساتھ تصدیق ہو سکتی ہے کہ

$$\Sigma\,\text{سا}_1^3 \equiv \Sigma\,\text{عہ}_1^3\,\Sigma\,\text{لا}_1^3 + 6\,\text{عہ}_1\text{عہ}_2\text{عہ}_3\,\text{لا}_1\text{لا}_2\text{لا}_3 + 3\left(\text{فا}_{\text{لا}}\,\text{فا}_{\text{عہ}} + \bar{\text{فا}}_{\text{لا}}\,\bar{\text{فا}}_{\text{عہ}}\right)$$

جہاں $\text{فا}_{\text{عہ}} = \text{عہ}_1^2\text{عہ}_2 + \text{عہ}_2^2\text{عہ}_3 + \text{عہ}_3^2\text{عہ}_1$، $\bar{\text{فا}}_{\text{عہ}} = \text{عہ}_1^2\text{عہ}_3 + \text{عہ}_3^2\text{عہ}_2 + \text{عہ}_2^2\text{عہ}_1$

اگر دفعہ ۲۳۰ کا طریقہ استعمال کیا جائے اور $\text{سا}_1 = \text{لا}_1^2\,\text{لا}_2$ لیا جائے

تو اوپر کا نتیجہ زیادہ آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔

۲ — چار متغیروں کے وہ تفاعل دریافت کرو جو گروہ

$$\text{ھ} \equiv [\,1,\ (21)(43),\ (31)(42),\ (41)(32)\,]$$

سے متعلق ہیں۔

گیا لوا کے تفاعل پر ان ابدالات کا عمل کرنے سے حسب ذیل چار تفاعل حاصل ہونگے:۔

$$\text{سا}_1 \equiv \text{عم}_1\,\text{لا}_1 + \text{عم}_2\,\text{لا}_2 + \text{عم}_3\,\text{لا}_3 + \text{عم}_4\,\text{لا}_4،$$

$$\text{سا}_2 \equiv \text{عم}_1\,\text{لا}_2 + \text{عم}_2\,\text{لا}_1 + \text{عم}_3\,\text{لا}_4 + \text{عم}_4\,\text{لا}_3،$$

$$\text{سا}_3 \equiv \text{عم}_1\,\text{لا}_3 + \text{عم}_2\,\text{لا}_4 + \text{عم}_3\,\text{لا}_1 + \text{عم}_4\,\text{لا}_2،$$

$$\text{سا}_4 \equiv \text{عم}_1\,\text{لا}_4 + \text{عم}_2\,\text{لا}_3 + \text{عم}_3\,\text{لا}_2 + \text{عم}_4\,\text{لا}_1،$$

یہ معلوم ہوگا کہ $\Sigma\,\text{سا}_1$ لا_1، لا_2، لا_3، لا_4 میں متشاکل ہے مگر $\Sigma\,\text{سا}_1^2$ متشاکل نہیں ہے۔ موخرالذکر تفاعل سے مثال ۳ دفعہ ۲۲۶ کا تفاعل $\text{ا}\,\text{فہ}_1 + \text{ب}\,\text{فہ}_2 + \text{ج}\,\text{فہ}_3$ فوراً حاصل ہو جائے گا جس میں فہ_1، فہ_2، فہ_3 سے لا_1، لا_2، لا_3، لا_4 کے وہی تفاعل تعبیر ہوتے ہیں جو مثال ۱ دفعہ ۲۲۶ میں دئے گئے ہیں۔ فی الحقیقت

$$\Sigma\,\text{سا}_1^2 \equiv \Sigma\,\text{عم}_1^2\,\Sigma\,\text{لا}_1^2 + 4(\text{عم}_1\text{عم}_2 + \text{عم}_3\text{عم}_4)\,\text{فہ}_1 + 4(\text{عم}_1\text{عم}_3 + \text{عم}_2\text{عم}_4)\,\text{فہ}_2 + 4(\text{عم}_1\text{عم}_4 + \text{عم}_2\text{عم}_3)\,\text{فہ}_3$$

یہ غیر متشاکل تفاعل فہ_1، فہ_2، فہ_3 علی الترتیب وسیع تر گروہوں گ_1، گ_2، گ_3 سے متعلق ہیں جنکا رتبہ آٹھ ہے۔ اختیاری مستقلوں کے ساتھ اِن کا مجموعہ دئے ہوئے گروہ ھ سے متعلق ہے اور وہ چھہ قیمتی تفاعل ہے۔

۳ — گروہ

گ₁ ≡ [۱، (۲۱)، (۴۳)، (۲۱)(۴۳)، (۳۱)(۴۲)، (۴۱)(۳۲)، (۴۲۳۱)، (۳۲۴۱)]

کے لئے چار متغیروں کے تفاعل دریافت کرو۔

پچھلی مثال کی سا کی چار قیمتوں کے علاوہ یہ مزید چار قیمتیں

سا$_{۵}$ ≡ عہ$_{۱}$ لا$_{۲}$ + عہ$_{۲}$ لا$_{۱}$ + عہ$_{۳}$ لا$_{۳}$ + عہ$_{۴}$ لا$_{۴}$،

سا$_{۶}$ ≡ عہ$_{۱}$ لا$_{۱}$ + عہ$_{۲}$ لا$_{۲}$ + عہ$_{۳}$ لا$_{۴}$ + عہ$_{۴}$ لا$_{۳}$،

سا$_{۷}$ ≡ عہ$_{۱}$ لا$_{۳}$ + عہ$_{۲}$ لا$_{۴}$ + عہ$_{۳}$ لا$_{۲}$ + عہ$_{۴}$ لا$_{۱}$،

سا$_{۸}$ ≡ عہ$_{۱}$ لا$_{۴}$ + عہ$_{۲}$ لا$_{۳}$ + عہ$_{۳}$ لا$_{۱}$ + عہ$_{۴}$ لا$_{۲}$،

لینے سے رشتہ

Σ سا$_{۱}^{۲}$ ≡ ۲ Σ عہ$_{۱}^{۲}$ Σ لا$_{۱}^{۲}$ + ۸ (عہ$_{۱}$ عہ$_{۲}$ + عہ$_{۳}$ عہ$_{۴}$)(لا$_{۱}$ لا$_{۲}$ + لا$_{۳}$ لا$_{۴}$)

+ ۲ (عہ$_{۱}$ + عہ$_{۲}$)(عہ$_{۳}$ + عہ$_{۴}$) × (لا$_{۱}$ + لا$_{۲}$)(لا$_{۳}$ + لا$_{۴}$)

کی آسانی کے ساتھ تصدیق ہو سکتی ہے اور اس لئے تفاعل لا$_{۱}$ لا$_{۲}$ + لا$_{۳}$ لا$_{۴}$ (265)

اور (لا$_{۱}$ + لا$_{۲}$)(لا$_{۳}$ + لا$_{۴}$) حاصل ہوتے ہیں جنمیں سے دونوں دئے ہوئے گروہ سے متعلق ہیں کیونکہ متشاکل گروہ کے سوا کوئی اور وسیع تر گروہ نہیں ہے جسمیں گ$_{۱}$ تحت گروہ کے طور پر شامل ہوتا ہو۔

یہ واضح ہے کہ اس طریقہ کو استعمال کرکے اعلیٰ ترتیبوں کے متشاکل تفاعلوں کے ذریعہ کسی دئے ہوئے گروہ کے متناظر تفاعلوں کی لاانتہا اقسام دریافت ہو سکتی ہیں۔

۲۲۸ — مسئلہ:- ن عناصر کے کسی صحیح کثیر قیمتی تفاعل کی

مختلف قیمتوں کا ہر صحیح متشاکل تفاعل خود عناصر کا متشاکل تفاعل ہوتا ہے۔

اگرچہ یہ مسئلہ ایک غ قیمتی تفاعل (دفعہ ۲۲۶) کی فرد وج قیمتوں ف۱، ف۲، ف۳، ... فغ کی ساخت کی مشابہت سے کافی طور پر واضح ہے لیکن ہم ایک باقاعدہ ثبوت بھی حسب ذیل طریق پر دینگے۔

فرض کرو کہ غ قیمتی کوئی صحیح منطق متشاکل تفاعل فا(ف۱، ف۲، ... فغ) ہے۔ ان غ قیمتوں پر خواہ کوئی ابدال س (جو عناصر پر موثر ہو) استعمال کیا جائے اس سے کوئی تفاعل یا تو غیر متبدل رہتا ہے یا اسکی جگہ دوسرے تفاعلوں میں سے کوئی ایک تفاعل لے لیتا ہے نیز حاصل ہونیوالی قیمتوں میں سے کوئی دو مساوی نہیں ہوسکتیں کیونکہ اگر س فح، س فج کے مساوی ہو تو ابدال س۱ کو عمل میں لانے سے یہ نتیجہ نکلیگا کہ فح = فج جو ہمارے مفروض کے خلاف ہے۔ پس ف کی وہی غ قیمتیں ابدال س کے عمل سے کسی نہ کسی ترتیب میں پھر رونما ہوتی ہیں۔ اس لئے متشاکل تفاعل فا، کسی ابدال سے غیر متبدل رہتا ہے اور اس لئے وہ خود عناصر کا ایک متشاکل ہے۔

اس سے فوراً حسب ذیل نتیجہ صریح اخذ کیا جا سکتا ہے:۔

نتیجہ صریح:۔ کسی صحیح کثیر قیمتی تفاعل کی غ مختلف قیمتیں ایک مساوات کی اصلیں ہیں جسکے سر خود عناصر کے صحیح متشاکل تفاعل ہیں

اسکی تمثیل کے لئے دیکھو جلد اول دفعہ ۲۹ مثال ۴ ۔ منطق صحیح تفاعلوں کے لحاظ سے اوپر جو کچھ ثابت کیا گیا اسکی توسیع تمام منطق تفاعلوں کے لئے ہوسکتی ہے خواہ وہ صحیح ہوں یا نہ ہوں ۔ کیونکہ کوئی کسر دفعہ ۱۹۴ کے طریقہ سے ایک تماثل شکل میں تبدیل ہوسکتی ہے جسکا نسب نما عناصر کی رقوم میں متشاکل ہو ۔

۲۲۹ ۔ مسئلہ ۔ ایک ہی گروہ سے متعلق دو تفاعلوں میں سے ہر ایک کو دوسرے کی رقوم میں ناطق طور پہ بیان کیا جا سکتا ہے

یہ اہم مسئلہ جس پر اب ہم ابدال کے طریقے کے اصول جاری (266)
کرینگے اس سے پہلے (دفعہ ۱۹۴) ذرا مختلف نقطہ نگاہ سے زیر بحث آچکا ہے ۔ فرض کرو کہ $فہ_1$ اور $پہ_1$ دو تفاعل ہیں جو ایک ہی گروہ

$$گ_1 \equiv [\,1،\ س_2،\ س_3،\ \ldots،\ س_ر\,]$$

سے متعلق ہیں جسکا درجہ ن اور رتبہ ر ہے ۔ نیز ان میں سے ہر تفاعل کی غہ مختلف قیمتیں ہیں جہاں ر غہ = ن ۔ کوئی ابدال جو گ میں شامل نہیں ہے $فہ_1$ کو اسکی قیمتوں میں سے کسی ایک میں (فرض کرو $فہ_ک$ میں) بدلدیگا اور ساتھ ہی $پہ_1$، $پہ_ک$ میں بدلجائیگا ۔

تمام ممکن ابدالات سے عمل کرنے سے قیمتوں کے غہ زوج $فہ_1$، $پہ_1$، $فہ_2$، $پہ_2$، ....، $فہ_{غہ}$، $پہ_{غہ}$ حاصل ہونگے ۔ اب اولاً منطق تفاعل

$$\Sigma\, فہ^{خ}\, پہ^{ز} \equiv فہ_1^{خ}\, پہ_1^{ز} + فہ_2^{خ}\, پہ_2^{ز} + \ldots + فہ_ک^{خ}\, پہ_ک^{ز} + \ldots + فہ_{غہ}^{خ}\, پہ_{غہ}^{ز} \qquad (1)$$

صریحاً عناصر کا ایک متشاکل تفاعل ہے کیونکہ اسی استدلال سے جو دفعہ سابق میں استعمال ہوا یہ معلوم ہوتا ہے کہ عناصر پر موثر خواہ کوئی ابدال ہو

وہ کسی نہ کسی ترتیب میں اس مجموعہ کے ارقام کو پیدا کرتا ہے یعنی $ح\ فہ^{خ}\ پہ_{ز}$ اور اس لئے یہ مجموعہ عناصر کا ایک متشاکل تفاعل ہے۔ اب اگر ہم $ز = ا$ لیں اور $خ$ کو ۰، ۱، ۲، ....، $غہ - ۱$ یہ سب قیمتیں علی التواتر دیں تو $پہ_{۱}$، $پہ_{۲}$، $پہ_{۳}$، ....، $پہ_{غہ}$ میں حسب ذیل $غہ$ مساواتیں ملتی ہیں

$$
\left.\begin{array}{l}
پہ_{۱} + پہ_{۲} + \ldots\ldots + پہ_{غہ} = ت \\
فہ_{۱}\, پہ_{۱} + فہ_{۲}\, پہ_{۲} + \ldots\ldots + فہ_{غہ}\, پہ_{غہ} = ت_{۱} \\
فہ_{۱}^{۲}\, پہ_{۱} + فہ_{۲}^{۲}\, پہ_{۲} + \ldots\ldots + فہ_{غہ}^{۲}\, پہ_{غہ} = ت_{۲} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
فہ_{۱}^{غہ-۱}\, پہ_{۱} + فہ_{۲}^{غہ-۱}\, پہ_{۲} + \ldots\ldots + فہ_{غہ}^{غہ-۱}\, پہ_{غہ} = ت_{غہ-۱}
\end{array}\right\} \quad (۲)
$$

جہاں $ت$، $ت_{۱}$، $ت_{۲}$، .... سب کے سب $لا_{۱}$، $لا_{۲}$، ....، $لا_{ن}$ میں متشاکل ہیں۔ اِن مساواتوں کے حل کے لئے دیکھو مثال ۱ صفحہ ۱۰۴ اور مثال ۳ صفحہ ۲۱۹۔ اس حل سے یہ فوراً معلوم ہو جائیگا کہ $پہ_{۱}$ کو $فہ_{۱}$ کے ایک منطق تفاعل کے طور پر حسب ذیل شکل میں بیان کیا جا سکتا ہے:

$$
\nabla(فہ_{۱}، فہ_{۲}، \ldots، فہ_{غہ})\, پہ_{۱} = ا_{۱}\, فہ_{۱}^{غہ-۱} + ا_{۲}\, فہ_{۱}^{غہ-۲} + \ldots\ldots + ا_{غہ-۱}
$$

جہاں ∇ کے وہی معنی ہیں جو دفعہ ۲۰۳ میں بیان ہوئے اور $ا_{۱}$، $ا_{۲}$، ....، $ا_{غہ-۱}$ سب کے سب $لا_{۱}$، $لا_{۲}$، $لا_{۳}$، ....، $لا_{ن}$ میں متشاکل ہیں۔

پس مسئلہ بالا کا عکس یہ ہے کہ دو ایسے منطق تفاعل کہ ہر ایک ناطق طور پر دوسرے کی رقوم میں بیان ہو سکے ایک ہی گروہ
سے متعلق ہوتے ہیں۔ کیونکہ ہر ایک تفاعل اُن سب ابدالات سے (267)

غیر متبدل رہتا ہے جو دوسرے تفاعل کا گروہ بناتے ہیں اور اس لئے یہ دونوں گروہ ایک دوسرے پر منطبق ہونے چاہئیں ۔

۲۳۰ ۔ مسئلہ کی توسیع اور نتائج صریح ۔ فہ اور پہ کے گروہ مماثل نہ بھی ہوں لیکن اگر انمیں سے ایک' دوسرے میں تحت گروہ کے طور پر شامل ہو تو بھی یہ درست ہے کہ وہ تفاعل جو وسیع تر گروہ سے متعلق ہے (اور اس لئے جو مختلف قیمتوں کی کمتر تعداد پر مشتمل ہوتا ہے) تنگ تر گروہ کے تفاعل کی رقوم میں ناطق طور پر بیان ہو سکتا ہے ۔

فرض کرو کہ پچھلی دفعہ کے گروہ گ$_1$ سے متعلق تفاعل فہ$_1$ ہے اور پہ$_1$ وسیع تر گروہ

گَ = [۱، س$_2$، ... ، س$_ر$، س$_{ر+۱}$، ... ، س$_{رَ}$]

سے تعلق رکھتا ہے ۔ تب ہمیں ذیل کے رشتے ملتے ہیں (دفعہ ۲۲۶)

ر غہ = رَ غہَ = ن ، رَ = ک ر ، غہ = ک غہَ

حسب سابق فہ کی غہ مختلف قیمتیں ہیں لیکن پہ کی قیمتیں (یعنے پہ$_1$، پہ$_2$، ... ، پہ$_{غہ}$) ک ک کے جتھوں میں مساوی ہو جاتی ہیں اور اس طرح صرف غہَ مختلف قیمتیں باقی رہتی ہیں ۔ تاہم یہ درست ہے کہ دفعہ سابق کا جملہ (۱)' لا$_1$، لا$_2$ ... ، لا$_ن$ کا ایک متشاکل تفاعل ہے کیونکہ اس پہ$_1$ استعمال کردہ کسی ابدال سے سلسلہ کی رقمیں کسی نہ کسی ترتیب میں رونما ہوتی ہیں ۔ پس مساواتیں (۲) حسب سابق حل کیجا سکتی ہیں اور ر پہ$_1$ کے لئے فہ$_1$ کی رقوم میں ایک جملہ حاصل ہو سکتا ہے ۔ لیکن اگر فہ$_1$ کیلئے پہ$_1$ کی رقوم میں ویسا ہی جملہ حاصل کرنے کی کوشش کیجائے تو حسل ناکام رہتا ہے ۔ اسکی وجہ یہ کہ پہ$_1$ کی قیمتوں میں سے دو یا زیادہ قیمتوں کا

مساوی ہوتا ہے اور ان مساواتوں کے حل میں یہ بات مضمر ہے کہ فہ کی
کوئی دو قیمتیں مساوی نہیں ہیں (دیکھو مثال ۱ صفحہ ۶۰)۔ ایسے
توسیع شدہ مسئلے کو لگرانج[۵] نے دریافت کیا تھا چنانچہ اسکو حسب ذیل
شکل میں بیان کیا جا سکتا ہے :-

لگرانج کا مسئلہ :- اگر متغیروں کے کسی جٹ کے (268)
دو متعلق تفاعل ایسے ہوں کہ ایک تفاعل اُس گروہ کے تمام
ابدالات سے غیر متبدل رہتا ہے جس سے دوسرا تفاعل
متبدل ہے تو پہلا تفاعل دوسرے کے ذریعہ ایک صحیح
کثیر الارقام کی شکل میں بیان ہو سکتا ہے جسکے سر متغیروں کے
متعلق متشاکل تفاعل ہیں ۔

اس مسئلے سے اہم نتائج اخذ کئے جا سکتے ہیں اور یہ ذیل کے نتائج
صریحہ میں شامل ہیں :-

نتیجۂ صریح ۱ ۔ ایک ایسا تفاعل ہمیشہ معلوم ہو سکتا ہے
جسکی رقوم میں دئے ہوئے تفاعلوں کی کوئی تعداد ناطق طور پر
بیان ہو سکتی ہے ۔

دئے ہوئے تفاعلوں کے گروہوں میں ہمیشہ ایک تحت گروہ
موجود ہوتا ہے جو تمام گروہوں میں مشترک ہے کیونکہ کم از کم متماثل
ابدال س = ۱ تمام گروہوں میں مشترک ہے ۔ اس لئے تمام تفاعل
مشترک تحت گروہ سے متعلق تفاعلوں میں سے کسی ایک کی رقوم
میں بیان کئے جا سکتے ہیں ۔

[۵] Lagrange

فرض کرو کہ دئے ہوئے تفاعل فہ، پہ، چہ، ... ہیں تو

سہ ≡ عہ فہ + بہ پہ + جہ چہ + ...

(جہاں عہ، بہ، جہ، ... اختیاری مستقل ہیں) مشترک تحت گروہ کے لئے مطلوبہ قسم کا ایک تفاعل ہے۔ کیونکہ کوئی ابدال جو سہ کو تبدیل نہیں کرتا فہ، پہ، چہ وغیرہ کو بھی تبدیل نہیں کریگا اور اس لئے فہ، پہ، چہ، ... کے گروہوں میں مشترک ہوگا۔

نتیجۂ صریح ۲۔ خواہ کوئی منطق تفاعل ہو وہ ایک تفاعل کی رقوم میں جسکی ن مختلف قیمتیں ہیں ناطق طور پر بیان ہو سکتا ہے، بالخصوص وہ گیالوا کے تفاعل کی رقوم میں ناطق طور پر بیان ہو سکتا ہے۔

کیونکہ ن قیمتی تفاعل کا گروہ، تماثل ابدال میں تحویل ہونے پر، ہر دوسرے تفاعل میں بطور تحت گروہ کے شامل ہے۔

نتیجۂ صریح ۳۔ خود متغیروں کو گیالوا کے تفاعل کی رقوم میں ناطق طور پر بیان کیا جا سکتا ہے۔

مثلاً وہ گروہ جس سے لا۱ متعلق ہے ۱، ۲، ۳ ابدالات کی ۱×۲×۳... ... (ن-۱) تعداد پر مشتمل ہے جس میں تحت گروہ اکائی شامل ہے۔ اس تفاعل کی ن قیمتیں، ن متغیر

لا۱، لا۲، ......، لان

ہیں اور انمیں سے ہر ایک گیالوا کے تفاعل کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے اس نتیجۂ صریح میں جو مسئلہ بیان ہوا ہے اسکو بغیر ثبوت کے ایبل (Abel) نے بیان کیا تھا۔ گیالوا (Galois) نے اس مسئلہ کا ایک ثبوت دیا ہے جس کی بنا ابتدائی اصولوں پر ہے۔

اسکو ہم بیان کر دینا مناسب سمجھتے ہیں کیونکہ اس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ عمل حساب کو کس طرح جاری رکھا جا سکتا ہے اور کسی ایک متغیر کے لئے مطلوبہ منطق تفاعل کس طرح حاصل ہوتا ہے۔ (269)

فرض کرو کہ ف (لا) = ۰ وہ مساوات ہے جسکی اصلیں لا$_1$، لا$_2$ ... لا$_ن$ ہیں اور یہ سب کی سب غیر مساوی ہیں، اور فرض کرو کہ اصلوں کے ایک منطق تفاعل پہ کی ایک معلومہ قیمت پہ$_1$ ہے اور یہ تفاعل ن مختلف قیمتیں رکھتا ہے۔

اگر لا$_1$ کے سوائے تمام اصلوں کو ہر ممکن طریقہ سے ترتیب دیا جائے تو پہ کی ۱ × ۲ × ۳ ... (ن - ۱) = م مختلف قیمتیں حاصل ہوتی ہیں جو اس مساوات

فا (پہ) ≡ (پہ - پہ$_1$) (پہ - پہ$_2$) ... (پہ - پہ$_م$) = ۰

سے ملتی ہیں۔

جب اس مساوات کو پھیلایا جائے تو اس کے سر لا$_2$، لا$_3$، ...، لا$_ن$ کے متشاکل تفاعل ہیں اور اس لئے مساوات

$$\frac{\text{ف (لا)}}{\text{لا} - \text{لا}_1} = ۰$$

کے سروں کی رقوم میں بیان کئے جا سکتے ہیں اور انہیں ف (لا) کے سروں کے ساتھ ساتھ لا$_1$ منطق شکل میں شامل ہوگا۔ اگر پھیلائی ہوئی مساوات کو فا (پہ، لا$_1$) = ۰ سے تعبیر کریں تو فا (پہ$_1$، لا$_1$) ≡ ۰ کیونکہ یہ پہ = پہ$_1$ سے پوری ہوتی ہے، نیز ف (لا$_1$) ≡ ۰ جس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ مساواتیں ف (لا) = ۰، فا (پہ$_1$، لا) = ۰ ایک مشترک اصل رکھتی ہیں۔ یہ آسانی کے ساتھ معلوم ہوتا ہے کہ صرف ہی ایک اصل مشترک ہے۔ پس اگر ہم ف (لا) اور فا (پہ$_1$، لا) کے مشترک مقسوم علیہ اعظم کی جستجو کریں اور عمل کو جاری رکھیں حتیٰ کہ لا میں پہلے

درجہ کا ایک باقی حاصل ہو جائے تو اس کو صفر کے مساوی رکھنے سے لا کے لیے پہ اور ف (لا) کے سروں کی رقوم میں ایک منطق جملہ مل جائیگا اور اس جملہ میں پہ کی بجائے پہ، پہ..... یا پہ رکھے جا سکتے ہیں اور اس سے جملہ کی قیمت نہیں بدلے گی۔

مثال۔ کعبی مساوات

ف (لا) ≡ لا³ + ب، لا² + ب٢ لا + ب٣ = ۰

کے لئے اگر پہ، گیالوا تفاعل ع، لا، + ع٢ لا٢ + ع٣ لا٣ کے مساوی لیا جائے تو یہ آسانی کے ساتھ ثابت ہوتا ہے کہ فا (پہ، لا،) میں لا، دوسری قوت میں شامل ہوتا ہے اور مسئلہ ایک دو درجی اور کعبی کے مقسوم علیہ اعظم دریافت کرنے میں تحویل ہو جاتا ہے۔ یہ سوال سادہ ہو جاتا ہے اگر خاص گیالوا تفاعل لا، + سہ لا٢ + سہ² لا٣ = پہ، لیا جائے اس صورت میں لا² کا سر معدوم ہوتا ہے اور پہ کی رقوم میں لا، حسب ذیل شکل میں حاصل ہوتا ہے :-

$$\text{لا}_1 = \frac{\text{پہ}_1^2 - \text{ب}_1 \text{پہ}_1 + \text{ب}_1^2 - 3\,\text{ب}_2}{3\,\text{پہ}_1}$$

(270) نتیجہ صریح ۴ ۔ گیالوا تفاعل کی تمام قیمتیں انہیں سے کسی ایک کی رقوم میں ناطق طور پر بیان ہو سکتی ہیں ۔ کیونکہ یہ سب قیمتیں ایک ہی گروہ اکائی سے متعلق ہیں۔

۲۳۱ ۔ دو قیمتی تفاعل ۔ مسئلہ ۔ ن متغیروں کا ہر دو قیمتی تفاعل شکل س، ± س٢ $\sqrt{\Delta}$ کا ہوتا ہے جہاں

$س_1$ اور $س_2$ منطق متشاکل تفاعل ہیں اور Δ ممیز ہے۔

کسی دو قیمتی تفاعل کو رتبہ $\frac{1}{2}$ ن کے ایک گروہ سے متعلق ہونا چاہیئے۔ اس رتبہ کا گروہ صرف متبادل گروہ (مثال ۵ دفعہ ۲۲۶) ہے جس سے تفاعل $\sqrt{\Delta}$ متعلق ہے۔ پس مسئلہ بالا دفعہ ۲۲۹ کے اساسی مسئلہ سے بطور ایک نتیجہ صریح کے اخذ ہوتا ہے۔ تاہم اس کی اہمیت کے مد نظر ذیل میں ایک بالکل جداگانہ آزاد ثبوت دیا جاتا ہے:

فرض کرو کہ تفاعل کی دو قیمتیں $فہ_1$ اور $فہ_2$ سے تعبیر ہوتی ہیں اور فرض کرو کہ ان کے جواب میں گروہ $گ_1$ اور $گ_2$ ہیں جنمیں سے ہر ایک کا رتبہ $\frac{1}{2}$ ن ہے۔ سب سے اول یہ دو گروہ مماثل ہونے چاہئیں، کیونکہ اگر $گ_1$ کا کوئی ابدال $س$، $فہ_2$ کو اسکی دوسری قیمت $فہ_1$ میں تبدیل کردے تو $س^{-1}$، $فہ_1$ کو $فہ_2$ میں بدلدیگا، لیکن یہ ناممکن ہے کیونکہ $س^{-1}$ اور $س$ دونوں، گروہ $گ_1$ سے متعلق ہیں۔ پس $گ_1$ کا ہر ابدال، $گ_2$ سے متعلق ہونا چاہئے اور بالعکس۔

اب یہ ثابت کرنیکے لئے کہ یہ گروہ متبادل گروہ کے ساتھ منطبق ہوتے ہیں اس تفاعل $فہ_1 - فہ_2 \equiv$ یہ پر غور کرو۔ ہر وہ ابدال جو مشترک گروہ سے متعلق ہے اس تفاعل کو نہیں بدلتا، کوئی دوسرا ابدال، $فہ_1$ کو $فہ_2$ میں اور $فہ_2$ کو $فہ_1$ میں تبدیل کردیگا اور اس لئے یہ کی علامت بدلدیگا، مثلاً انتقال ($لا_1$ $لا_2$) یہ اثر رکھیگا، کیونکہ کسی تبادل تفاعل کی دو قیمتوں میں جو گروہ مشترک ہے وہ، متشاکل گروہ کے ساتھ منطبق ہوئے بغیر، تمام انتقالات پر مشتمل نہیں ہوسکتا۔ پس بہ آسانی یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ $فہ_1 - فہ_2$، $لا_1 - لا_2$ سے تقسیم پذیر ہے اور اس لئے تمام فرقوں کے حاصل ضرب سے تقسیم پذیر ہے، کیونکہ $یہ^2$ متشاکل ہے۔

$\sqrt{\Delta}$ سے پہ کا خارج قسمت ایک متشاکل تفاعل ہے۔ اس کو ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ $\sqrt{\Delta}$ کی اعلیٰ ترین قوت جو پہ میں واقع ہوتی ہے $(\sqrt{\Delta})^{م}$ ہے۔ تب $(\sqrt{\Delta})^{م}$ سے پہ کا خارج قسمت ایک متشاکل تفاعل ہے، کیونکہ اگر ایسا نہ ہو تو وہ متبادل تفاعل ہوگا اور اس میں $\sqrt{\Delta}$ ایک جزو ضربی کے طور پر مکرر شریک ہوگا جو مفروض کے خلاف ہے۔ پس فوراً یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ م ایک طاق عدد ہے (271)
اور یہ کہ $\sqrt{\Delta}$ سے پہ کا خارج قسمت ایک متشاکل تفاعل ہے اسلئے فہ$_1$ – فہ$_2$ = ا $\sqrt{\Delta}$ اور فہ$_1$ + فہ$_2$ = ب لکھنے سے جہاں ا اور ب دونوں متشاکل ہیں یہ فوراً حاصل ہوتا ہے کہ

فہ$_1$ = س$_1$ + س$_2$ $\sqrt{\Delta}$، فہ$_2$ = س$_1$ – س$_2$ $\sqrt{\Delta}$

جہاں س$_1$ اور س$_2$ دونوں، متغیروں لا$_1$، لا$_2$، ...، لا$_ن$ کے متشاکل تفاعل ہیں۔ نیز یہ بھی واضح ہے کہ گروہ گ$_1$ اور گ$_2$ $\sqrt{\Delta}$ کے گروہ یعنی متبادلہ گروہ کے ساتھ منطبق ہوتے ہیں۔

۲۳۲ ـ مسئلہ۔ صرف متبادل تفاعل ہی ان متغیروں کے وہ غیر متشاکل تفاعل ہیں جنکی ایک قوت متشاکل ہو سکتی ہے۔

اس دفعہ اور دفعات مابعد کے مسئلے جبری مساواتوں کے عام حل کے مسئلہ کے سلسلہ میں بہت اہم ہیں۔ متذکرہ صدر مسئلہ کو مفرد قوتوں کے لئے ثابت کر دینا کافی ہوگا، کیونکہ اگر ایک تفاعل فا (لا$_1$، لا$_2$، ...، لا$_ن$) ایسا موجود ہو کہ فا$^{ف \times ق}$ متشاکل ہے جس میں ف

مفرد ہے تو ایک تفاعل فہ ≡ فا^ق ایسا بھی ہے کہ فہ^ف متشاکل ہے۔ پس فرض کرو

فہ^ف = س، ایک متشاکل تفاعل ہے۔

چونکہ فہ کا گروہ، جو غیر متشاکل ہے، تمام انتقالات کو شامل نہیں رکھ سکتا اسلئے فرض کرو کہ ثہ ≡ (لاء لاب) وہ انتقال ہے جو فہ کو فہ۲ میں تبدیل کرتا ہے۔ پس

فہ۲^ف = فہ^ف = س

اور اسلئے فہ۲ = سہ فہ، جہاں سہ، اکائی کی ف ویں اصل ہے۔

پس ثہ فہ = فہ۲ = سہ فہ

اور پھر ثہ سے عمل کرنے سے

ثہ² فہ = سہ ثہ فہ = سہ² فہ

لیکن ثہ² = ۱، اس لئے سہ² = ۱، اور اسلئے ف = ۲۔

پس چونکہ فہ² متشاکل ہے، فہ ایک متبادل تفاعل ہے اور مسئلہ ثابت ہے۔

۲۳۲۔ مسئلہ۔ غیر تابع عناصر کی کسی تعداد ن کے لئے (272)
کوئی کثیر قیمتی تفاعل ایسا نہیں ہے جسکی ایک قوت دو قیمتی ہو جبکہ ن > ۴، اور ن = ۳ یا ن = ۴ کے لئے اگر ایسی کوئی قوت ہے تو وہ تیسری قوت ہے۔

اپنی توجہ صرف مفرد اعداد تک محدود رکھکر فرض کرو کہ فہ ایک ایسا کثیر قیمتی تفاعل ہے جسکی ف ویں قوت دو قیمتی ہے تو (بموجب دفعہ ۲۳۱)

$$فہ^{ف} = س_{۱} + س_{۲}\sqrt{\Delta} \qquad (۱)$$

فہ کے گروہ میں تیسرے رتبہ کے تمام دائری ابدالات شامل نہیں ہو سکتے کیونکہ اگر ایسا ہوتا تو یہ گروہ متبادلہ گروہ کے ساتھ منطبق ہوتا اور فہ دو قیمتی ہوتا (مثال ۷ دفعہ ۲۲۶)۔ فرض کرو کہ $ثہ = (لا_{۱}\ لا_{۲}\ لا_{۳})$ ایسا ایک ابدال ہے جو فہ کے گروہ میں شامل نہیں ہے اور فرض کرو کہ $ثہ\ فہ = فہ_{ز}$ ۔ چونکہ ثہ کے عمل سے $س_{۱} + س_{۲}\sqrt{\Delta}$ نہیں بدلتا اس لئے مساوات (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$فہ^{ف} = فہ_{ز}^{ف}$$

پس $فہ_{ز} = سہ\ فہ$، جہاں سہ اکائی کی فویں اصل ہے۔ پھر متواتر دو مرتبہ ثہ کا عمل کرنے سے فوراً حاصل ہوگا

$$ثہ\ فہ = سہ\ فہ،$$
$$ثہ^{۲}\ فہ = سہ\ ثہ\ فہ = سہ^{۲}\ فہ،$$
$$ثہ^{۳}\ فہ = سہ^{۲}\ ثہ\ فہ = سہ^{۳}\ فہ،$$

پس چونکہ $ثہ^{۳} = ۱$، اس لئے $سہ^{۳} = ۱$، اور اس لئے $ف = ۳$۔

اگر عناصر کی تعداد ۴ سے بڑی ہو تو پانچویں رتبہ کے دائری ابدالات ہونگے اور یہ سب، فہ کے گروہ میں شامل نہیں ہوسکتے (مثال ۸ دفعہ ۲۲۶)۔ فرض کرو کہ اس گروہ میں نہ شامل ہونیوالے ایسے ابدالات میں سے ایک تہ ہے اور $تہ\ فہ = فہ_{ز}$ ۔ حسب سابق اس ابدال سے مساوات (۱) پر عمل کریں (جس سے مساوات کی بائیں جانب متاثر نہیں ہوتی) تو حاصل ہوگا

$$فہ^{ف} = فہ_{ز}^{ف} = س_{۱} + س_{۲}\sqrt{\Delta}$$

پس حسب سابق عمل کو جاری رکھنے سے تہ فہ = سہ فہ، اور
پھر اسپر اور اس کے بعد حاصل ہونیوالی مساواتوں پر تہ سے عمل
کرنے سے معلوم ہوگا کہ تہ^{5} فہ = سہ^{5} فہ، پس سہ^{5} = ا کیونکہ
تہ^{5} = ا اور یہ ثابت ہو چکا کہ ف = ۵ ۔ اب چونکہ یہ نتیجہ، ف کی (273)
سابق میں حاصل کردہ قیمت یعنی ۳ کے ساتھ مطابقت نہیں رکھتا
اس لئے ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ جب عناصر کی تعداد ۴ سے بڑی
ہو تو کوئی ایسا کثیر قیمتی تفاعل فہ معلوم کرنا ناممکن ہے جسکی ایک
مفرد قوت دو قیمتی ہو ۔

لیکن جب ن، ۴ سے بڑا نہ ہو تو ایسے کثیر قیمتی تفاعل ہیں
جنکی تیسری قوت دو قیمتی ہے چنانچہ ذیل میں چند مثالیں، ن = ۳ اور
ن = ۴ کے لئے دیجاتی ہیں جن سے یہ بات واضح ہو جائے گی ۔

۱ ۔ تین عناصر کا وہ کثیر قیمتی تفاعل معلوم کرو جسکی تیسری قوت
دو قیمتی ہو ۔ ہم اس بات کا امتحان کرینگے کہ آیا سادہ ترین خطی تفاعل

$$\text{فہ} = \text{عہ}\,\text{لا}_1 + \text{بہ}\,\text{لا}_2 + \text{جہ}\,\text{لا}_3$$

کے ذریعہ اس سوال کا حل ممکن ہے یعنے آیا مستقل عہ، بہ، جہ ایسے متعین
ہوسکتے ہیں کہ وہ مطلوبہ شرطوں کو پورا کریں ۔

$\text{ثہ} \equiv (\text{لا}_1\,\text{لا}_2\,\text{لا}_3)$ لینے اور ثہ فہ کو سہ فہ کے ساتھ مماثل
کرنے سے جہاں سہ^{3} = ا حاصل ہوگا

$$\text{عہ}\,\text{لا}_2 + \text{بہ}\,\text{لا}_3 + \text{جہ}\,\text{لا}_1 \equiv \text{سہ}\,(\text{عہ}\,\text{لا}_1 + \text{بہ}\,\text{لا}_2 + \text{جہ}\,\text{لا}_3)$$

پس جہ = سہ عہ، بہ = سہ جہ، عہ = سہ بہ،

اور $$\text{فہ} \equiv \text{عہ}\,(\text{لا}_1 + \text{سہ}^2\,\text{لا}_2 + \text{سہ}\,\text{لا}_3)$$

عہ = ا لینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ نمونہ $\text{لا}_1 + \text{سہ}^2\,\text{لا}_2 + \text{سہ}\,\text{لا}_3$ کا
تفاعل مطلوبہ شرطوں کو پورا کرتا ہے ۔ یہ تفاعل چھہ قیمتی ہے اور اسکا

کعب دوقیمتی (مقابلہ دفعہ ۵۹ جلد اول کے ساتھ)۔
اسی طرح طالب علم آسانی کے ساتھ یہ ثابت کرسکتا ہے کہ نمونہ

$$\text{لا}_1^{\text{م}} + \text{سہ}\,\text{لا}_2^{\text{م}} + \text{سہ}^2\,\text{لا}_3^{\text{م}}$$

کے کسی تفاعل سے جہاں م کوئی صحیح عدد ہے متذکرۂ صدر سوال کا حل حاصل ہوگا۔

۲۔ چار عناصر کا وہ کثیر قیمتی تفاعل معلوم کرو جسکی تیسری قوت دوقیمتی ہو۔

اس صورت میں واضح ہے کہ نمونہ $\text{عہ}\,\text{لا}_1 + \text{بہ}\,\text{لا}_2 + \text{جہ}\,\text{لا}_3 + \text{ضہ}\,\text{لا}_4$ کے کسی تفاعل پر ابدال $\text{ثہ} \equiv (\text{لا}_1\,\text{لا}_2\,\text{لا}_3)$ کا عمل کرکے ایک جزو ضربی سے مضروب ہونے کی شرط کو پورا کرنا اس وقت تک ممکن نہیں ہے جب تک کہ $\text{ضہ} = ۰$ نہو۔ اس لئے ہم سادگی میں اس سے بعد والا تفاعل یعنے ذیل کے نمونہ کا تفاعل لیتے ہیں:۔

$$\text{فہ} = \text{عہ}\,\text{لا}_1\text{لا}_2 + \text{بہ}\,\text{لا}_2\text{لا}_3 + \text{جہ}\,\text{لا}_3\text{لا}_1 + \text{لا}_4\,(\text{عَہ}\,\text{لا}_1 + \text{بَہ}\,\text{لا}_2 + \text{جَہ}\,\text{لا}_3)$$

اسپر ثہ کا عمل کرنے سے جو تفاعل حاصل ہوتا ہے وہ

$$\text{فہ}_{\text{ز}} = \text{عہ}\,\text{لا}_2\text{لا}_3 + \text{بہ}\,\text{لا}_3\text{لا}_1 + \text{جہ}\,\text{لا}_1\text{لا}_2 + \text{لا}_4\,(\text{عَہ}\,\text{لا}_2 + \text{بَہ}\,\text{لا}_3 + \text{جَہ}\,\text{لا}_1)$$

ہے۔

اب فہ$_{\text{ز}}$ کو سہ فہ کے ساتھ مماثل کرنے اور بہ، جہ، جَہ، بَہ کی بجائے عہ، عَہ کی رقوم میں انکی قیمتیں رکھنے سے حاصل ہوگا

$$\text{فہ} = \text{عہ}(\text{لا}_1\text{لا}_2 + \text{سہ}^2\,\text{لا}_2\text{لا}_3 + \text{سہ}\,\text{لا}_3\text{لا}_1) + \text{عَہ}(\text{لا}_1\text{لا}_4 + \text{سہ}^2\,\text{لا}_2\text{لا}_4 + \text{سہ}\,\text{لا}_3\text{لا}_4)$$

پھر تیسرے رتبہ کے ایک مختلف ابدال مثلاً $\text{تہ} \equiv (\text{لا}_1\,\text{لا}_2\,\text{لا}_4)$ سے (274)
عمل کرنے اور تہ فہ کو فہ سے تعبیر کرنے سے حاصل ہوگا

رفہ = عہ (لا$_1$لا$_4$ + سہ^2 لا$_2$لا$_4$ + سہ لا$_3$لا$_4$) + عہ^2 (لا$_2$لا$_1$ + سہ^2 لا$_4$لا$_1$ + سہ لا$_3$لا$_1$)

حسب سابق رفہ کو طہ فہ کے ساتھ مماثل کرنے سے جہاں طہ اکائی کی کوئی اصل ہے فوراً حاصل ہوگا طہ = سہ^2 اور عہ^2 = سہ^2 عہ اور باقی کے رشتے سب ان رشتوں کے ساتھ تطابق رکھتے ہیں۔ پس عہ = ۱ لینے سے

فہ = لا$_1$لا$_2$ + لا$_3$لا$_4$ + سہ (لا$_1$لا$_3$ + لا$_2$لا$_4$) + سہ^2 (لا$_1$لا$_4$ + لا$_2$لا$_3$)

یہ مطلوبہ تفاعل چھہ قیمتی ہے لیکن اسکا مکعب دو قیمتی (مقابلہ دفعہ ٦٦ جلد اول اور مثال ۳ دفعہ ۲۲٦ کے ساتھ)۔

فصل سوم ۔ گیلوا کا محلل

۲۳۴ ۔ گیلوا کا محلل ۔ مساوات کا گروہ ۔ فرض کرو کہ مساوات

فا(لا) ≡ لا^{ن} + ب$_1$ لا$^{ن-1}$ + ب$_2$ لا$^{ن-2}$ + ... + ب$_{ن}$ = ۰ (۱)

کی اصلیں لا$_1$، لا$_2$، لا$_3$، ...، لا$_{ن}$ سب کی سب غیر مساوی ہیں اور اس کے سر معلومہ منطق مقداریں ہیں۔ اگر سروں میں غیر منطق مقادیر ہوں تو وہ منطق مقادیر سے متعلق ہوتی ہیں یا منطق مقادیر کے ساتھ رکھی جاتی ہیں۔ وہ تمام مقادیر جو اس مجموعہ سے جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کے ذریعہ حاصل ہوتی ہیں ذیل کی بحث میں منطق شمار کی جائینگی اور منطق کہلائینگی ۔ یا یوں بھی کہا جا سکتا ہے کہ یہ مقادیر

سروں میں شامل ہونیوالے غیر منطق اعداد کے احاطہ میں واقع ہیں (دیکھو دفعہ ۲۳۶) - گیا لوا کے تفاعل

$$\text{پ}_1 \equiv \text{ع}_1\,\text{لا}_1 + \text{ع}_2\,\text{ع}_2 + \dots + \text{ع}_{\text{ن}}\,\text{لا}_{\text{ن}}$$

کی متشاکل گروہ کے ن ابدالات کے جواب میں ن مختلف قیمتیں پ$_1$، پ$_2$، ....، پ$_{\text{ن}}$ ہونگی (دفعہ ۲۲۷) - ن ویں درجہ کی مساوات کو جسکی اصلیں یہ ن قیمتیں ہیں یعنی مساوات

$$\text{پا}(\text{ی}) \equiv (\text{ی} - \text{پ}_1)(\text{ی} - \text{پ}_2)\dots(\text{ی} - \text{پ}_{\text{ن}}) = \dots \quad (۲)$$

کو گیا لوا کا محلل کہا جاتا ہے - جب اس مساوات کو پھیلایا جائے تو اس میں اصلیں لا$_1$، لا$_2$، ....، لا$_{\text{ن}}$ متشاکل شکل میں شامل ہونگی، پس پھیلی ہوئی مساوات میں ی کے سب سروں کو ب$_1$، ب$_2$، ... ب$_{\text{ن}}$ (275)
کی رقوم میں ناطق طور پر بیان کیا جا سکتا ہے - بالعموم یہ مساوات تحویل پذیر نہیں ہے یعنی یہ مساوات نچلے درجہ کے ایسے اجزائے ضربی میں نہیں توڑی جا سکتی جنکے سر منطق ہوں - اب ہم یہ دریافت کرینگے کہ وہ کونسی شرطیں ہیں کہ یہ تحویل پذیر ہو جائے - اس مقصد کیلئے فرض کرو کہ پا(ی) میں ر ویں درجہ کا ایک غیر تحویل پذیر جزو ضربی پا$_1$(ی) ہے جس کے سر منطق ہیں اور فرض کرو کہ

$$\text{پا}_1(\text{ی}) \equiv (\text{ی} - \text{پ}_1)(\text{ی} - \text{پ}_2)\dots(\text{ی} - \text{پ}_{\text{ر}}) \quad (۳)$$

جہاں پ$_2$، پ$_3$، ... پ$_{\text{ر}}$ تفاعل پ$_1$ سے ابدالات س$_2$، س$_3$، ... س$_{\text{ر}}$ کے ذریعہ اخذ کئے گئے ہیں - ان ابدالات کے لئے حسب ذیل مسئلے ثابت کئے جا سکتے ہیں :-

(۱) اصلوں کا ہر تفاعل فہ جو ابدالات س۱، س۲، ... س‌ر سے غیر متبدل رہتا ہے ب۱، ب۲، ... بن کی رقوم میں ناطق طور پر بیان کیا جا سکتا ہے۔

دفعہ ۲۳۰ نتیجۂ صریح ۲ کی رو سے فہ کو پہ۱ اور اس کے سروں کی رقوم میں منطق طور پر بیان کیا جا سکتا ہے، فرض کرو کہ یہ ف (پہ۱) ہے۔ اب ابدالات س۱، س۲، ... س‌ر کے عمل کے تحت فہ نہیں بدلتا لیکن پہ۱ علی التواتر پہ۱، پہ۲، ... ، پہ‌ر ہو جاتا ہے۔ اس لئے

ف (پہ۱) = ف (پہ۲) = ف (پہ۳) = ... = ۱/ر {ف (پہ۱) + ف (پہ۲) + ... + ف (پہ‌ر)}

لیکن آخری جملہ چونکہ پا = ۰ کی اصلوں میں متشاکل ہے اسلئے وہ اس مساوات کے سروں کی رقوم میں جو خود منطق ہیں ناطق طور پر بیان ہو سکیگا۔

(۲) ہر وہ تفاعل جو ناطق طور پر بیان ہو سکتا ہے ابدالات س۱، س۲، ... س‌ر سے غیر متبدل رہیگا۔

فرض کرو کہ اصلوں کا ایک تفاعل فہ ہے جو ناطق طور پر بیان ہو سکتا ہے مثلاً م۱ سے، اور فرض کرو کہ ف (پہ۱)، پہ۱ کا وہ تفاعل ہے کہ اس سے بھی فہ تعبیر ہو سکتا ہے (دفعہ ۲۳۰)۔

تب ف (پہ۱) = م۱، اس لئے مساوات ف (ی) - م۱ = ۰ اور مساوات پا۱ (ی) = ۰ میں ایک اصل پہ۱ مشترک ہے لیکن موخر الذکر مساوات ناتحویل پذیر ہے اور اسلئے اسکی سب اصلیں دونوں مساواتوں میں مشترک ہونی چاہئیں اور اس لئے پہ۱ کی بجائے پہ۲، پہ۳، ... درج کرنے پر

ف (پ$_1$) نہیں بدلتا، یعنے ف اُن ابدالات سے نہیں بدلتا جو پ$_1$ کو پ$_2$، پ$_3$، ....، پ$_ر$ میں بدلتے ہیں۔ (276)

(۳) ابدالات ۱، س$_2$، س$_3$، ...، س$_ر$ ایک گروہ بناتے ہیں

اِن ابدالات میں سے کسی ایک ابدال (فرض کرو س$_ع$) سے پا$_1$(دی) پر عمل کیا جائے تو یہ تفاعل نہیں بدلتا کیونکہ اس کے سر منطق ہیں اور اس لئے وہ (۲) کی رُو سے س$_ع$ سے نہیں بدلتے پس پ$_1$، پ$_2$، ...، پ$_ر$ کی نئی قیمتیں جو اس ابدال سے حاصل ہوں پہلی قیمتوں کے ساتھ مماثل ہونی چاہئیں، صرف رتبہ میں فرق ہوگا۔ پھر ان ابدالات میں سے کسی دوسرے (فرض کرو س$_ب$) سے عمل کرنے سے پ کی وہی قیمتیں کسی نہ کسی ترتیب میں تکرار پائینگی۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

س$_ع$ س$_ب$ پ$_1$ = پ$_ج$ = س$_ج$ پ$_1$ اور اس لئے س$_ع$ س$_ب$ = س$_ج$

کیونکہ پ$_1$ ایک ن قیمتی تفاعل ہے اس لئے مسئلہ ثابت ہو چکا۔ مندرجۂ بالا گروہ "مساوات کا گروہ" کہلاتا ہے۔ یہ گروہ یگانہ ہے کیونکہ اگر پا(دی) کا دوسرا ناتحویل پذیر منطق جزو ضربی پا$_2$(دی) ہو تو اس سے متعلقہ گروہ پا$_1$(دی) میں کوئی تبدیلی نہیں ہوگی کیونکہ پا$_1$(دی) کو ناطق طور پر بیان کیا جا سکتا ہے۔ پس پا$_2$(دی) کے گروہ کا ہر ابدال پا$_1$(دی) کے گروہ میں شامل ہوگا۔ اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے کہ پا$_1$(دی) کے گروہ کا ہر ابدال پا$_2$(دی) کے گروہ میں شامل ہوگا۔ اس لئے دونوں گروہ ایک ہی ہونے چاہئیں اور اس لئے پا$_1$(دی) اور پا$_2$(دی) کے درجے بھی مساوی ہیں۔ مزید برآں پا(دی) ÷ پا$_1$(دی) منطق ہے اور اگر یہ خارج قسمت ناتحویل پذیر ہو

تو اس کا درجہ ر وہی ہونا چاہئے جو پ$_1$ (ی) کا ہے۔ اگر اس کا درجہ ر سے بڑا ہو تو اس کو تحویل پذیر ہونا چاہئے اور اس میں درجہ ر کا ایک ناتحویل پذیر جزو ضربی ہونا چاہئے۔ اس طرح عمل جاری رکھکر ہم دیکھتے ہیں کہ پ$_1$ (ی) درجہ ر کے ناتحویل پذیر اجزائے ضربی پر مشتمل ہے اور ان سب اجزا سے متعلق ایک ہی گروہ ہے۔ منطق مقادیر کے ساتھ ان غیر منطق مقادیر کے علاوہ جو ممکن ہے کہ سروں میں شامل ہوں اور دوسرے غیر منطق مقادیر کا اضافہ کیا جائے تو ممکن ہے کہ ہم پ$_1$ (ی) کو ایک ہی درجہ کے ایسے اجزائے ضربی میں تحویل کر سکیں جو منطق شمار کئے جائیں، اور چونکہ یہ پ$_1$ (ی) کو تبدیل نہیں کرتے اس لئے ان کا مشترک گروہ مساوات کے ابتدائی گروہ کا تحت گروہ ہونا چاہئے۔ یہ استدلال اس وقت بھی کیا جا سکتا ہے جبکہ گیالوا کے تفاعل کی بجائے اصلوں کا کوئی ن قیمتی تفاعل لیا جائے۔ کیونکہ اگر دو ن قیمتی تفاعلوں پ، ف کے لئے مساواتوں کے منطق ناتحویل پذیر اجزائے ضربی پ$_1$، ف$_1$ ہوں تو چونکہ پ$_1$ کے سر منطق ہیں (277)
اس لئے ف$_1$ کے گروہ سے پ$_1$ تبدیل نہیں ہوتا اور اسی طرح پ$_1$ کے گروہ سے ف$_1$ تبدیل نہیں ہوتا اور اس لئے گروہ ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں اور اجزائے ضربی کے درجے مساوی ہیں۔ مزید برآں اگر ت ایک ایسا ابدال ہو جو پ$_1$ کے گروہ میں شامل نہیں ہے تو اصلوں ت پ$_1$

ت س پ$_1$، ت س$_2$ پ$_1$، ...، ت س$_ر$ پ$_1$ والی مساوات

کے سر منطق ہیں کیونکہ یہ اس گروہ کے ابدالات سے تبدیل نہیں ہوتے۔ یہ اس طرح دیکھا جا سکتا ہے کہ اگر ابدال س$_ع$، پ$_ہ$ کو پ$_ج$ میں تبدیل کرتا ہے تو اسکو س$_ہ^{-1}$ س$_ج$ لکھا جا سکتا ہے اور اسلئے

یہہ ابدال $ت\,س_{ع}$ $پ_{۱}$ کو $ت\,س_{ج}\,پ_{۱}$ میں تبدیل کر دیتا ہے اور اس لئے $ت\,پ_{۱}$، $ت\,س_{۲}\,پ_{۲}$، ... ، $ت\,س_{ر}\,پ_{۱}$ کے کسی تفاعل میں ان متغیروں $ت\,پ_{۱}$، $ت\,س_{۲}\,پ_{۲}$، ... $ت\,س_{ر}\,پ_{ر}$ کی ترتیب میں ابدال $س_{ع}$ وہی تغیر پیدا کرتا ہے جو تغیر وہ $پ_{۱}$، $پ_{۲}$، ... ، $پ_{ر}$ کے اس تفاعل میں $پ_{۱}$، $پ_{۲}$، ... $پ_{ر}$ کی ترتیب میں پیدا کرتا ہے۔ پس $پ$ کی $ن$ قیمتوں کو ایسے $\frac{ن}{ر}$ جٹوں میں ترتیب دیا جا سکتا ہے کہ کسی جٹ کی قیمتوں کا کوئی متشاکل تفاعل ابدالوں کے ایک رتبہ $ر$ والے گروہ کے ارکان سے تبدیل نہیں ہوتا۔ پس گیالوا کے محلل کے $ت$ اجزائے ضربی تحلیل پذیر ہوں یا نہوں ان کو ایسے $\frac{ن}{ر}$ اجزائے ضربی میں ترتیب دیا جا سکتا ہے جنکا درجہ $ر$ ہو اور ہر ایک جزو ضربی کا وہی ایک رتبہ $ر$ والا گروہ ہو۔ $لا_{۱}$، $لا_{۲}$، ... $لا_{ن}$ کے کسی $ن$ قیمتی تفاعل کی $ن$ قیمتوں $پ_{۱}$، $پ_{۲}$، ... ، $پ_{ن}$ کی یہہ ترتیب متشاکل گروہوں کے $ن$ ابدالوں کی $\frac{ن}{ر}$ جٹوں میں ترتیب کے (دفعہ ۲۲۶) کی طرح متناظر ہے لیکن رتبہ $ر$ والے گروہ $گ_{۱}$ کے ارکان $س_{۱} = ۱$، $س_{۲}$، ... $س_{ر}$ کو $ح$ سے ضرب دینے کی بجائے ہم $ح$ کو $س_{۱}$، $س_{۲}$، ... $س_{ر}$ سے ضرب دیتے ہیں۔ $س_{۱}$، $س_{۲}$، ... $س_{ر}$ سے متعلق $پ$ کی $ر$ قیمتوں کا ایک ایسا جٹ $س_{۱}\,پ_{۱}$، ... $س_{ر}\,پ_{۱}$ ہے کہ انکا کوئی متشاکل تفاعل $گ_{۱}$ کے ابدالات سے غیر متبدل رہتا ہے۔

جٹ ح س۱، ح س۲، ... ، ح سر سے متعلق پہ کی ر مختلف قیمتوں کا ایک ایسا جٹ ح س۱ پہ۱، ح س۲ پہ۲ ... ، ح سر پہ۱ ہے کہ ان کا کوئی متشاکل تفاعل بھی گ کے ابدالات سے غیر متبدل رہتا ہے۔ اس بحث میں نہایت احتیاط سے اس بات کا خیال رکھنا چاہئے کہ ابدالات کے حاصل ضرب کی ترتیب دائیں سے بائیں طرف ہے نہ کہ بائیں سے دائیں طرف۔ کسی مساوات کا گروہ متشاکل گروہ کا کوئی تحت گروہ ہو سکتا ہے۔ یہ دی ہوئی
مساوات کی نوعیت پر منحصر ہے۔ لیکن ایسے تحت گروہوں کی (278)
تعداد جن کے اندر مساوات کا گروہ پایا جاتا ہے ذیل کے مسئلہ سے متعین ہوتی ہے۔

(۴) ناتحویل پذیر مساوات کا گروہ متعدی ہوتا ہے۔

وہ گروہ متعدی کہلائیگا جس میں ایک یا زیادہ ایسے ابدالات شامل ہوں جس کے زیر اثر کوئی اختیاری عنصر کسی دوسرے اختیاری طور پہ انتخاب کردہ عنصر میں بدل جائے۔ پس متعدی گروہ میں ایسے ابدالات ہوتے ہیں جو تمام عناصر پر موثر ہوتے ہیں۔ اب فرض کرو کہ (اگر یہ ممکن ہے) مساوات کا گروہ گ متعدی نہیں ہے اور فرض کرو کہ یہ گروہ صرف عناصر لا۱، لا۲، ... ، لام (م < ن) پر موثر ہوتا ہے۔ گ کے ابدالات جو ان م اصلوں کے مقامات کو صرف آپس میں تبدیل کرتے ہیں ان کے متشاکل تفاعلوں کو نہیں بدلیں گے۔ اس لئے یہ متشاکل تفاعل ناطق طور پر بیان ہو سکتے ہیں اور تفاعل فا (لا) ایک منطق مقسم

(لا − لا$_{1}$) (لا − لا$_{2}$) ... (لا − لا$_{m}$)

سے پورا پورا تقسیم ہو جائیگا اور مفروضہ کے خلاف قابلِ تحویل ہو جائیگا۔

مثالیں

۱۔ وہ چھ درجی مساوات بناؤ جس کی اصلیں گیا لوا کے تفاعل

ع$_{1}$ لا$_{1}$ + ع$_{2}$ لا$_{2}$ + ع$_{3}$ لا$_{3}$

کی چھ قیمتیں ہوں اور اس کے سروں کو دو کعبیوں (ا، ب، ج، د) (لا، ا)^{3} اور (اَ، بَ، جَ، دَ) (لا، ا)^{3} کے سروں کی رقوم میں بیان کرو جنکی اصلیں علی الترتیب لا$_{1}$، لا$_{2}$، لا$_{3}$ اور ع$_{1}$، ع$_{2}$، ع$_{3}$ ہیں۔ اصلوں لا$_{1}$، لا$_{2}$، لا$_{3}$ کو ذیل کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے:—

ا لا$_{1}$ + ب = ف + ق، ا لا$_{2}$ + ب = سہ ف + سہ^{2} ق،

ا لا$_{3}$ + ب = سہ^{2} ف + سہ ق

جہاں

ف ق = − ہ، ف^{3} + ق^{3} = − گ اسلئے ۲ ف^{3} = − گ ± ا $\sqrt{\text{گ}^{2} + 4\text{ہ}^{3}}$ = − گ ± ا $\sqrt{\Delta}$

۲ ق^{3} = − گ ∓ ا $\sqrt{\Delta}$

اسی طرح ع$_{1}$، ع$_{2}$، ع$_{3}$ کو بیان کرنے سے ہمیں ملتا ہے

۳ ف = ا (لا$_{1}$ + سہ^{2} لا$_{2}$ + سہ لا$_{3}$)، ۳ ق = ا (لا$_{1}$ + سہ لا$_{2}$ + سہ^{2} لا$_{3}$)

۳ فَ = اَ (ع$_{1}$ + سہ^{2} ع$_{2}$ + سہ ع$_{3}$)، ۳ قَ = اَ (ع$_{1}$ + سہ ع$_{2}$ + سہ^{2} ع$_{3}$)

پس ۹ ف قَ = ا اَ (پہ$_{1}$ + سہ پہ$_{2}$ + سہ^{2} پہ$_{3}$)، ۹ فَ ق = ا اَ (پہ$_{1}$ + سہ^{2} پہ$_{2}$ + سہ پہ$_{3}$)

جہاں پہ$_1$ = عہ$_1$ لا$_1$ + عہ$_2$ لا$_2$ + عہ$_3$ لا$_3$، پہ$_2$ = عہ$_1$ لا$_2$ + عہ$_2$ لا$_1$ + عہ$_3$ لا$_3$ = (۲۳۱) پہ$_1$،

پہ$_3$ = عہ$_1$ لا$_3$ + عہ$_2$ لا$_2$ + عہ$_3$ لا$_1$ = (۳۲۱) پہ$_1$،

پس (279)

۳ (ف قَ + فَ ق + ب بَ) = ا اَ پہ$_1$، ۳ (سہ^2 ف قَ + سہ فَ ق
+ ب بَ) = پہ$_2$

۳ (سہ ف قَ + سہ^2 فَ ق + ب بَ) = پہ$_3$

اب ا اَ پہ$_1$ − ۳ ب بَ = ۳ ی = ۳ (ف قَ + فَ ق) رکھنے سے

ی^3 = ف^3 قَ^{3} + فَ^{3} ق^3 + ۳ ف ق فَ قَ (ف قَ + فَ ق)

= $\frac{1}{2}$ (گ گَ ± ا اَ $\sqrt{}$ ∆ ∆َ) + ۳ ھ ھَ ی ۔

اس لئے پہ$_1$ مساوات ی^3 − ۳ ھ ھَ ی − $\frac{1}{2}$ (گ گَ ± ا اَ $\sqrt{}$ ∆ ∆َ) = ۰ کو پورا کرتا ہے اور طریقِ عمل سے ظاہر ہے کہ پہ$_2$، پہ$_3$ بھی اس مساوات کو پورا کرتے ہیں ۔ پس اگر

ا اَ ما − ۳ ب بَ = ۳ ی

تو ا^3 اَ^{3} (ما − پہ$_1$) (ما − پہ$_2$) (ما − پہ$_3$) ≡ ۲۷ { ی^3 − ۳ ھ ھَ ی
− $\frac{1}{2}$ (گ گَ + ا اَ $\sqrt{}$ ∆ ∆َ) }

اسلئے اگر ∆ ∆َ کامل مربع ہو تو ی میں مساوات منطق ہے اور گیا لوا کا حلل ایک منطق جزوِ ضربی رکھتا ہے جس کا گروہ متبادلہ گروہ یعنے ۱، (۲۳۱)، (۳۲۱) ہے ۔

دوسرا جزوِ ضربی معلوم کرنے کے لئے ف فَ اور ق قَ کی قیمت دریافت کرنے سے مذکورۂ بالا طریقہ پر ذیل کے رشتے حاصل ہوتے ہیں

۳ (ف فَ + ق قَ + ب بَ) = ا اَ پہَ$_1$، ۳ (سہ^2 ف فَ + سہ ق قَ + ب بَ) = ا اَ پہَ$_2$

$$۳\,(\text{سہ ف فَ} + \text{سہ}^{۲}\,\text{ق قَ} + \text{ب بَ}) = \text{ار رَ}\ \text{پہ}_{۳}'$$

جہاں $\text{پہَ}_{۱} = (۳۲)\,\text{پہ}_{۱}$ ، $\text{پہَ}_{۲} = (۱۳)\,\text{پہ}_{۱}$ ، $\text{پہَ}_{۳} = (۲۱)\,\text{پہ}_{۱}$

اس لئے $\text{ار رَ}\ \text{پہَ}_{۱} - ۳\,\text{ب بَ} = ۳\,\text{ی}$ رکھنے سے مساوات

$$\text{ی}^{۳} - ۳\,\text{ھ ھَ ی} - \tfrac{۱}{۲}\left(\text{گ گَ} \mp \text{ار رَ}\sqrt{\Delta\,\Delta'}\right) = ۰$$

ملتی ہے جسکو $\text{پہَ}_{۲}$ ، $\text{پہَ}_{۳}$ بھی پورا کرتے ہیں۔

پس $\text{ار رَ ما} = ۳\,(\text{ی} + \text{ب بَ})$ رکھنے سے دوسرا جزو ضربی حسب ذیل ہے:

$$\text{ر}^{۳}\text{رَ}^{۳}(\text{ما} - \text{پہَ}_{۱})(\text{ما} - \text{پہَ}_{۲})(\text{ما} - \text{پہَ}_{۳}) \equiv ۲۷\left\{\text{ی}^{۳} - ۳\,\text{ھ ھَ ی} - \tfrac{۱}{۲}\left(\text{گ گَ} \mp \text{ار رَ}\sqrt{\Delta\,\Delta'}\right)\right\}$$

ان دو اجزائے ضربی کا حاصل ضرب منطق ہے اور اس سے گیالوا کا محلل ملتا ہے۔ اب

$$\text{ر}^{۲}\Delta = \text{گ}^{۲} + ۴\,\text{ھ}^{۳} = (\text{ف}^{۳} - \text{ق}^{۳})^{۲} = (\text{ف} - \text{ق})^{۲}(\text{سہ ف} - \text{سہ}^{۲}\text{ق})^{۲} \times (\text{سہ}^{۲}\text{ف} - \text{سہ ق})^{۲}$$

$$= -\text{ر}^{۲}\prod(\text{لا}_{۱} - \text{لا}_{۲})^{۲}/۲۷$$

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر سروں کی رقوم میں بیان کرنے پر $\prod(\text{لا}_{۱} - \text{لا}_{۲})^{۲}$ کامل مربع ہو جائے تو گیالوا کا محلل ایک منطق جزو ضربی رکھتا ہے۔

چونکہ $\text{عہ}_{۱}$ ، $\text{عہ}_{۲}$ ، $\text{عہ}_{۳}$ دئے ہوئے ہیں اسلئے $\sqrt{\Delta'}$ کی متشابہ قیمت بھی منطق ہے۔

چونکہ تین عناصر کی صورت میں صرف متبادلہ گروہ ہی متشاکل گروہ کا متعدی تحت گروہ ہے اسلئے مذکورۂ بالا مساوات ہی تیسرے درجہ کی ناتحلیل پذیر مساوانوں کی ایک ایسی جماعت ہے جس کا گیالوا محلل تحویل پذیر ہے۔

٢— چوبیسویں درجہ کی وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں گیالوا کے تفاعل

$$\text{عہ}_1\,\text{لا}_1 + \text{عہ}_2\,\text{لا}_2 + \text{عہ}_3\,\text{لا}_3 + \text{عہ}_4\,\text{لا}_4$$

کی مختلف قیمتیں ہوں۔ نیز وہ شرطیں متعین کرو کہ مطلوبہ مساوات ایسے منطق اجزائے ضربی میں تحلیل ہو سکے جنکو دو چار درجیوں کے سروں کی رقوم میں جنکی اصلیں لا$_1$، لا$_2$، لا$_3$، لا$_4$ اور عہ$_1$، عہ$_2$، عہ$_3$، عہ$_4$ ہیں بیان کیا گیا ہو جہاں چاردرجی حسب ذیل ہیں۔

$$(١) \qquad (\text{ا، ب، ج، د، ھ})\,(\text{لا، ١})^4$$

$$(٢) \qquad (\text{ا، ب، ج}_1\text{، د}_1\text{، ھ}_1)\,(\text{لا، ١})^4$$

اصلوں لا$_1$، لا$_2$، لا$_3$، لا$_4$ کو شکل

$$\text{ا لا}_1 + \text{ب} = \sqrt{\text{م}_1} + \sqrt{\text{م}_2} + \sqrt{\text{م}_3}\text{، } \quad \text{ا لا}_2 + \text{ب} = -\sqrt{\text{م}_1} + \sqrt{\text{م}_2} - \sqrt{\text{م}_3}$$

$$\text{ا لا}_3 + \text{ب} = \sqrt{\text{م}_1} - \sqrt{\text{م}_2} - \sqrt{\text{م}_3}\text{، } \quad \text{ا لا}_4 + \text{ب} = -\sqrt{\text{م}_1} - \sqrt{\text{م}_2} + \sqrt{\text{م}_3}$$

میں لکھا جاسکتا ہے جہاں $\sqrt{\text{م}_1}\sqrt{\text{م}_2}\sqrt{\text{م}_3} = -\tfrac{1}{2}\,\text{گ}$ اور م$_1$، م$_2$، م$_3$ مساوات (280)

$$\text{م}^3 + ٣\,\text{ھ}\,\text{م}^2 + ٣\,(٣\,\text{ھ}^2 - \tfrac{1}{4}\,\text{ا}^2\,\text{ع})\,\text{م} - \tfrac{1}{4}\,\text{گ}^2 = ٠ \qquad (١)$$

کی اصلیں ہیں۔ عہ$_1$، عہ$_2$، عہ$_3$ کو اسی طرح $\sqrt{\text{ب}_1}$، $\sqrt{\text{ب}_2}$، $\sqrt{\text{ب}_3}$ کی رقوم میں بیان کرنے سے جہاں ب$_1$، ب$_2$، ب$_3$ اُس متشابہ مساوات کی اصلیں ہیں جو اوپر کی مساوات میں حرفوں پر علامت زبر لگانے سے حاصل ہوتی ہے اور جہاں $\sqrt{\text{ب}_1}\sqrt{\text{ب}_2}\sqrt{\text{ب}_3} = -\tfrac{1}{2}\,\text{گَ}$ ہم دیکھتے ہیں کہ

۴ √ا۱ ا۱ = ا (لا۱ − لا۲ + لا۳ − لا۴)، ۴ √ا۲ ا۲ = ا (لا۱ + لا۲ − لا۳ − لا۴)،

۴ √ا۳ ا۳ = ا (لا۱ − لا۲ − لا۳ + لا۴)

۴ √ب۱ = اَ (ع۱ − ع۲ + ع۳ − ع۴)، ۴ √ب۲ = اَ (ع۱ + ع۲ − ع۳ − ع۴)،

۴ √ب۳ = اَ (ع۱ − ع۲ − ع۳ + ع۴)

اس لئے

۱۶ √ا۱ ا۱ √ب۱ = ا اَ (ف۱ − ف۲ + ف۳ − ف۴)، ۱۶ √ا۲ ا۲ √ب۲ = ا اَ (ف۱ + ف۲ − ف۳ − ف۴)

۱۶ √ا۳ ا۳ √ب۳ = ا اَ (ف۱ − ف۲ − ف۳ + ف۴)، ۱۶ ب بَ = ا اَ (ف۱ + ف۲ + ف۳ + ف۴)

جہاں

ف۱ = ع۱ لا۱ + ع۲ لا۲ + ع۳ لا۳ + ع۴ لا۴، ف۲ = (۱، ۲) (۳، ۴) ف۱، ف۳ = (۱، ۳) (۲، ۴) ف۱

ف۴ = (۱، ۴) (۲، ۳) ف۱

پس ۴ (√ا۱ ا۱ √ب۱ + √ا۲ ا۲ √ب۲ + √ا۳ ا۳ √ب۳ + ب بَ) = ا اَ ف۱ اور اسی طرح متناظر قیمتیں ف۲، ف۳، ف۴ کے لئے ملتی ہیں جہاں متناظر علامتیں حسب ذیل ہیں

(−، +، −، +)، (+، −، −، +)، (−، −، +، +)

اب ا اَ ف۱ = ۴ (ب بَ + ی) رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

∴ ی = √ا۱ ا۱ √ب۱ + √ا۲ ا۲ √ب۲ + √ا۳ ا۳ √ب۳

ی۲ = Σ ا۱ ب۱ + ۲ Σ √ا۱ ا۱ √ب۱ √ا۲ ا۲ √ب۲

اسلئے $(\text{ی}^2 - \sum \text{ا}_1 \text{ب}_1)^2 = 4 \sum \text{ا}_1 \text{ب}_1 \text{ا}_2 \text{ب}_2 + 8\, \overline{\text{ا}_1 \text{ا}_2}\, \overline{\text{ا}_2 \text{ا}_3}\, \overline{\text{ا}_3 \text{ا}_1} \ldots \times \text{ی}$

پس اگر

$$\text{پ}_1 = \text{ا}_1 \text{ب}_1 + \text{ا}_2 \text{ب}_2 + \text{ا}_3 \text{ب}_3 \quad \text{اور} \quad \text{چ}_1 = \text{ا}_1^2 \text{ب}_1^2 + \text{ا}_2^2 \text{ب}_2^2 + \text{ا}_3^2 \text{ب}_3^2$$

تو

$$\text{ی}^4 - 2\, \text{پ}_1 \text{ی}^2 - 2\, \text{گ} \bar{\text{گ}}\, \text{ی} - \text{پ}_1^2 + 2\, \text{چ}_1 = 0$$

طریقۂ عمل سے ظاہر ہے کہ یہ مساوات فہ، فہ سے بھی پوری ہوتی ہے

گذشتہ مثال میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ پ₁ ایک کعبی مساوات کی اصل ہے جس میں غیر منطق مقدار

$$\Pi(\text{ا}_1 - \text{ا}_2) = \Pi(\overline{\text{ا}_1 \text{ا}_2} + \overline{\text{ا}_1 \text{ا}_3})(\overline{\text{ا}_1 \text{ا}_2} - \overline{\text{ا}_1 \text{ا}_3}) = \Pi \tfrac{1}{2}\, \text{ا}\, (\text{لا}_1 - \text{لا}_2)\, \tfrac{1}{2}\, \text{ا}\, (\text{لا}_1 - \text{لا}_2)$$

$$= \text{ا}^6\, \Pi(\text{لا}_1 - \text{لا}_2) / 64$$

شامل ہوتی ہے اور چ₁ کو حاصل کرنے کے لئے مساوات (۱) سے ھ، گ اور زبروں والی متشابہ مساوات سے ھَ، گَ حذف کرنا کافی ہے۔

پس $\text{پ}_1 = 3(\text{ھ} \bar{\text{ھ}} + \text{ط})$ رکھنے سے مساوات ذیل کی شکل اختیار کرتی ہے

$$\text{ط}^3 - \frac{1}{48}\, \text{ا}^2 \text{ا}^{\prime 2}\, \text{ع}\, \bar{\text{ع}}\, \text{ط} - \frac{\text{ا}^3 \text{ا}^{\prime 3}}{864}\left\{27\, \text{ج}\, \bar{\text{ج}} \pm \sqrt{\text{د}\, \bar{\text{د}}}\right\} = 0 \qquad (2)$$

جہاں

$$\frac{\text{ا}^{12}\, \Pi(\text{لا}_1 - \text{لا}_2)^2}{(64)^2} = \Pi(\text{ا}_1 - \text{ا}_2)^2 = -27(\text{گ}_1^2 - 4\, \text{ھ}_1^3)$$

$$= \frac{\text{ا}^6(\text{ع}^3 - 27\, \text{ج}^2)}{12} = \frac{\text{ا}^6\, \text{د}}{12}$$

اور اسلئے د ابتدائی چار درجی کا ممیز ہے۔ پس مساوات میں صرف غیر منطق مقدار شامل ہوتی ہے کیونکہ ع₁، ع₂، ع₃، ع₄ معلوم ہونے کی وجہ سے

$\sqrt{\text{د}}$ منطق ہے۔

(281) اب چونکہ چہ = ہا$_1^2$ بہ$_1^2$ + ہا$_2^2$ بہ$_2^2$ + ہا$_3^2$ بہ$_3^2$ تغیروں ہا$_1$، ہا$_2$، ہا$_3$ کا ایک چہ نہمیتی تفاعل ہے اس لئے دفعہ ۲۲۹ کی رو سے بہ$_1$ کے ایک ایسے منطق صحیح تفاعل کے مساوی ہے جس کا درجہ ۵ ہے اور جو بہ$_1$ = ۳(ھ ھَ + ط) سے پورا ہونے والے کعبی (۲) کے ذریعہ سے ایک دوسرے درجہ کے تفاعل میں تحویل ہو سکتا ہے۔

پس اگر فہ = ۴(ب بَ + ی) رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ فہ$_1$، فہ$_2$، فہ$_3$، فہ$_4$ مساوات

ی^4 − ۲ بہ$_1$ ی^2 − ۲گ گَ ی + ف بہ$_1^2$ + ق بہ$_1$ + ر = ۰ (۳)

کی اصلیں ہیں جہاں ف، ق، ر میں غیر منطق مقدار $\sqrt{\text{د}}$ خطی طور پر شامل ہوتی ہے۔

(۲) اور (۳) سے بہ$_1$ کو ساقط کرنے پر ی میں ایک ۱۲ ویں درجہ کی مساوات ملتی ہے جس میں $\sqrt{\text{د}}$ شامل ہوتا ہے اور اگر د کامل مربع ہے تو اس مساوات سے ہمیں گیا لوا کے محلل کا ایک منطق جزوِ ضربی ملتا ہے۔

چونکہ بہ$_1$ کے کعبی (۲) کی دوسری اصلیں بہ$_2$، بہ$_3$ کو حاصل کرنے کے لئے بہ$_1$ پر ابدالوں (۲۳۱)، (۳۲۱) کا عمل کرنا پڑتا ہے جبکہ بہ$_1$ کو ہا$_1$، ہا$_2$، ہا$_3$ کا تفاعل سمجھا جائے اور چونکہ لا$_1$، لا$_2$، لا$_3$، لا$_4$ کی رقوم میں ہا$_1$، ہا$_2$، ہا$_3$ کے لئے جو جملے ہیں ان میں ہا$_1$ کو ہا$_2$ میں، ہا$_2$ کو ہا$_3$ میں، ہا$_3$ کو ہا$_1$ میں بدلنے کا اثر لا$_2$ کو لا$_3$ میں، لا$_3$ کو لا$_4$ میں، لا$_4$ کو لا$_2$ میں بدلنے کے معادل ہے اسلئے فہ$_1$، فہ$_2$، فہ$_3$، فہ$_4$ کی بہ$_2$، بہ$_3$ سے متعلق دوسری قیمتیں حاصل کرنے کے لئے

فہ۱، فہ۲، فہ۳، فہ۴ پر ابدالوں (۴۳۲) اور (۴۲۳) کا عمل کرنا پڑتا ہے اور اس طرح ۱۲ قیمتیں ملتی ہیں جن کا گروہ متبادلہ گروہ ہے۔ اسی طرح چونکہ پۂ۱، پۂ۲، پۂ۳ کا کعبی جملہ (۲) میں √د کی علامت بدلنے سے حاصل ہوتا ہے کیونکہ پۂ۱، پۂ۲، پۂ۳ کو حاصل کرنے کے لئے پہ۱ میں علی الترتیب ہا۱ کو ہا۴ سے، ہا۲ کو ہا۳ سے، ہا۳ کو ہا۲ سے بدلنا پڑتا ہے اس لئے پۂ۱، پۂ۲، پۂ۳ کے کعبی سے متعلق فہ۱ کی ۱۲ قیمتیں ہیں جو فہ۱، فہ۲، فہ۳، فہ۴ پر (۴۲)، (۴۳)، (۳۲) کا عمل کرنے سے حاصل ہوتی ہیں۔ اگر سروں کے منطق احاطہ میں √د کا بھی اضافہ کردیا جائے تو چار درجی کا گروہ متبادلہ گروہ بن جاتا ہے۔ مزید برین اگر اس احاطہ میں پہ والی مساوات کی ایک اصل کا بھی اضافہ کردیا جائے تو گروہ ۱، (۱، ۲) (۳، ۴)، (۱، ۳) (۲، ۴)، (۱، ۴) (۲، ۳) ہو جاتا ہے اور ہم سمجھتے ہیں کہ چونکہ پہ کی قیمتیں کسی ایک قیمت کی رقوم میں ناطق طور پر بیان کی جا سکتی ہیں (دفعہ ۲۴۰ نتیجہ ۲) اس لئے پۂ۱ گیلوا کے محلل کے دوسرے منطق اجزائے ضربی وہ پانچ جملے ہیں جو (۲) میں پہ۱ کی بجائے پہ۲، پہ۳، پۂ۱، پۂ۲، پۂ۳ درج کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔ اس کے علاوہ ہم اس کی بھی تصدیق کر سکتے ہیں کہ ان میں سے ہر ایک جزو ضربی کا گروہ ۱، (۱، ۲) (۳، ۴)، (۱، ۳) (۲، ۴)، (۱، ۴) (۲، ۳) ہے کیونکہ کسی ابدال سے تحویل کرنے پر یہ گروہ غیر متبدل رہتا ہے۔

۴۔ وہ شرطیں معلوم کرو کہ پانچ درجی کی صورت میں گیلوا کا محلل جزئی اجزائے ضربی میں تحلیل ہو جائے۔ ان شرطوں کو معلوم کرنے کے لئے ہم گیلوا کے تفاعل

پہ = عہ۱ لا۱ + عہ۲ لا۲ + عہ۳ لا۳ + عہ۴ لا۴ + عہ۵ لا۵

کی بجائے کوئی ۱۲۰ قیمتی تفاعل استعمال کر سکتے ہیں اور بالخصوص پہ کی وہ شکل استعمال کر سکتے ہیں جو عہر کی بجائے عہ^ر رکھنے سے حاصل ہوتی ہے جہاں عہ، اکائی کا خیالی پانچواں جذر ہے۔

تفاعل پہ کی ۱۲۰ قیمتیں ہیں، اور جب، عہ ر کی بجائے $عہ^ر$ رکھا جاتا ہے جہاں $عہ^5 = 1$ تو گیلوا کا محلل تشکل

$$(پہ^5 - پہ_1^5)(پہ^5 - پہ_2^5)\cdots(پہ^5 - پہ_{24}^5) = 0$$

اختیار کرتا ہے، کیونکہ اگر $پہ_ر$ ایک اصل ہے تو $عہ\, پہ_ر$، $عہ^2 پہ_ر$، $عہ^3 پہ_ر$، $عہ^4 پہ_ر$ بھی اصلیں ہیں۔

اب ہم $پہ^5 = طہ$ رکھتے ہیں اور طہ کی قیمتوں میں سے حسب ذیل چار قیمتیں انتخاب کرتے ہیں:—

$$طہ_1 = (عہ\, لا_1 + عہ^2 لا_2 + عہ^3 لا_3 + عہ^4 لا_4 + لا_5)^5،$$

$$طہ_2 = (عہ^2 لا_1 + عہ^4 لا_2 + عہ\, لا_3 + عہ^3 لا_4 + لا_5)^5،$$

$$طہ_3 = (عہ^3 لا_1 + عہ\, لا_2 + عہ^4 لا_3 + عہ^2 لا_4 + لا_5)^5،$$

$$طہ_4 = (عہ^4 لا_1 + عہ^3 لا_2 + عہ^2 لا_3 + عہ\, لا_4 + لا_5)^5$$

(282) ان میں سے آخری تین، $طہ_1$ میں عہ کی بجائے علی التواتر $عہ^2$، $عہ^3$، $عہ^4$ درج کرنے اور مساوات $عہ^5 = 1$ کے ذریعہ تحویل کرنے سے حاصل ہوئی ہیں۔ یہ خیال رہے کہ چونکہ ۵ ایک مفرد عدد ہے اسلئے اگر سلسلہ عہ، $عہ^2$، $عہ^3$، $عہ^4$ میں عہ کی بجائے $عہ^ر$ درج کیا جائے تو وہی اصلیں ایک دوسری ترتیب میں تکرار پاتی ہیں۔

اب $طہ_1$، $طہ_2$، $طہ_3$، $طہ_4$ سے طہ کی ۲۴ قیمتیں، چار چار کے چھ جٹوں میں، $لا_1$، $لا_2$، $لا_3$ کی چھ ترتیبوں سے حاصل کی جا سکتی ہیں، $لا_4$ کو ترتیب میں رکھنے کی ضرورت اس وجہ سے نہیں ہے کہ تمام ممکن ضوارب اس کے ساتھ آچکے ہیں۔ $طہ_1$، $طہ_2$، $طہ_3$، $طہ_4$ کے ہر تشاکل تفاعل کی چھ قیمتیں ہیں جو اوپر کی ترتیبوں سے حاصل ہوتی ہیں۔ پس محلل ایسے چھ چار درجیوں کا حاصل ضرب ہے جو نمونہ

$$\text{طہ}^{4} + \text{فہ طہ}^{3} + \text{غہ طہ}^{2} + \text{ثہ طہ} + \text{تہ} = \text{۰}$$

کی ہیں ۔

پھر چونکہ ح$^{2}_{1}$ فہ^{12} تہ^{8} ان تمام قیمتوں کا مجموعہ ہے جو فہ^{12} تہ^{8} اختیار کر سکتا ہے اسلئے وہ کسی ابدال سے نہیں بدلتا، صرف اس کے رتبہ پر اثر پڑتا ہے، اس لئے وہ پانچ درجی کے سروں کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے۔ پس مہ = ۱ رکھنے سے ہمیں معلوم ہوتا ہے (دفعہ ۲۲۹) کہ تہ جملہ فہ کا ایک منطق تفاعل ہے۔ یہی نتیجہ تمام سروں کے لئے درست ہے، اس لئے اگر ان میں سے ایک معلوم ہو جائے تو سب معلوم ہو جاتے ہیں۔ اب فرض کرو کہ مہ = ۰، تو ح$^{2}_{1}$ فہ^{12} معلوم ہے اور اس لئے فہ معلوم کرنے کے لئے ہم ایک چھہ درجی بنا سکتے ہیں اور اس چھ درجی کی ایک اصل کا اضافہ کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ والی مساوات (اور اس لئے ۱۲۰ قیمتی تفاعلوں کے لئے تمام مساواتیں) ۲۰ ویں درجہ کا ایک منطق جزو ضربی رکھتی ہے جس کا گروہ یا تو وہ ہے جو طہ$_{1}$، طہ$_{2}$، طہ$_{3}$، طہ$_{4}$ کے مشترک گروہ یعنے ۱، ا، ا^{2}، ا^{3}، ا^{4} کو جہاں ا = (۱۲۳۴۵) ہے گروہ ۱، ب، ب^{2}، ب^{3}، کے ساتھ ملانے سے حاصل ہوتا ہے جہاں ب = (۱۳۴۲) اور ب، ب^{3}، ب^{2}، علی الترتیب طہ$_{1}$ کو طہ$_{2}$ میں طہ$_{1}$ کو طہ$_{3}$ میں اور طہ$_{1}$ کو طہ$_{4}$ میں بدل دیتے ہیں یا اس منطق جزو ضربی کا گروہ مذکورۂ بالا گروہ کا وہ استحالہ ہے جو لا$_{1}$، لا$_{2}$، لا$_{3}$ کی پانچ ترتیبوں میں سے کسی ایک ابدال کے ذریعہ حاصل ہوتا ہے ۔

اس طرح پانچ درجی کا حل ایک چھہ درجی کے حل پر آکر منحصر ہو جاتا ہے جیسا کہ لگرانج نے بتایا تھا۔ اس کے مماثل طریقہ کعبی کو حل کرنے میں کامیاب ثابت ہوا، کیونکہ اس طرح کعبی کو یہ^{2} کی رقوم میں ایک

دو درجی میں تحویل کیا جا سکتا ہے۔ سات درجی کی صورت میں گیلوا کے محلل پر اگر اس طرح کا عمل کیا جائے تو سات درجی ۱۲۰ چھ درجیوں میں تحویل ہو جائیگا۔

فصل چہارم - مساواتوں کا جبری حل

۲۳۵ - مساواتوں کے جبری حل پر نظریہ ابدالات کا اطلاق

کسی جبری مساوات کو حل کرنیکا مسئلہ اس طرح بیان کیا جا سکتا ہے :۔ "یک قیمتی تفاعلات ب۱، ب۲، ...... (یعنی مساوات کے سروں)، کی دی ہوئی قیمتوں کے ذریعہ ایک ن قیمتی تفاعل کی قیمت یعنی گیلوا کے محلل کی ایک اصل کو معلوم کرنا" کیونکہ ہم نے دیکھا ہے (دفعہ ۲۳۰ نتیجہ صریح ۳) کہ لا۱، لا۲، ...... میں سے ہر اصل ناطق طور پر گیلوا کے کسی تفاعل کی رقوم میں بیان ہو سکتی ہے۔ اگرچہ دیے ہوئے سروں کی رقوم میں اصلوں کو عملی طور پر معلوم کرنیکا کام اس طریق عمل سے آسان نہیں ہو جاتا تاہم اس مسئلہ کو شکل بالا میں بیان کرنا عام جبری مساواتوں کے حل کے امکان کی بحث میں اہم ہے۔ (283)

چنانچہ کعبی اور چار درجی کے معلومہ حل اس نقطہ نظر سے اختصاراً یوں پیش کیے جا سکتے ہیں :۔

(۱) کعبی مساوات

$$لا^3 + ب_1 لا^2 + ب_2 لا + ب_3 = 0$$

کی صورت میں دیے ہوئے یک قیمتی تفاعلات ب۱، ب۲، ب۳ سے شکل

$$ع_1 لا_1 + ع_2 لا_2 + ع_3 لا_3$$

کا ایک چھ قیمتی تفاعل جذروں کے نکالنے کے عمل کے ذریعہ معلوم کرنا ہے

اولاً تمام دو قیمتی تفاعل ناطق طور پر اس دو قیمتی تفاعل

$$\sqrt{\Delta_3} = \pm (\text{لا}_1 - \text{لا}_2)(\text{لا}_1 - \text{لا}_3)(\text{لا}_2 - \text{لا}_3)$$

کی رقوم میں (دفعہ ۲۲۹) اور اس لئے ب_1، ب_2، ب_3 اور سروں کے ایک معلومہ تفاعل کے جذر المربع کی رقوم میں بیان ہو سکتے ہیں (دفعہ ۴۲ جلد اول)۔ اب ہمیں ایک چھ قیمتی تفاعل $\text{لا}_1 + \text{س}\,\text{لا}_2 + \text{س}^2\,\text{لا}_3 = \text{پ}_3$ معلوم ہے جس کا مکعب دو قیمتی ہے (دفعہ ۲۳۳ مثال ۲)۔ اس لئے پ_1 خود، سروں کے ایک تفاعل کے جذر المکعب اور اوپر ذکر کئے ہوئے جذر المربع کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے (دیکھو دفعہ ۵۹ جلد اول)۔ اس طرح ایک چھ قیمتی تفاعل حاصل ہو جانے کے بعد مساوات کا حل نظری طور پر مکمل ہو جاتا ہے۔

(۲) چار درجی مساوات

$$\text{لا}^4 + \text{ب}_1\,\text{لا}^3 + \text{ب}_2\,\text{لا}^2 + \text{ب}_3\,\text{لا} + \text{ب}_4 = 0$$

کی صورت میں اس شکل

$$\text{ع}_1\,\text{لا}_1 + \text{ع}_2\,\text{لا}_2 + \text{ع}_3\,\text{لا}_3 + \text{ع}_4\,\text{لا}_4$$

کا ایک چوبیس قیمتی تفاعل، یک قیمتی تفاعلات ب_1، ب_2، ب_3، ب_4 سے جذروں کو نکالنے کے عمل کے ذریعہ معلوم کرنا ہے۔

گذشتہ صورت کی طرح کوئی دو قیمتی تفاعل ناطق طور پر ب_1، ب_2، ب_3، ب_4 کی اور دو قیمتی تفاعل $\sqrt{\Delta_4}$ کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے اور اس لئے
وہ ان سروں کی اور سروں کے ایک تفاعل کے جذر المربع کی رقوم میں (284)
بیان ہو سکتا ہے (مثال ۱۵ صفحہ ۱۸۶ جلد اول)۔ اب دفعہ ۲۳۳ مثال ۲ سے

ہمیں یہ چھہ قیمتی تفاعل

$$\text{فہ} \equiv \text{لا}_1\text{لا}_2 + \text{لا}_3\text{لا}_4 + \text{سہ}(\text{لا}_1\text{لا}_3 + \text{لا}_2\text{لا}_4) + \text{سہ}^2(\text{لا}_1\text{لا}_4 + \text{لا}_2\text{لا}_3)$$

معلوم ہے جسکی تیسری قوت دو قیمتی ہے۔ پس سروں کے ایک معلومہ تفاعل کے جذرالکعب کی مدد سے فہ بیان ہو سکتا ہے۔ اب ہمیں وہ ذریعہ تلاش کرنا ہے کہ اس چھہ قیمتی تفاعل سے ایک ۲۴ قیمتی تفاعل تک پہنچ سکیں۔ فہ کا گروہ حسب ذیل ہے (مثال ۳ دفعہ ۲۲۶)

$$\text{ھ} \equiv [1،(21)(43)،(31)(42)،(41)(32)]،(\text{غہ}=6،\text{ر}=4)$$

اور اسی گروہ سے متعلق ایک دوسرا تفاعل

$$\text{طہ}^2 \equiv (\text{لا}_1 + \text{لا}_2 - \text{لا}_3 - \text{لا}_4)^2(\text{لا}_1\text{لا}_3 + \text{لا}_2\text{لا}_4)^2$$

ہے۔

یہ تفاعل ناطق طور پر فہ کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے، اور اسلئے طہ کی قیمت سروں کی رقوم میں ایک اور جذرالمربع کی مدد سے حاصل ہوتی ہے۔ طہ کا گروہ

$$[1،(21)(43)]،(\text{غہ}=12،\text{ر}=2)$$

ہے اور اس گروہ سے تفاعل

$$\text{پہ}^2 \equiv \{\text{عہ}_1(\text{لا}_1 - \text{لا}_2) + \text{عہ}_2(\text{لا}_3 - \text{لا}_4)\}^2$$

بھی متعلق ہے۔ پس پہ^2 کو طہ کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے، اور بالآخر پہ جو ۲۴ قیمتی تفاعل ہے ایک دوسرے جذرالمربع کی مدد سے حاصل ہو جاتا ہے۔

اس عمل کو جو ان دو صورتوں میں واضح کیا گیا ہے اس طرح بیان کیا جا سکتا ہے کہ وہ سروں کے منطق احاطہ میں معین اصم مقداروں کے

اضافہ کے ذریعہ مساوات کے گروہ کی متواتر تحویل پر مشتمل ہے۔ ہر صورت میں اول تشاکل گروہ کو معلومہ سروں کے احاطہ میں ممیز کے جذر المربع کا اضافہ کرنے سے متبادل گروہ میں تحویل کیا جاتا ہے۔ مزید تحویل متبادل گروہ میں داخل ہونیوالے تحت گروہوں پر منحصر ہوتی ہے حتیٰ کہ آخر الامر ہم اُس گروہ "اکائی" پر پہنچ جاتے ہیں جس سے گیالوا کا تفاعل متعلق ہوتا ہے۔ اگر اس طریقہ پر پانچ درجی کا حل معلوم کرنے کی کوشش کیجائے تو عمل تحویل کو منزل اول سے آگے نہیں بڑھایا جاسکتا کیونکہ جیسا کہ ہم نے دفعہ ۲۳۳ میں دیکھا ہے اس صورت میں اصلوں (285)
کا کوئی ایسا کثیر القیمت تفاعل موجود نہیں ہے جس کی ایک قوت دو قیمتی ہو۔ تاہم اس سے ہمیں فوراً یہ نتیجہ اخذ نہیں کر لینا چاہئیے کہ پانچ درجی کا جبری حل ناممکن ہے۔ یہ نتیجہ بیان کرنے سے پیشتر اُس ضابطہ کی جبری نوعیت کا تفصیل کے ساتھ معائنہ کرنا ضروری ہوگا جو جبری مساوات کی اصل کے لئے ممکن حملہ ہوسکتا ہے، اور پھر اس مسئلہ پر ابدالات کے نظریہ کے اطلاق کے جواز کو ثابت کرنا ہوگا۔

اس مقصد کے لئے ہم پہلے دو قسم کی مقداروں کے درمیانی فرق کو واضح کرینگے، ایک وہ مقداریں ہیں جو منطق تصور کیجاتی ہیں اور دوسری وہ مقداریں جو غیر منطق ہیں۔ کرونیکر (Kronecker) کے الفاظ میں ہم منطق احاطہ (علاقہ) کی تعریف کرینگے۔

۲۳۶۔ منطق احاطہ (علاقہ) کی تعریف۔ وہ تمام مقداریں جو چند مبلات م′، م″، م‴، ... اور صحیح عددوں سے اعمال جمع، تفریق، ضرب، تقسیم (اور اس لئے نیز صحیح قوتوں پر اٹھانے) سے حاصل ہوتی ہیں م′، م″، م‴، ... کا ایک منطق علاقہ (م′، م″، م‴، ...) بناتی ہیں۔

جذر نکالنے کے عمل سے بالعموم اس علاقہ سے باہر کی مقداریں حاصل ہونگی۔ ہم اپنی توجہ صرف مفرد رتبہ کے جذروں تک

محدود رکھ سکتے ہیں، کیونکہ (م ن) ویں جذر کو ن ویں کے م ویں جذر سے تبدیل کیا جا سکتا ہے اور کیونکہ سب اعداد مفرد اجزائے ضربی میں تحلیل کئے جا سکتے ہیں۔

اگر طالب علم اُن جملوں کو دیکھے جو دو درجی، کعبی، اور چار درجی مساواتوں کی اصلوں کے لئے سروں کی رقوم میں حاصل کئے جا چکے ہیں تو معلوم ہوگا کہ جب سروں کی بجائے اصلوں کو درج کیا جاتا ہے تو یہ جملے اصلوں کے منطق تفاعل ہو جاتے ہیں جنہیں اکائی کے جذر الکعب شریک ہوتے ہیں ایسے منطق علاقہ مساواتوں کی اصلوں اور اکائی کے جذر الکعبوں پہ مشتمل ہوتا ہے۔

آیندہ چلکر یہ معلوم ہوگا کہ اگر کوئی جبری ضابطہ جو اعلیٰ تر درجہ کی مساوات کی اصل کے لئے حاصل ہوا ہو موجود ہو تو اسکو اصلوں کا ایک منطق تفاعل ہو جانا چاہئے (جب سروں کی بجائے اصلیں درج کیجائیں) جسمیں اکائی کے مختلف ابتدائی جذر شامل ہوں، اور آخرالامر یہ معلوم ہوگا کہ ابدالات کے نظریہ سے یہ بات ثابت ہوتی ہے کہ اصلوں کے ایسے تفاعل موجود
نہیں ہیں جو اوپر کی شرطوں کو پورا کرتے ہوں اور اسلئے اعلیٰ تر مساواتوں (286)
کا جبریہ حل ناممکن ہے۔

۲۳۷ — جبری طور پر حل پذیر مساواتوں کی اصلوں کی شکل۔

اگر ف (لا) = ۰ ایک مساوات ہو جس کے سر منطق علاقہ (ر، ر′، ر″، ...) میں شامل ہیں تو ہم کہتے ہیں کہ یہ مساوات جبری طور پر حل پذیر ہے جبکہ لا کی بجائے ایک ایسے جملہ کے درج کرنے سے اس مساوات کا پورا ہونا ممکن ہو جو علاقہ (ر، ر′، ر″، .....) کے اندر کے عناصر سے جبر و مقابلہ کے حسب ذیل اعمال کے ذریعہ بنا ہو:—

جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، صحیح عددی قوتوں پر اٹھانا، صحیح عددی جذر نکالنا، جبکہ اِن اعمال کی تعداد محدود ہو۔

لا کی وہ قیمت جو اِس طرح متعین ہو علاقہ (ر، ر′، ....)

کے ایک جبری تفاعل کے نام سے موسوم کیجاتی ہے۔

اِس جبری تفاعل کے حاصل کرنیکے عمل کو ہمیشہ حسب ذیل طریقہ پر مکمل کیا جا سکتا ہے :-

(آ) علاقہ

$$\text{فا}_{\text{ث}}(\text{ر}'\text{، ر}''\text{، ر}'''\text{، }\ldots\ldots)$$

کے عناصر کا ایک منطق تفاعل محسوب کرو۔

(ب) مساوات

$$\text{و}_{\text{ن}}^{\text{پ}_{\text{ن}}} = \text{فا}_{\text{ن}}(\text{ر}'\text{، ر}''\text{، ر}'''\text{، }\ldots)$$

کو پورا کرنیوالی ایک مقدار $\text{و}_{\text{ن}}$ محسوب کرو جہاں $\text{پ}_{\text{ن}}$ ایک مفرد عدد ہے۔ نیز ہم یہ فرض کرتے ہیں کہ $\text{فا}_{\text{ن}}$، ٹھیک $\text{پ}_{\text{ن}}$ ویں قوت نہیں ہے کیونکہ اگر ایسا ہوتا تو $\text{و}_{\text{ن}}$ ابتدائی علاقہ میں شامل ہوتا۔

(ج) ابتدائی علاقہ میں $\text{و}_{\text{ن}}$ کو ملحق کرکے اس وسیع شدہ علاقہ میں ایک منطق تفاعل $\text{فا}_{\text{ن}-1}(\text{و}_{\text{ن}}\text{، ر}'\text{، ر}''\text{، ر}'''\text{، }\ldots)$ بناؤ اور فرض کرو کہ مساوات

$$\text{و}_{\text{ن}-1}^{\text{پ}_{\text{ن}-1}} = \text{فا}_{\text{ن}-1}(\text{و}_{\text{ن}}\text{، ر}'\text{، ر}''\text{، ر}'''\text{، }\ldots)$$

کو پورا کرنے والی $\text{پ}_{\text{ن}-1}$ مقداروں میں سے ایک $\text{و}_{\text{ن}-1}$ ہے جہاں $\text{پ}_{\text{ن}-1}$ ایک مفرد عدد ہے۔ ہم یہ بھی فرض کرتے ہیں کہ $\text{فا}_{\text{ن}-1}$ ایک ٹھیک $\text{پ}_{\text{ن}-1}$ ویں قوت نہیں ہے کیونکہ اگر ایسا ہوتا تو $\text{و}_{\text{ن}-1}$، علاقہ $(\text{و}_{\text{ن}}\text{، ر}'\text{، ر}''\text{، }\ldots)$ میں شامل ہوتا۔

(287) (۴) اس آخری علاقہ سے $و_{ن-۱}$ کو ملحق کر کے اس نئے علاقہ میں
ایک نیا منطق تفاعل $فا_{ن-۲}(و_{ن}، و_{ن-۱}، ر، رَ، \ldots)$ بناؤ اور
علیٰ ہذا القیاس۔

پس جبری تفاعل $لا_۱$ کی ساخت کو جہاں $ف(لا_۱) = ۰$ مساواتوں کے حسب ذیل سلسلے سے تعبیر کر سکتے ہیں:-

$$و_{ن}^{پ_{ن}} = فا_{ن}(ر، رَ، \ldots)$$

$$و_{ن-۱}^{پ_{ن-۱}} = فا_{ن-۱}(و_{ن}، ر، رَ، \ldots)$$

$$و_{ن-۲}^{پ_{ن-۲}} = فا_{ن-۲}(و_{ن}، و_{ن-۱}، ر، رَ، \ldots) \qquad (۱)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$و_{۱}^{پ_{۱}} = فا_{۱}(و_{۲}، و_{۳}، \ldots، و_{ن}، ر، رَ، \ldots)$$

$$لا_{۱} = فا(و_{۱}، و_{۲}، \ldots، و_{ن}، ر، رَ، \ldots)$$

جہاں تفاعیل فا منطق ہیں اور اعداد پ مفرد۔

آگے بڑھنے سے پیشتر مناسب معلوم ہوتا ہے کہ تفاعیل فا کو صحیح عددی شکل میں بیان کیا جائے اگر وہ پہلے ہی ایسی شکل میں بیان نہ کئے گئے ہوں، چنانچہ طریق عمل کو سمجھانے کے لئے ہم $ن = ۳$ لیتے ہیں، دوسری ہر صورت میں طریقۂ عمل یہی ہوگا۔ یہ فرض کر کے کہ $فا_{۱}$، $و_{۲}$ اور $و_{۳}$ کا صحیح عددی تفاعل نہیں ہے ہم ہمیشہ

$$فا_{۱} = \frac{فہ(و_{۲}، و_{۳})}{پہ(و_{۲}، و_{۳})}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں فہ اور پہ منطق اور صحیح تفاعل ہیں۔

مساواتوں کے مندرجۂ بالا سلسلہ سے اس صورت میں ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{و}_{۲}^{\text{پ}_{۲}} = \text{فا}_{۱}(\text{ر})،\ \text{و}_{۳}^{\text{پ}_{۲}} = \text{فا}_{۲}(\text{و}_{۳}،\ \text{ر})،\ \text{ر} = (\text{ر}،\ \text{رَ}،\ \text{رً}،\ \dots)$$

نیز اگر مساوات $\text{لا}^{\text{پ}_{۳}} - ۱ = ۰$ کی ابتدائی اصل سہ ہو تو

$$\text{پہ}(\text{و}_{۲}،\text{و}_{۳})\ \text{پہ}(\text{سہ}\,\text{و}_{۲}،\text{و}_{۳})\ \text{پہ}(\text{سہ}^{۲}\text{و}_{۲}،\text{و}_{۳}) \dots \text{پہ}(\text{سہ}^{\text{پ}_{۳}-۱}\text{و}_{۲}،\text{و}_{۳}) = \text{پا}_{۱}(\text{و}_{۲}^{\text{پ}_{۲}}،\ \text{و}_{۳})$$

پھر ان اجزائے ضربی کا حاصل ضرب (پہلے جزو ضربی کو چھوڑ کر) منطق ہے اور سہ پر منحصر ہے۔ اب مساوات

$$\text{و}_{۲}^{\text{پ}_{۲}} = \text{فا}_{۲}(\text{و}_{۳}،\ \text{ر})$$

کے ذریعہ $\text{و}_{۲}^{\text{پ}_{۲}}$ کو ساقط کرنے سے

$\text{پا}_{۱}(\text{و}_{۲}^{\text{پ}_{۲}}،\ \text{و}_{۳})$ بدلکر $\text{پا}_{۲}(\text{و}_{۳}،\ \text{ر})$ ہوجاتا ہے۔

$\text{پا}_{۲}$ کے ساتھ یہی عمل کرنے سے وہ شکل $\text{پا}_{۳}(\text{و}_{۳}^{\text{پ}_{۳}}،\ \text{ر})$ کے

ایک تفاعل میں تبدیل ہوجاتا ہے، ضارب منطق علاقہ $\text{و}_{۳}$ میں ہے، اب $\text{و}_{۳}^{\text{پ}_{۳}}$ کو ساقط کرنے سے $\text{پا}_{۳}$ بدلکر $\text{پا}_{۴}(\text{ر})$ ہوجاتا ہے۔

آخرالامر شمار کنندہ فہ کو ان منطق اجزائے ضربی سے (جو پہ وغیرہ (288)
وغیرہ پر استعمال کئے گئے تھے) ضرب دینے سے فا کی قیمت نہیں بدلتی نسب نما، $\text{ر} = (\text{ر}،\ \text{رَ}،\ \text{رً}،\ \dots)$ کا ایک تفاعل ہے۔ اس طرح $\text{فا}_{۱}$ صحیح عددی شکل میں $\text{و}_{۲}،\ \text{و}_{۳}$ کے ایک منطق تفاعل کے طور پر بیان ہوجاتا ہے۔

اور اسلئے بالعموم و_1، و_2 وغیرہ کے کسی منطق تفاعل $\text{فا}_{\text{ع}-1}$ کو ہم حسب ذیل شکل میں لکھ سکتے ہیں :-

$$\text{فا}_{\text{ع}-1}(\text{و}_{\text{ع}},\ \text{و}_{\text{ع}+1},\ \ldots,\ \text{و}_{\text{ن}},\ \text{ر})$$

$$= \text{ج} + \text{ج}_1\,\text{و}_{\text{ع}} + \text{ج}_2\,\text{و}_{\text{ع}}^2 + \ldots + \text{ج}_{\text{پ}^{\text{ع}-1}-1}\,\text{و}_{\text{ع}}^{\text{پ}^{\text{ع}-1}-1}$$

جہاں تفاعیل ج، $\text{و}_{\text{ع}+1}$، $\text{و}_{\text{ع}+2}$، ...، $\text{و}_{\text{ن}}$ کے صحیح تفاعل ہیں اور صرف ر، ر'، ... میں کسری ہیں ۔

اب آبل کے ایک بنیادی مسئلہ کو ثابت کرنا ضروری ہے جسکا استعمال آئندہ کیا جائیگا ۔

۲۳۸ ۔ مسئلہ ۔ اگر مساواتیں

$$\text{ف}_1\,\text{لا}^{\text{پ}-1} + \text{ف}_2\,\text{لا}^{\text{پ}-2} + \ldots + \text{ف}_{\text{پ}} = 0 \qquad (1)$$

$$\text{لا}^{\text{پ}} - \text{فا} = 0 \qquad (2)$$

(جہاں پ ایک مفرد عدد ہے) ایک ساتھ پوری ہوں تو یا ف_1، ف_2، ...، $\text{ف}_{\text{پ}}$ سب کے سب معدوم ہوتے ہیں یا مساوات (۲) کی اصلوں میں سے ایک، ف_1، ف_2، ... $\text{ف}_{\text{پ}}$ اور فا کی رقوم میں ناطق طور پر بیان ہو سکتی ہے ۔

فرض کرو کہ مساوات (۱) کے سر معدوم نہیں ہوتے تو مساواتوں (۱) اور (۲) کا مشترک مقسوم علیہ اعظم

$$لا^{غ} + گ_1 لا^{غ-1} + گ_2 لا^{غ-2} + \dots + گ_{غ} = ۰ \qquad (۳)$$

ہوگا جس کے سر فا، ف$_1$، ف$_2$، ... ، ف$_پ$ کے منطق تفاعل ہیں۔ اب اگر لا$_1$ وہ اصل ہو جو مساواتوں (۱) اور (۲) میں مشترک ہے تو دوسری اصلیں شکل

$$سہ^{ع} لا_1 ، سہ^{۲ع} لا_1 ، \dots ، \text{جہاں} \quad سہ^{پ} - ۱ = ۰$$

کی ہونگی، پس

$$گ_{غ} = لا_1^{غ} سہ^{ع + ۲ع + \dots} = سہ^{ح} لا_1^{غ} \qquad (۴)$$

پھر چونکہ پ ایک مفرد عدد ہے اسلئے ہم دو عدد م اور ن معلوم کرسکتے ہیں ایسے کہ

$$م پ + ن غ = ۱$$

نیز
$$گ_{غ}^{ن} = سہ^{ح ن} لا_1^{ن غ} = سہ^{ن ح} لا_1^{(۱ - م پ)}$$

اور اسلئے (۲) کی رو سے

$$سہ^{ن ح} لا_1 = گ_{غ}^{ن} فا^{م}$$

اسلئے $سہ^{ن ح} لا_1$ جو مساوات (۲) کی ایک اصل ہے فا، ف$_1$، ف$_2$، ... ، ف$_پ$ کی رقوم میں ناطق طور پر بیان ہو جاتی ہے۔ (369)

۲۴۹ — اب ہم

$$فا_{ع-1} = ج + ج_1 و_{ع} + ج_2 و_{ع}^2 + \dots + ج_{پ_{ع}-1} و_{ع}^{پ_{ع}-1}$$

کی شکل میں مزید تحویل عمل میں لائینگے تاکہ $\text{ب ج}_{\text{ا}}$ اکائی کے مساوی ہوسکے۔ فرض کرو کہ $\text{ب ج}_{\text{ک}}$، سروں $\text{ب ج}_{\text{ا}}$، $\text{ب ج}_{\text{۲}}$ ... میں سے ایک سر ہے جو معدوم نہیں ہوتا اور $\text{ب ج}_{\text{ک}}\, \text{و}_{\text{ع}}^{\text{ک}} = \text{ط}_{\text{ع}}$ رکھنے سے دو صحیح عدد م اور ن جنمیں سے ایک منفی ہے حاصل ہوتے ہیں ایسے کہ

$$\text{م ک} + \text{ن پ}_{\text{ع}} = \text{۱}\ ،$$

$$\text{تب}\quad \text{ب ج}_{\text{ک}}^{\text{م}}\, \text{و}_{\text{ع}}^{\text{م ک}} = \text{ب ج}_{\text{ک}}^{\text{م}}\, \text{و}_{\text{ع}}^{(\text{۱} - \text{ن پ}_{\text{ع}})} = \text{ط}_{\text{ع}}^{\text{م}}\ ،$$

اسلئے

$$\text{و}_{\text{ع}} = \text{ط}_{\text{ع}}^{\text{م}}\, \text{فا}_{\text{ع}}^{\text{ن}}\, \text{ب ج}_{\text{ک}}^{-\text{م}}\ ،\quad \therefore\ \text{فا}_{\text{ع}} = \text{و}_{\text{ع}}^{\text{پ}_{\text{ع}}}$$

پس $\text{و}_{\text{ع}}$ اور $\text{ط}_{\text{ع}}$ ایک دوسرے کی اور عناصر $\text{و}_{\text{ع+۱}}$، $\text{و}_{\text{ع+۲}}$، ... و کی رقوم میں بیان کئے جا سکتے ہیں، اس لئے معلوم ہوتا ہے کہ منطق علاقے

$$(\text{و}_{\text{ع}}، \text{و}_{\text{ع+۱}}، \ldots، \text{و}، \text{ر}، \text{ر}، \ldots)\ \text{اور}\ (\text{ط}_{\text{ع}}، \text{و}_{\text{ع+۱}}، \text{و}_{\text{ع+۲}}، \ldots، \text{و}، \text{ر}، \text{ر}، \ldots)$$

معادل ہیں۔

پھر، $\text{و}_{\text{ع}}$ کی کوئی $\text{پ}_{\text{ع}}$ سے نچلی قوت ایسی نہیں ہے جو اس علاقہ میں منطق ہو۔ کیونکہ اگر

$$\text{ط}_{\text{ع}}^{\text{ق}} = \text{فا}(\text{و}_{\text{ع+۱}}، \text{و}_{\text{ع+۲}}، \ldots، \text{و}_{\text{ع}})$$

جہاں $\text{ق} < \text{پ}_{\text{ع}}$ تو

$$\text{ب ج}_{\text{ک}}^{\text{ق}}\, \text{و}_{\text{ع}}^{\text{ک ق}} = \text{فا}(\text{و}_{\text{ع+۱}}، \text{و}_{\text{ع+۲}}، \ldots، \text{و}_{\text{ع}})\ ،$$

لیکن ک ق، $\text{پ}_{\text{ع}}$ سے تقسیم پذیر نہیں ہے، کیونکہ $\text{پ}_{\text{ع}}$ (مفرد عدد

ہونے کی وجہ سے) ک یا ق کو تقسیم کرنا چاہئے، لیکن یہ دونوں $\text{پ}_{\text{ع}}$ سے کم ہیں، اور اس لئے ک ق = م $\text{پ}_{\text{ع}}$ + ر رکھنے سے معلوم ہوتا ہے کہ $\text{و}_{\text{ع}}$ کی ایک قوت ر ایسی ہے جو $\text{پ}_{\text{ع}}$ سے چھوٹی ہے اور ناطق طور پر بیان ہو سکتی ہے، لیکن یہ ناممکن ہے کیونکہ $\text{پ}_{\text{ع}}$، $\text{و}_{\text{ع}}$ کی وہ چھوٹی سے چھوٹی قوت ہے جو $\text{و}_{\text{ع}}$، $\text{و}_{\text{ع+۱}}$، $\text{و}_{\text{ع+۲}}$، ...، $\text{و}_{\text{ن}}$ کا منطق تفاعل ہے۔

مزید بریں $\text{ط}_{\text{ع}}$ کو قوت $\text{پ}_{\text{ع}}$ پر اٹھانے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{ط}_{\text{ع}}^{\text{پ}_{\text{ع}}} = \text{ج}_{\text{ک}}^{\text{پ}_{\text{ع}}}\ \text{فا}_{\text{ع}}^{\text{ک}} = \text{پا}\left(\text{و}_{\text{ع}}،\ \text{و}_{\text{ع+۱}}،\ \text{و}_{\text{ع+۲}}،\ \ldots\ \text{و}_{\text{ن}}،\ \text{گ}،\ \ldots\right)$$

جس سے ہم معلوم کرتے ہیں کہ $\text{و}_{\text{ع}}$ کی طرح $\text{ط}_{\text{ع}}$ بھی درجہ $\text{پ}_{\text{ع}}$ (290) کی ایک ثنائی مساوات سے حاصل ہوتا ہے اور ہم $\text{و}_{\text{ع}}$ کو ملانیوالی مساواتوں کے سلسلہ میں ایک کی جگہ دوسرے کو رکھ سکتے ہیں۔

پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جہاں جہاں تفاعلوں $\text{فا}_{\text{ع-۱}}$، $\text{فا}_{\text{ع-۲}}$، ...، $\text{فا}_{\text{۱}}$ میں $\text{و}_{\text{ع}}$ واقع ہوتا ہے ہم $\text{و}_{\text{ع}}$ کی جگہ $\text{ط}_{\text{ع}}$ رکھ سکتے ہیں۔

اسلئے

$$\text{فا}_{\text{ع-۱}} = \text{ج} + \text{ج}_{\text{۱}}\text{و}_{\text{ع}} + \text{ج}_{\text{۲}}\text{و}_{\text{ع}}^{\text{۲}} + \ldots + \text{ج}_{\text{پ}_{\text{ع}}\text{-۱}}\text{و}_{\text{ع}}^{\text{پ}_{\text{ع}}\text{-۱}}$$

میں جب ہم $\text{ج}_{\text{م}}\text{و}_{\text{ع}}^{\text{م}}$ کی بجائے اسکی قیمت $\text{ج}_{\text{م}}\left(\text{فا}_{\text{ع}}^{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ک}}\right)^{\text{م}}\text{ط}_{\text{ع}}^{\text{م}}$ رکھتے ہیں تو یہ تفاعل شکل $\text{ل}_{\text{م}}\text{ط}_{\text{ع}}^{\text{م}}$ کا ہوتا ہے، جہاں

$$\text{م ھ} = \text{ل پ}_{\text{ع}} + \text{ھَ} \quad \text{اور} \quad \text{ل}_{\text{ھَ}}(\text{و}_{\text{ع}}، \text{و}_{\text{ع+۱}}، \text{و}_{\text{ع+۲}}، \dots، \text{و}_{\text{ن}})$$

کا ایک منطق تفاعل ہے جو دفعہ ۲۳۷ کی مدد سے صحیح عددی شکل میں تحویل کیا جا سکتا ہے۔

یہ خیال رہنا چاہئے کہ جب ھ کو مساوات $\text{م ھ} = \text{ل پ}_{\text{ع}} + \text{ھَ}$ میں قیمتیں ۱، ۲، ۳، ۴، ...، $\text{پ}_{\text{ع}} - ۱$ دیجاتی ہیں تو ھَ کی قیمتیں کسی نہ کسی ترتیب میں ۱، ۲، ۳، ...، $\text{پ}_{\text{ع}} - ۱$ ہوتی ہیں کیونکہ اسکی تمام قیمتیں مختلف ہیں اور $\text{پ}_{\text{ع}}$ سے کم ہیں، نیز چونکہ $\text{م ک} + \text{ن پ}_{\text{ع}} = ۱$، اسلئے صرف ک ہی ھ کی وہ قیمت ہے جس کے لئے باقی ھَ = ۱۔
پس ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{فا}_{\text{ع-۱}} = \text{ج} + \text{ط}_{\text{ع}} + \text{ل}_{۲}\,\text{ط}_{\text{ع}}^{۲} + \dots + \text{ل}_{\text{پ}_{\text{ع}}-۱}\,\text{ط}_{\text{ع}}^{\text{پ}_{\text{ع}}-۱}$$

جہاں تمام ل، لِ وغیرہ کو صحیح عددی بنادیا گیا ہے اور $\text{ل}_{۱} = ۱$۔ اب پورانی ترقیم کی طرف رجوع کرکے $\text{ط}_{\text{ع}}$ کی جگہ $\text{و}_{\text{ع}}$ اور $\text{ج}_{۱} = ۱$ رکھو
اس طرح آخر الامر ہم اس اہم نتیجہ

$$\text{فا}_{\text{ع-۱}}(\text{و}_{\text{ع}}، \text{و}_{\text{ع+۱}}، \dots، \text{و}_{\text{ن}}، \text{ر})$$

$$= \text{ج} + \text{و}_{\text{ع}} + \text{ج}_{۲}\,\text{و}_{\text{ع}}^{۲} + \dots + \text{ج}_{\text{پ}_{\text{ع}}-۱}\,\text{و}_{\text{ع}}^{\text{پ}_{\text{ع}}-۱}$$

پر پہنچتے ہیں اور پھر تفاعل

$$\text{فا}_{۱}(\text{و}_{۱}، \text{و}_{۲}، \dots \text{و}_{\text{ن}}، \text{ر}، \text{رَ}، \dots) = \text{لا}_{۱}،$$

کو جو مساوات ف (لا) = ۰ کی ایک اصل ہے و کی قوتوں میں (اس و کی قوتوں میں جسکا لاحقہ سب سے چھوٹا ہے) پھیلانے اور قبل الذکر تحویلات عمل میں لانے سے حاصل ہوتا ہے

$$لا_۱ = گ_۰ + و_۱ + گ_۲ و_۱^۲ + \ldots + گ_{پ_۱-۱} و_۱^{پ_۱-۱}$$

۲۴۰ — اب ہم اس نظریہ کو ان مساواتوں کے حل پر استعمال کرتے ہیں جو جبری طور پر حل پذیر ہیں —

اس مقصد کے لئے لا$_۱$ کی مختلف قوتیں حاصل کرو اور و$_۱$، و$_۲$ ... کی قوت نماؤں کو ان مساواتوں کے سلسلہ کے ذریعہ جو و$_۱$، و$_۲$ ... کو معین کرتے ہیں اس طرح تحویل کرو کہ وہ علی الترتیب پ$_۱$، پ$_۲$، ... سے کم ہوں تو ہم مفروض کی رو سے نتیجہ (291)

$$ف (لا_۱) = ھ_۰ + ھ_۱ و_۱ + ھ_۲ و_۱^۲ + \ldots + ھ_{پ_۱-۱} و_۱^{پ_۱-۱} = ۰$$

پر پہنچینگے جہاں ھ$_۰$، ھ$_۱$، ھ$_۲$، ... تمام و$_۲$ کے صحیح عددی تفاعل ہیں —

آبل کے مسئلہ کی رو سے ھ$_۰$، ھ$_۱$، ھ$_۲$، ... سب کے سب معدوم ہونے چاہئیں، کیونکہ اگر ایسا نہ ہو تو مساواتیں

$$ھ_۰ + ھ_۱ و_۱ + \ldots + ھ_{پ_۱-۱} و_۱^{پ_۱-۱} = ۰، \quad و_۱^{پ_۱} = فا_۱ (و_۲، و_۳ \ldots و_ی، ر، ر' \ldots)$$

ایک ساتھ پوری ہونگی اور فا$_۱$ علاقہ (و$_۲$، و$_۳$، ... و$_ی$) میں ٹھیک ٹھیک پ$_۱$ ویں قوت کا ہوگا جو مفروض کے خلاف ہے۔

اسی طرح ھ$_۰$ کو و$_۲$ کی قوتوں میں پھیلاؤ یعنی

$$\text{ھ}_{\text{ج}} = \text{ک}_{\text{ب}} + \text{ک}_{1}\,\text{و}_{2} + \text{ک}_{2}\,\text{و}_{2}^{2} + \dots + \text{ک}_{\text{ب}-2-1}\,\text{و}_{2}^{\text{ب}-2-1}$$

تو سر $\text{ک}_{\text{ب}}$، ک_{1}، ک_{2}، ... سب کے سب انہی وجوہ کی بنا پر معدوم ہونے چاہئیں۔ لیکن اگر و_{2} موجود نہ ہو تو و_{2} کی قوتوں میں پھیلاؤ، وغیرہ وغیرہ۔

اگر کسی صورت میں ان متواتر تفاعلوں کے سر معدوم نہ ہوں جب انکو $\text{و}_{\text{ج}}$ کی قوتوں میں ترتیب دیا جاتا ہے اور ان کے قوت نماؤں کو حتی الامکان گھٹایا جاتا ہے تو یہ اس امر کا ثبوت ہے کہ ہم نے اس بات کا خیال نہیں رکھا کہ ہر تفاعل فا مساواتوں کے سلسلہ میں ایک ٹھیک قوت میں نہیں لیا گیا ہے، یا یہ کہ ہم نے عناصر و کی تعداد اقل درجہ تک نہیں گھٹائی۔

اس قسم کی ناقص تحویل کی ایک مثال کبھی مساوات کی صورت میں ملتی ہے جسکو ہم تمثیلاً درج کرتے ہیں۔

فرض کرو $\text{ف}(\text{لا}) = \text{لا}^{3} + 3\,\text{ف}\,\text{لا} - 2\,\text{ق}$

$\text{لا}_{1} = \sqrt[3]{\text{ق} + \sqrt{\text{ق}^{2} + \text{ف}^{3}}} + \sqrt[3]{\text{ق} - \sqrt{\text{ق}^{2} + \text{ف}^{3}}}$، جلد اول

صفحہ (۶۱) تو مساواتوں کا سلسلہ یہ ہے:-

$$\text{و}_{2}^{2} = \text{ق}^{2} + \text{ف}^{3}،\quad \text{و}_{2}^{3} = \text{ق} + \text{و}_{1}،\quad \text{و}'^{3} = \text{ق} - \text{و}_{2} \qquad (\text{ا})$$

$$\text{لا} = \text{و}_{1} + \text{و}'_{2}$$

اسلئے

$$\tfrac{1}{2}\,\text{ف}(\text{لا}_{1}) = \text{ف}\,\text{و}_{2} + (\text{و}_{2}^{2} + \text{ق})\,\text{و}_{1} + \text{و}_{2}\,\text{و}_{1}^{2}،$$

اس مساوات کے سر ف، $\text{و}_{2}^{2} + \text{ف}$، و_{2} متماثلاً معدوم نہیں (292)

ہو سکتے، جو اس امر کا ثبوت ہے کہ تفاعل و اقل تعداد میں گھٹائے

نہیں گئے ہیں، اور اب یہ بتایا جائیگا کہ و_1 منطق علاقہ $(\text{و}، \text{و}_2، \text{ف}، \text{ق})$ کا ایک حصہ ہے۔

مساواتوں (۲) کے سلسلہ سے حاصل ہوتا ہے

$$(\text{و}_1 \text{و}_2)^2 = \text{ق}^2 - \text{و}_3^2 = -\text{ف}^2،$$

اسلئے

$$\text{و}_1 \text{و}_2 = -\text{ف}،$$

پس

$$\text{و}_1 = -\frac{\text{ف}}{\text{و}_2} = -\frac{\text{ف}\,\text{و}_2}{\text{ق} + \text{و}_3} = \frac{(\text{ق} - \text{و}_3)\,\text{و}_2}{\text{ف}^2}،$$

اور اسلئے و_1 علاقہ $(\text{و}، \text{و}_2، \text{ف}، \text{ق})$ کا ایک حصہ ہے۔

اسلئے مساواتوں (۱) کا سلسلہ

$$\text{و}_3^2 = \text{ق}^2 + \text{ف}^3،\quad \text{و}_2^3 = \text{ق} + \text{و}_3،\quad \text{لا}_1 = \text{و}_2 - \frac{\text{ف}}{\text{و}_2}$$

$$= \text{و}_2 + \frac{(\text{ق} - \text{و}_3)\,\text{و}_2^2}{\text{ف}^2}$$

میں تحویل ہو جاتا ہے۔

دوسری دو اصلیں سلسلہ ۱ کے آخری عنصر و_2 کی بجائے $\text{سہ}\,\text{و}_2$ اور $\text{سہ}^2\,\text{و}_2$ رکھنے سے حاصل ہوتی ہیں، چنانچہ

$$\text{لا}_2 = \text{سہ}\,\text{و}_2 + \frac{\text{ق} - \text{و}_3}{\text{ف}^2}\,\text{سہ}^2\,\text{و}_2^2$$

$$\text{لا}_3 = \text{سہ}^2\,\text{و}_2 + \frac{\text{ق} - \text{و}_3}{\text{ف}^2}\,\text{سہ}\,\text{و}_2^2$$

اب ہم عام بحث پر عود کرتے ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$\text{لا}_1 = \text{گ}_1 + \text{و}_1 + \text{گ}_2\,\text{و}_1^2 + \text{گ}_3\,\text{و}_1^3 + \ldots\ldots \quad (۱)$$

$$ف(لا) = ھ_۰ + ھ_۱ و_۱ + ھ_۲ و_۱^۲ + ھ_۳ و_۱^۳ + \dots = ۰،$$

جہاں سرِ ھ سب کے سب معدوم ہوتے ہیں۔

اب (۱) میں $و_۱$ کی بجائے یکے بعد دیگرے $سہ و_۱$، $سہ^۲ و_۱$، ...، $سہ^{پ-۱} و_۱$ رکھنے سے لیکن $و_۲$، $و_۳$، ... $و_ن$ کو ثابت چھوڑنے سے $لا_۱$، $لا_۲$، ... $لا_پ$ کی قیمتیں (جہاں $سہ^{پ} - ۱ = ۰$) مساواتوں

$$لا_{ک+۱} = گ_۰ + سہ^{ک} و_۱ + گ_۲ سہ^{۲ک} و_۱^۲ \dots، \quad (ک = ۰، ۱، ۲، \dots پ - ۱)$$

کے نظام کی مدد سے حاصل ہوتی ہیں۔ اور آخر الامر مساواتوں کے اس نظام سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$و_۱ = \frac{۱}{پ} \sum سہ^{-ک} لا_{ک+۱} \qquad (۲)$$

جس سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ سرِ $و_۱$ کا غیر منطق تفاعل اصلوں کا ایک منطق تفاعل ہے جبکہ اکائی کا ابتدائی جذر سہ منطق علاقہ میں شامل کر دیا جائے۔

293 اسی طرح (۱) میں $و_۲$، $و_۳$، ... $و_ن$ کی قیمتوں کے کسی جب ثابت رکھکر $و_۱$ کی بجائے یکے بعد دیگرے $سہ و_۱$، $سہ^۲ و_۱$، ... $سہ^{پ-۱} و_۱$ درج کیا جائے تو $و_۱$ کی تمام قیمتیں ملتی ہیں جو اصلوں میں خطی تفاعلوں کے طور پر بیان کی گئی ہیں اور جو اصلوں اور ابتدائی اصل سہ سے بنائے ہوئے علاقہ میں منطق ہیں۔ یہ فرض کرنا ضروری نہیں ہے کہ $و_۱$، $و_۲$، ... $و_ن$ کے ہر اجتماع سے (۱) کے ذریعہ مختلف اصل ملتی ہے۔ ممکن ہے کہ اصلیں دوریوں میں نکرا پائیں اور $و_۱$، $و_۲$، ... $و_ن$

میں سے ایک یا زیادہ کی ہر قیمت کے لئے ن اصلوں کا ایک ہی دوری حاصل ہو۔ کعبی کی صورت میں $پ = ۳$، $پ_۲ = ۲$ کے لئے $و_۱$، $و_۲$ ملتے ہیں اور $\pm و_۲$ کے لئے وہی تین اصلیں حاصل ہوتی ہیں۔ چار درجی کی صورت میں $پ_۱ = ۲$، $پ_۲ = ۲$، $پ_۳ = ۲$ کے لئے $و_۱$، $و_۲$، $و_۳$ ملتے ہیں اور $و_۳$ یا $و_۴$ کی ہر قیمت کے لئے چار اصلوں کا ہی دوریہ حاصل ہوتا ہے۔

اس طرح منسوب کرنے پر $و$ کی $پ_۱$ $پ_۲$ ... $پ_ن$ قیمتیں ملتی ہیں لیکن یہ سب ممکن ہے کہ اس طرح دوریوں میں واقع ہوں کہ $و_۲$، $و_۳$ ... $و_ن$ میں سے ایک یا زیادہ کی تمام قیمتوں کے لئے تمام قیمتیں تکرار پائیں۔

پس ہمیں نتیجہ حاصل ہوتا ہے کہ $و_۱$ اصلوں کے ایک خطی تفاعل کے طور پہ بیان ہو سکتا ہے۔ $و_۱$ کی یہ قیمتیں ان تمام تفاعلوں پر مشتمل ہیں جو اصلوں کو ہر ممکنہ طریقہ پر ترتیب دینے سے حاصل ہوتے ہیں۔ کیونکہ $لا - و_۱$ کی ان تمام قیمتوں کا جو $و_۱$ کو ہر ممکنہ قیمت دینے سے حاصل ہوتی ہیں حاصل ضرب $\Pi(لا - و_۱) = \Pi(لا^{پ_۱} - و_۱^{پ_۱})$

کیونکہ اگر $و_۱$ کی ایک قیمت $و$ ہے تو $سہ\, و_۱$ اور $سہ^۲ و_۱$ ... $سہ^{پ_۱-۱} و_۱$ بھی اسکی قیمتیں ہیں اور $\Pi(لا^{پ_۱} - و_۱^{پ_۱})$ منطق ہے کیونکہ متشابہ وجوہ کی بنا پر یہ $و_۲$، $و_۳$ ... $و_ن$ کی قیمتوں پر منحصر نہیں ہے۔

اب ہم یہ دیکھیں گے کہ $و_۲$ کو بھی اسی طرح درجہ $پ_۲$ کے ایسے متجانس تفاعل کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے جو اصلوں اور اکائی کے جذروں $سہ_۱$، $سہ_۲$ سے بنتے ہوئے علاقہ میں منطق ہو۔ یہاں $سہ_۱^{پ_۱} = ۱$، $سہ_۲^{پ_۲} = ۱$۔ اسکے لئے مساوات

$$و_1^{پ} = ل_1 + و_2 + ل_2 و_2^2 + \ldots + ل_{پ-1} و_2^{پ-1}$$

میں $و_1$، $و_2$، ... ، $و_پ$ کی قیمتوں کے کسی حیٹ کو ثابت رکھکر $و_2$ کی بجائے $س\, و_2$، $س^2 و_2$، ... ، $س^{پ-1} و_2$ اور ہر صورت میں $و_1^{پ}$ کی اوپر حاصل کی ہوئی متناظر قیمتوں $ا_1$، $ا_2$، ... ، $ا_پ$ کو درج کرد تو ہمیں حاصل ہوتا ہے $و_2 = \frac{1}{پ_2} \sum س^{-ک+1} ا_ک$ ۔ اسطرح ہم دیکھتے ہیں کہ $و_2$ کی تمام $پ_2 پ_3 \ldots پ_ن$ قیمتوں کو مذکورہ طریقہ پر بیان کیا جا سکتا ہے نیز
(294) جس طرح ہم نے $و_1$ کے لئے ثابت کیا ہے اسی طرح $و_2$ کے لئے بھی ثابت کر سکتے ہیں کہ تمام قیمتیں ایک قیمت سے اصلوں کو ہر ممکنہ ترتیب میں لیکر حاصل کیجا سکتی ہیں ۔

اب ہم دیکھتے ہیں کہ مساواتیں (۱) سب کی سب نمونہ

$$و_ع^{پ} = ج_1 + و_{ع+1} + ج_2 و_{ع+1}^2 + \ldots + ج_{پ_{ع+1}-1} و_{ع+1}^{پ_{ع+1}-1}$$

کی ہیں اور یہہ کہ ہم یکے بعد دیگرے $و_1$، $و_2$، ... $و_م$ کو اصلوں کے متجانس تفاعلوں کے طور پر بیان کر سکتے ہیں جس کے درجے $پ_1 پ_2$، $پ_1 پ_2 پ_3$، ... وغیرہ ہیں اور جو اصلوں اور اکائی کے جذروں $س_1$، $س_2$، ... $س_م$ سے بنائے ہوئے علاقہ میں منطق ہیں اور یہ کہ کسی ایک $و_ع$ کی قیمتیں اصلوں کو ہر ممکنہ ترتیب میں لینے سے حاصل ہوتی ہیں ۔

ہم جن نتیجوں پر پہنچے ہیں اِنکو اکٹھا کرنے سے حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے :-

مسئلہ :- اگر مساوات ف (لا) = ۰ جس کے سر مقدارون ر، ر، ... کے منطق تفاعل ہیں ایک جبری تفاعل

لا = فا (و، و، ... و، ر، ر، ...)

سے پوری ہوسکتی ہو تو مقادیر و، اصلوں کے اور اکائی کے ابتدائی جذروں کے منطق صحیح تفاعل ہیں، مزید بریں یہ مقداریں اس شکل

و = فا (و، و، ... و، ر، ر، ...)

کی مساواتوں کے ایک سلسلہ سے متعین ہوتی ہیں - اس سلسلہ میں قوت نما پ سب کے سب مفرد اعداد ہیں اور تفاعل فا سب کے سب منطق ہیں -

مذکورۂ بالا مسئلہ کی رو سے یہ ممکن ہو جاتا ہے کہ ابدالات کے نظریہ کا اطلاق اس مسئلہ پر کیا جائے کہ وہ عام مساواتیں جنکا درجہ چار سے بڑا ہے جبری طور پر ناقابل حل ہیں -

اس مسئلہ کا ثبوت ذیل میں درج ہے -

یہ بتایا جا چکا ہے کہ پہلا غیر منطق تفاعل و، ایک تفاعل کا جو علاقہ (ر، ر، ...) میں منطق ہے پ واں جذر ہے، اور چونکہ و اصلوںکا ایک ایسا منطق تفاعل ہے کہ و متماثل ہے اسلئے دفعہ ۲۳۲ کی

روسے وہ، ممیز ۵ کا جذر المربع ہے یا اسکی شکل س $\sqrt{\Delta}$ ہے جسمیں
س اصلوں کا ایک تشاکل تفاعل ہے۔ اسلئے و ن = ۲۔
اگر ہم س $\sqrt{\Delta}$ کو منطق علاقہ میں شریک کریں تو اس کے
معنی ہونگے کہ ہم نے اصلوں کے تمام ایک قیمتی اور دو قیمتی تفاعلوں کو
شامل کرلیا ہے۔ ایک قدم اور آگے بڑھنے سے اصلوں کا ایک (295)
منطق تفاعل ف$_{ن-۱}$ ہونا چاہئے جو ۲پ$_{ن-۱}$ قیمتی ہے اور جسکی پ$_{ن-۱}$
ویں قوت دو قیمتی ہے، لیکن ایسا کوئی تفاعل موجود نہیں ہوتا جبکہ
ن > ۴ (دفعہ ۲۳۳)۔ پس وہ عمل جس کے ذریعہ ہم اصلوں تک پہنچ
سکتے ہیں جاری نہیں رکھا جا سکتا۔

اسلئے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ وہ عام مساوات جسکا درجہ
چار سے بڑا ہے جبری طور پر حل نہیں کیجا سکتی۔

نیٹو (Netto) نے اس سوال پر اپنی کتاب "Substitutionentheorie" ع
میں باقاعدہ بحث کی ہے اور ہم نے اوپر کی تحقیقات میں اسی کا اتباع
کیا ہے۔ وہ اصول جن پر اس تحقیقات کا دارومدار ہے آبیل کے
دریافت کئے ہوئے ہیں۔ آبیل ہی پہلا شخص تھا جس نے باقاعدہ
طور پر ان مساواتوں کے جبری حل کا عدم امکان ثابت کیا ہے جنکا
درجہ چار سے بڑا ہو۔ اُس نے اس دفعہ کے بنیادی مسئلہ کو اس شکل
میں بیان کیا تھا:۔ اگر کوئی جبری مساوات جبری طور پر حل پذیر ہے
تو ہم ہمیشہ اصل کو ایسی شکل دے سکتے ہیں کہ وہ تمام جبری تفاعل
جن سے یہ ترکیب پاتی ہے دی ہوئی مساوات کی اصلوں کی رقوم میں ناطق طور پر
بیان کیے جا سکتے ہیں (آبیل کی کتاب "Œuvres Completes"

جلد اول صفحہ ۵۷)۔ یہ مسئلہ جس طریقہ پر مندرجۂ بالا ثبوت میں استعمال ہوا ہے آبل کے ثبوت سے ذرا مختلف ہے۔ اس کے ثبوت میں اس قسم کی ترمیم وانٹزل (Wantzel) نے کی تھی۔ وانٹزل نے دفعات ۲۳۲ اور ۲۳۳ کے مسائل بھی جو نظریہ ابدالات سے متعلق ہیں دریافت کئے۔ دیکھو سیرٹ (Serret) کی کتاب "Cours d'Algèbre Supérieure" حصہ دوم صفحہ ۴۸۴]

ابدالات اور گروہوں سے متعلق مزید معلومات کے لئے دیکھو "The Theory of Groups" مولفہ پروفیسر ڈبلیو۔ برنسائڈ[1] مطبوعہ کیمبرج ۱۹۱۱ء اور "The Theory of Equations" مولفہ پروفیسر کیجوری (Cajori) مطبوعہ نیو یارک ۱۹۰۴ء۔

ہمیں یہاں مناسب معلوم ہوتا ہے کہ آبل کی مساواتوں پر ایک فصل کا اضافہ کیا جائے کیونکہ مختلف طریقوں سے یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ گیلوا کا تحلیل یا کوئی اور مساوات جس کی اصلیں ایک مساوات ف (لا) = ۰ کی اصلوں لا۱، لا۲، ... لان کے کسی ن قیمتی تفاعل کی ن قیمتیں ہیں آبل کے نمونہ کی مساواتیں ہیں۔

اور اس لئے اس نمونہ کی مساواتوں کا حل ف (لا) = ۰ کے حل کے علاوہ ایسی مساواتوں کے حل پر بھی منحصر کیا جا سکتا ہے جن کا درجہ ن سے کم ہے۔

[1] Prof. W. Burnside

(496)

فصل پنجم - آبل کی مساواتیں

۱۴۲ — آبل کی مساواتوں کی تعریف - گیالوا کا محلل آبل کی ایک مساوات ہے۔

آبل کی مساوات اس طرح کی ہوتی ہے کہ اسکی اصلیں ف ارکان والے م جتھوں میں ترتیب دیجا سکتی ہیں اور ہر جتھ کی اصلوں لا۱، لا۲، .... لاف میں ذیل کا رشتہ ہوتا ہے:-

لا۲ = طہ (لا۱)، لا۳ = طہ (لا۲) = طہ² لا۱، لا۴ = طہ (لا۳) = طہ³ (لا۱)، ....

لاف = طہ (لاف-۱) = طہ^(ف-۱) (لا۱)، لا۱ = طہ (لاف) = طہ^ف (لا۱)،

جہاں طہ (لا) متغیر لا کا ایک منطق تفاعل ہے۔

مثلاً گیالوا کے محلل کی ن اصلوں میں مذکورہ بالا رشتہ موجود ہوتا ہے۔ نیز اگر ف (لا) = ۰ کی ن اصلوں لا۱، لا۲، .... لان کا کوئی ن قیمتی تفاعل فہ بنایا جائے جس کی ن قیمتیں فہ۱، فہ۲، فہ۳، .... فہن ہوں تو مساوات فا (فہ) = ۰ کی ن اصلوں فہ۱، فہ۲، .... فہن میں بھی مذکورہ بالا رشتے پائے جاتے ہیں لیکن ایسی کسی صورت میں مختلف طریقوں سے اصلوں کو جتھوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ اس کو ثابت کرنے کے لئے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر س کوئی اختیاری

ابدال ہے تو دفعہ ۲۲۹ کی رو سے س فہ$_{1}$ = طہ (فہ$_{1}$)، جہاں طہ درجۂ ن-۱ کا ایک منطق صحیح تفاعل ہے جو فہ$_{1}$ اور س فہ$_{1}$ سے کسی ابدال ت سے اخذ کئے ہوئے اصلوں کے ہر زوج کے لئے وہی ہے - پس س ت فہ$_{1}$ = طہ (ت فہ$_{1}$)- یہ آخری نتیجہ اس طرح سے بھی حاصل ہو سکتا ہے کہ ہم س فہ$_{1}$ = طہ (فہ$_{1}$) کو لا$_{1}$، لا$_{2}$،.... لا$_{ن}$ میں ایک متماثلہ خیال کریں جو ف (لا) کے سروں کی بجائے اصلونکی رقوم میں متشاکل تفاعل درج کرنے سے حاصل ہوتی ہے اور اس لئے س فہ$_{1}$ = طہ (فہ$_{1}$) سے حاصل ہوتا ہے

س (ت فہ$_{1}$) = ت طہ (فہ$_{1}$) = طہ (ت فہ$_{1}$)

اب س کی کوئی خاص قوت اکائی کے مساوی ہے - فرض کرو کہ س^{ف} = ۱ اور اصلوں کو ف ارکان کے جٹوں میں ترتیب دو جنہیں سے ہر جٹ ذیل کے نمونہ کا ہو:-

ت فہ$_{1}$، س ت فہ$_{1}$، س^{2} ت فہ$_{1}$، ... س$^{ف-1}$ ت فہ$_{1}$،

جہاں پہلے جٹ کے لئے ہم ت = ۱ لیتے ہیں اور ہر بعد والے جٹ کیلئے ت کی قیمت کے طور پر وہ ابدال لیتے ہیں جو اس سے پہلے نہ لیا گیا ہو- یہ عمل ہم اس وقت تک جاری رکھتے ہیں کہ تمام ابدالات ختم ہو جائیں جیسا کہ ہم نے دفعہ ۲۲۶ میں کیا تھا - اب چونکہ س ت فہ$_{1}$ = طہ (ت فہ$_{1}$) اس لئے ت کی بجائے س^{م} ت رکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے س$^{م+1}$ ت فہ$_{1}$ = طہ (س^{م} ت فہ$_{1}$)، اس لئے س ت فہ$_{1}$ = طہ (ت فہ$_{1}$) کے ساتھ ہمیں ذیل کے رشتے ملتے ہیں:-

س^{2} ت فہ$_{1}$ = طہ (س ت فہ$_{1}$) = طہ^{2} (ت فہ$_{1}$)، س^{3} ت فہ$_{1}$ = طہ (س^{2} ت فہ$_{1}$) = طہ^{3} (ت فہ$_{1}$)،...

وغیرہ - یہہ سلسلہ ت فہ = س^ف ت فہ = طہ (س^(ف-۱) ت فہ) پر ختم ہوتا ہے اور اس لئے فا (فہ) = ۰ آبل کی مساوات ہے۔

۲۴۲ - آبل کی عام مساوات کا حل۔ آبل کی مساوات (297)
کی اصلیں اس طرح حاصل کیجا سکتی ہیں کہ درجۂ ف والی ایک ایسی مساوات حل کی جائے جس کے سر ایک م درجہ والی مساوات کی ایک اصل کے منطق صحیح تفاعل ہوں - اس خاص صورت میں جبکہ ف = ۳ اور م = ۴ ہم اس مسئلہ کو ثابت کریں گے - یہہ آسانی سے دیکھا جاسکتا ہے کہ مسئلہ بالعموم صحیح ہے۔

فرض کرو کہ ق۱ = ق (لا۱، لا۲، لا۳) پہلے جبٹ کی تین اصلوں لا۱، لا۲، لا۳ کا ایک منطق متشاکل تفاعل ہے، ق۲ دوسرے جبٹ کی تین اصلوں لا۴، لا۵، لا۶ کا وہی تفاعل ہے وغیرہ - تب

ق۱ = ق (لا۱، لا۲، لا۳) = ق {لا۱، طہ (لا۱)، طہ^۲ (لا۱)} = فہ (لا۱)

جہاں فہ، (لا۱) کا ایک منطق تفاعل ہے۔ نیز چونکہ ق۱ متشاکل تفاعل ہے اس لئے

ق۱ = ق (لا۲، لا۳، لا۱) = ق {لا۲، طہ (لا۲)، طہ^۲ (لا۲)} = فہ (لا۲) اور اسی طرح ق۱ = فہ (لا۳)

پس ق۱ = ۱/۳ {فہ (لا۱) + فہ (لا۲) + فہ (لا۳)}۔ اسی طرح

ق۲ = ۱/۳ {فہ (لا۴) + فہ (لا۵) + فہ (لا۶)}

اور ق۳، ق۴ کے لئے بھی متشابہ قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ اسلئے

Σ ق$_1$ = ق$_1$ + ق$_2$ + ق$_3$ + ق$_4$ = $\frac{1}{3}$ { فہ (لا$_1$) + فہ (لا$_2$) + ...

.... + فہ (لا$_{12}$) }

اور اس لئے Σ ق$_1$ اصلوں لا$_1$، لا$_2$، ....، لا$_{12}$ والی مساوات ف (لا) = ۰ کے سروں کا ایک منطق تفاعل ہے۔ بعینہٖ اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ Σ ق$_1^2$، Σ ق$_1^3$، Σ ق$_1^4$ مساوات ف (لا) = ۰ کے سروں کے منطق تفاعل ہیں۔ اب جملہ

(ما - ق$_1$) (ما - ق$_2$) (ما - ق$_3$) (ما - ق$_4$)

کے سروں کو نیوٹن کے ضابطہ کی مدد سے ق$_1$، ق$_2$، ق$_3$، ق$_4$ کی قوتوں کے مجموعوں کے طور پر بیان کرنے سے ہم اخذ کرتے ہیں کہ ق$_1$، ق$_2$، ق$_3$، ق$_4$ چوتھے درجہ کی ایک ایسی مساوات کی اصلیں ہیں جس کے سر مساوات ف (لا) = ۰ کے سروں کے منطق تفاعل ہیں۔

مزید برایں اگر ر$_1$، ر$_2$، ر$_3$، ر$_4$ علی الترتیب چار جٹوں میں سے ہر ایک جٹ کی اصلوں کے کسی دوسرے تشاکل تفاعل کو تعبیر کریں تو ہم اوپر کی طرح دیکھتے ہیں کہ Σ ر$_1$، Σ ر$_1$ق$_1$، Σ ر$_1$ق$_1^2$ اور Σ ر$_1$ق$_1^3$ بھی ف (لا) کے سروں کے منطق تفاعل ہیں اور اس لئے مثال ۱ صفحہ ۶۰ کی رو سے ر$_1$، ر$_2$، ر$_3$، ر$_4$ علی الترتیب ق$_1$، ق$_2$، ق$_3$، ق$_4$ کے منطق صحیح تفاعل ہیں اور یہ تفاعل چاروں زوجوں کے لئے وہی ہیں۔

(298) پس $ق_1 = لا_1 + لا_2 + لا_3 = م_1$ رکھنے سے اور $ر_1$ کو قیمت $لا_1 لا_2 + لا_2 لا_3 + لا_3 لا_1$ اور قیمت $لا_1 لا_2 لا_3$ دینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ آخری تفاعل $م_1$ کے منطق صحیح تفاعل ہیں۔

پس $لا_1$، $لا_2$، $لا_3$ کعبی مساوات $لا^3 - م_1 لا^2 + ف(م_1) لا - پ(م_1) = 0$ کی اصلیں ہیں جہاں ف اور پ منطق صحیح تفاعل ہیں اور ہم دیکھتے ہیں کہ یہ کعبی مساوات آبل کی مساوات ہے۔

دوسرے جٹھوں کی اصلوں کے کعبی اس طرح حاصل ہوتے ہیں کہ اوپر کی مساوات میں $م_1$ کی بجائے $م_2$، $م_3$، $م_4$ رکھا جائے اور جیسا کہ ہم اوپر کی بحث میں دیکھ چکے ہیں $م_1$، $م_2$، $م_3$، $م_4$ ایک چار درجی مساوات کی اصلیں ہیں جس کے سر ف(لا) کے سروں کے منطق تفاعل ہیں۔ ظاہر ہے کہ اگر ف اور م کوئی دوسرے صحیح عدد ہوں تو یہی طریقہ استعمال کیا جا سکتا ہے۔

۲۴۳ ۔ ایک خاص آبل کی مساوات کا حل۔

اگر م = ۱ یعنے اگر آبل کی مساوات ف(لا) = 0 کی اصلیں صرف ایک جٹ میں شامل ہوں تو جذروں کے ذریعہ سے مساوات کو حل کیا جا سکتا ہے۔

اس صورت میں تمام اصلیں کسی ایک اصل $لا_1$ کی رقوم میں حسب ذیل طور پر بیان کیجا سکتی ہیں:۔

$$لا_1، ط(لا_1)، ط^2(لا_1)، \ldots، ط^{ن-1}(لا_1) \quad \text{جہاں} \quad ط^ن(لا_1) = لا_1۔$$

$$پ_ر(لا_1) = \{لا_1 + ع_ر ط(لا_1) + ع_ر^2 ط^2(لا_1) + \ldots + ع_ر^{(ن-1)} ط^{ن-1}(لا_1)\}^ن \quad \text{لو جہاں}$$

عہ مساوات $\text{لا}^{\text{ن}} - ۱ = ۰$ کی ایک خاص یعنے ابتدائی اصل ہے اور اس لئے دوسری اصلیں عہ، $\text{عہ}^{۲}$، $\text{عہ}^{۳}$، ...، $\text{عہ}^{\text{ن}-۱}$ ہیں اور اگر $\text{م} < \text{ن}$ تو

$$\text{عہ} + \text{عہ}^{\text{م}} + \text{عہ}^{۲\text{م}} + \ldots + \text{عہ}^{(\text{ن}-۱)\text{م}} = ۰$$

$\text{لا}_۱$ کی بجائے کوئی دوسری اصل $\text{لا}_{\text{ف}+۱} = \text{طہ}^{\text{ف}}(\text{لا}_۱)$ درج کرنے سے ہمیں ملتا ہے :-

$$\text{پہ}_{\text{ر}}(\text{لا}_{\text{ف}+۱}) \equiv \{\text{طہ}^{\text{ف}}(\text{لا}_۱) + \text{عہ}^{\text{ر}}\,\text{طہ}^{\text{ف}+۱}(\text{لا}_۱) + \text{عہ}^{۲\text{ر}}\,\text{طہ}^{\text{ف}+۲}(\text{لا}_۱) + \ldots$$

$$+ \text{عہ}^{(\text{ن}-\text{ف})\text{ر}}\,\text{طہ}^{\text{ن}}(\text{لا}_۱) + \ldots + \text{عہ}^{(\text{ن}-۱)\text{ر}}\,\text{طہ}^{\text{ف}+\text{ن}-۱}(\text{لا}_۱)\}^{\text{ن}}$$

$$\equiv \{\text{عہ}^{\text{ر}(\text{ن}-\text{ف})}(\text{لا}_۱) + \text{عہ}^{\text{ر}}\,\text{طہ}(\text{لا}_۱) + \text{عہ}^{۲\text{ر}}\,\text{طہ}^{۲}(\text{لا}_۱) + \ldots + \text{عہ}^{(\text{ن}-۱)\text{ر}}\,\text{طہ}^{\text{ن}-۱}(\text{لا}_۱)\}^{\text{ن}}$$

$$\equiv \text{پہ}_{\text{ر}}(\text{لا}_۱)$$

اسلئے $\text{پہ}_{\text{ر}}(\text{لا}_۱) = \text{پہ}_{\text{ر}}(\text{لا}_۲) = \ldots = \text{پہ}_{\text{ر}}(\text{لا}_{\text{ن}}) = \frac{۱}{\text{ن}} \sum_{\text{س}=۱}^{\text{ن}} \text{پہ}_{\text{ر}}(\text{لا}_{\text{س}}) = \text{ف}(\text{لا})$ کے سروں اور عہ کے ایک منطق صحیح تفاعل $\text{ع}_{\text{ر}}$ کے۔

ن ویں جذر لینے سے اور ر کو ۰، ۱، ۲، ...، ن - ۱ کے مساوی رکھنے سے ہمیں ن مساواتیں ملتی ہیں جو سب ذیل کی شکل کی ہیں :-

$$\text{لا}_۱ + \text{عہ}^{\text{ر}}\,\text{طہ}(\text{لا}_۱) + \text{عہ}^{۲\text{ر}}\,\text{طہ}^{۲}(\text{لا}_۱) + \ldots + \text{عہ}^{(\text{ن}-۱)\text{ر}}\,\text{طہ}^{\text{ن}-۱}(\text{لا}_۱) = (\text{ع}_{\text{ر}})^{\frac{۱}{\text{ن}}}$$

جہاں $(\text{ع}_{\text{ر}})^{\frac{۱}{\text{ن}}}$، $\text{ع}_{\text{ر}}$ کے ن ویں جذروں میں سے کوئی ایک ہے۔

(299) $ر = ۰$ کے لئے آخری مساوات کا سیدھی طرف والا رکن

$لا_۱ + لا_۲ + لا_۳ + \cdots + لان = -\left(ف(لا) \text{ میں } لا^{ن-۱} \text{ کا سر}\right) / \left(لا^{ن} \text{ کا سر}\right) = ۱$ ہو جاتا ہے۔ اگر ہم ان مساواتوں کی طرفین کو جمع کریں اور یہ یاد رکھیں کہ

$$عہ^{۰} + عہ^{م} + عہ^{۲م} + \cdots + عہ^{(ن-۱)م} = ۰$$

تو ہمیں $ن\, لا_۱ = (ع_۱)^{\frac{۱}{ن}} + (ع_۲)^{\frac{۱}{ن}} + \cdots + (ع_{ن-۱})^{\frac{۱}{ن}} + ۱$ حاصل ہوتا ہے

اگر ہم مساواتوں کو $عہ^{۰}،\ عہ^{-م}،\ عہ^{-۲م}،\ \ldots\ عہ^{-(ن-۱)م}$ سے ضرب دیں اور جمع کریں تو حاصل ہوتا ہے

$$ن\, لا_{م+۱} = ن\, طہ^{م}(لا_۱) = ۱ + عہ^{-م}(ع_۱)^{\frac{۱}{ن}} + عہ^{-۲م}(ع_۲)^{\frac{۱}{ن}} + \cdots$$
$$\cdots + عہ^{-(ن-۱)م}(ع_{ن-۱})^{\frac{۱}{ن}}$$

۔ ان مساواتوں میں جذر $(ع_ر)^{\frac{۱}{ن}}$ کی وہ قیمت جو $(ع_۱)^{\frac{۱}{ن}}$ کے ساتھ لینی چاہیئے $(ع_ر)^{\frac{۱}{ن}} = ا_ر\left\{(ع_۱)^{\frac{۱}{ن}}\right\}^{ر}$ سے حاصل ہوتی ہے جہاں $ا_ر$ ، $ف(لا)$ کے سروں اور $عہ$ کا منطق تفاعل ہے۔ یہ اس لئے کہ

$$\frac{(ع_ر)^{\frac{۱}{ن}}}{\left(ع_۱^{\frac{۱}{ن}}\right)^{ر}} = \frac{لا_۱ + عہ^{ر} طہ(لا_۱) + عہ^{۲ر} طہ^{۲}(لا_۱) + \cdots + عہ^{(ن-۱)ر} طہ^{ن-۱}(لا_۱)}{\left\{لا_۱ + عہ\, طہ(لا_۱) + عہ^{۲} طہ^{۲}(لا_۱) + \cdots + عہ^{ن-۱} طہ^{ن-۱}(لا_۱)\right\}^{ر}} = چہ_ر(لا_۱)$$

لیکن ہم اوپر دیکھ چکے ہیں کہ اگر جملہ

لا۱ + عہ^ر طہ (لا۱) + عہ^۲ر طہ^۲ (لا۱) + ... + عہ^(ن-۱)ر طہ^(ن-۱) (لا۱) ≡ سہ_ر (لا۱)

میں لا۱ کی بجائے لا_ف+۱ رکھا جائے تو نتیجہ عہ^(ن-ف)ر سہ_ر (لا۱) حاصل ہوتا ہے اسلئے

چہ_ر (لا_ف+۱) = عہ^(ن-ف)ر سہ_ر (لا۱) / {عہ^(ن-ف)ر سہ (لا۱)}^ر = چہ_ر (لا۱)

اسلئے چہ_ر (لا۱) = چہ_ر (لا۲) = چہ_ر (لا۳) = ... = چہ_ر (لا_ن)

= ۱/ن مج_{س=۱}^{ن} چہ_ر (لا_س) = اَ_ر =

ف (لا) کے سروں اور عہ کا ایک منطق تفاعل۔ پس ایک اصل لا_م+۱ کے لئے عام جملہ

ن لا_م+۱ = اَ۰ + ما + اَ۲ ما^۲ + ... + اَ_ن-۱ ما^(ن-۱)

کے طور پر لکھا جا سکتا ہے جہاں ما = عہ^م (اَ۱)^(۱/ن) جس کی صرف ن قیمتیں ہیں۔ پس مذکورۂ بالا نمونہ کی آبل کی مساوات جذروں کے ذریعہ حل ہو سکتی ہے۔

۴۴۲ — آبل کی مساوات ف (لا) = ۰ کو حل کرنیکا دوسرا طریقہ جبکہ مساوات کی تمام اصلوں سے ایک گروہ بنے

اور نیز جبکہ ف (لا) کا درجہ ن = م ف

اختصار کی خاطر ہم وہ صورت لیتے ہیں جبکہ ف = ۳ اور (300)
م = ۴ - عام طریقہ اس سے متشابہ ہے -

۱۲ اصلوں کو حسب ذیل طریقہ پر ۴ جٹوں میں ترتیب دو :-

ما۱ = لا۱ + لا۵ + لا۹ = لا۱ + طہ^۴ (لا۱) + طہ^۸ (لا۱)،

ما۲ = لا۲ + لا۶ + لا۱۰ = طہ (لا۱) + طہ^۵ (لا۱) + طہ^۹ (لا۱)

ما۳ = لا۳ + لا۷ + لا۱۱ = طہ^۲ (لا۱) + طہ^۶ (لا۱) + طہ^۱۰ (لا۱)

ما۴ = لا۴ + لا۸ + لا۱۲ = طہ^۳ (لا۱) + طہ^۷ (لا۱) + طہ^۱۱ (لا۱)

دفعہ ۲۴۲ کی طرح طہ کی بجائے طہ^۴ لینے سے معلوم ہوتا ہے کہ لا۱، طہ^۴ (لا۱)، طہ^۸ (لا۱) ایک ایسی کعبی مساوات کی اصلیں ہیں جس کے سر ما۱ کے منطق تفاعل ہیں اور یہ کہ ما۱، ما۲، ما۳، ما۴ ایک ایسی چار درجی کی اصلیں ہیں جس کے سر ف (لا) کے سروں کے منطق تفاعل ہیں - لیکن موجودہ صورت میں چار درجی بھی اسی نمونہ کی آبل کی مساوات ہے کیونکہ ہم ثابت کرینگے کہ ما۲ = فہ (ما۱)، ما۳ = فہ (ما۲)، ما۴ = فہ (ما۳)، ما۱ = فہ (ما۴) جہاں فہ، ف (لا) کے سروں کا ایک منطق تفاعل ہے - اگر ر کوئی عدد ہو تو

ما۲^ر ما۱^ر = (لا۲ + لا۶ + لا۱۰)^ر (لا۱ + لا۵ + لا۹)^ر = {طہ (لا۱) + طہ^۵ (لا۱) + طہ^۹ (لا۱)}^ر
{لا۱ + طہ^۴ (لا۱) + طہ^۸ (لا۱)}^ر

= چہ (لا$_1$)

= (لا$_4$ + لا$_1$ + لا$_2$)(لا$_5$ + لا$_9$ + لا$_1^r$) = {طہ (لا$_5$) + طہ^5 (لا$_5$) + طہ^9 (لا$_5$)}
{لا$_5$ + طہ^4 (لا$_5$) + طہ^8 (لا$_5$)}^{r}

= چہ (لا$_5$)

اسی طرح ثابت کر سکتے ہیں کہ ما$_4$ ما$_1^r$ = چہ (لا$_9$)۔

اسی طریقہ سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ ما$_4$ ما$_2^r$ = چہ (لا$_2$) = چہ (لا$_6$)

= چہ (لا$_{10}$) اور

ما$_4$ ما$_3^r$ = چہ (لا$_3$) = چہ (لا$_7$) = چہ (لا$_{11}$)، ما$_1$ ما$_4^r$ = چہ (لا$_4$) = چہ (لا$_8$) = چہ (لا$_{12}$)،

کیونکہ آخری صورت میں لا$_1$ = طہ (لا$_{12}$)، لا$_5$ = طہ (لا$_4$)، لا$_9$ = طہ (لا$_8$)،
اس لئے

ما$_2$ ما$_1^r$ + ما$_3$ ما$_2^r$ + ما$_4$ ما$_3^r$ + ما$_1$ ما$_4^r$ = $\frac{1}{3}$ {چہ (لا$_1$) + چہ (لا$_2$) + ... + چہ (لا$_{12}$)} = ت$_r$

جہاں ت$_r$، ف (لا) کے سروں کا ایک منطق تفاعل ہے۔

ر کو ٠، ١، ٢، ٣ کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

ما$_2$ + ما$_3$ + ما$_4$ + ما$_1$ = ت$_0$

ما$_2$ ما$_1$ + ما$_3$ ما$_2$ + ما$_4$ ما$_3$ + ما$_1$ ما$_4$ = ت$_1$

ما$_2$ ما$_1^2$ + ما$_3$ ما$_2^2$ + ما$_4$ ما$_3^2$ + ما$_1$ ما$_4^2$ = ت$_2$

ما$_2$ ما$_1^3$ + ما$_3$ ما$_2^3$ + ما$_4$ ما$_3^3$ + ما$_1$ ما$_4^3$ = ت$_3$

اور اسلئے دفعہ ۲۲۶ کی طرح ما$_2$ = فہ (ما$_1$)، ما$_3$ = فہ (ما$_2$)، ما$_4$ = فہ (ما$_3$)، ما$_1$ = فہ (ما$_4$) (301)

جہاں فہ ایک ایسا منطق صحیح تفاعل ہے جس کے سرف (لا) کے سروں کے منطق تفاعل ہیں۔ پس معلوم ہوا کہ ما، ما، ملہ، ماہ کی چار درجی مساوات، ف (لا) کے نمونہ کی آبل کی مساوات ہے۔ اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے کہ درجہ م کی وہ مساوات جس کی اصلیں ف ارکان والی جٹوں کی اصلوں کے مجموعوں کے مساوی ہیں ف (لا) کے نمونہ کے آبل کی مساوات ہے۔

بالعموم اگر ن کو اجزائے ضربی میں تحلیل کیا جا سکے تو اس نمونہ کی آبل کی مساوات کے حل کو مذکورۂ بالا طریقہ کی مدد سے ایسی آبل کی مساواتوں کے حل پر منحصر کیا جا سکتا ہے جو سب ایک ہی نمونہ کی ہوں اور جن کا درجہ دی ہوئی مساوات کے درجہ سے کمتر ہو۔ مثلاً اگر ن = ۲۴ تو مساوات کا حل ایسے ۱۲ ویں درجہ کی آبل مساوات کے حل پر منحصر ہوگا جس کے سر خود ایک دو درجی آبل کی مساوات کے حل پر موقوف ہیں۔ پھر ۱۲ ویں درجہ کی آبل کی مساوات کا حل آبل کی ایسی چھ درجی مساوات کے حل پر منحصر ہوگا جس کے سر خود ایک دو درجی آبل کی مساوات کے حل پر موقوف ہیں۔ بالآخر چھ درجی آبل کی مساوات کا حل ایسی آبل کی کعبی مساوات کے حل پر موقوف ہوگا جس کے سر خود ایک دو درجی آبل کی مساوات کے حل پر منحصر ہیں۔

۲۴۵۔ ثنائی مساوات لاᶠ ـ ۱ = ۰ کا حل جبکہ ف ایک مفرد عدد ہو۔

اگر مساوات لاᶠ ـ ۱ = ۰ کی ایک اصل عہ ہے جو اکائی سے مختلف ہے تو تمام اصلیں سلسلہ ۱، عہ، عہ^۲، ... عہ^{ف-۱} میں شامل ہیں

اور اسلئے $\frac{لا^{ف} - ۱}{لا - ۱} = ۰$ کی اصلیں عہ، عہ^{۲}، ... عہ$^{ف-۱}$ ہیں (جلد اول دفعہ ۴۹) ۔ اب ہم ثابت کرینگے کہ ایک عدد صحیح ر ایسا دریافت کیا جا سکتا ہے کہ جب ر، ر^{۲}، ر^{۳}، ... ر$^{ف-۱}$ کو ف سے تقسیم کیا جاتا ہے تو باقی ۱، ۲، ... ، ف - ۱ (کسی ترتیب میں) حاصل ہوتے ہیں اور ر$^{ف-۱}$ کا باقی اکائی ہوتا ہے۔ اس لئے اصلوں کو عہ^{ر}، عہ$^{ر^{۲}}$، عہ$^{ر^{۳}}$، ... عہ$^{ر^{ف-۱}}$ کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے اور پھر طہ (لا) ≡ لا^{ر} لینے اور عہ^{ر} کی بجائے لا$_{۱}$ رکھنے سے اصلوں کو لا$_{۱}$، طہ (لا$_{۱}$)، طہ^{۲} (لا$_{۱}$)، ... ، طہ$^{ف-۲}$ (لا$_{۱}$) کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے

جہاں طہ$^{ف-۱}$ (لا$_{۱}$) = لا$_{۱}^{ر^{ف-۱}}$ = لا$_{۱}$

پس مساوات $\frac{لا^{ف} - ۱}{لا - ۱} = ۰$ آبل کی اس نوتہ کی مساوات ہے جس کی تمام اصلیں ایک گروہ بناتی ہیں۔

مذکورۂ بالا مسئلہ کا (یعنے اس مسئلہ کا کہ ایک صحیح عدد ر موجود ہے) جو ثبوت ہم ذیل میں دیں گے اس میں تمام حروف (302) اعداد صحیح کو تعبیر کرتے ہیں۔ ف کو مفرد عدد مان لیا گیا ہے۔ لا کے تمام تفاعل منطق اور صحیح ہیں اور ان تفاعلوں کے سر بھی صحیح اعداد ہیں۔ لا کی سب سے بڑی قوت کا سر اکائی ہے۔ اور فا (لا) ≡ قہ (لا) میں علامت ≡ اس بات کو تعبیر کرتی ہے کہ جب فا (لا) اور قہ (لا) کو عدد ف سے تقسیم کیا جاتا ہے تو باقی وہی حاصل ہوتے ہیں۔ بالخصوص فا (لا) ≡ ۰ کا مطلب

یہہ ہے کہ فا (لا) عدد ف سے ٹھیک تقسیم ہو جاتا ہے۔ یہاں لا یقیناً ایک عدد صحیح ہے۔ ایسی مساوات نماؤں (quasi equations) کو منطابقات (Congruencies) کہا جاتا ہے۔

(۱) اگر ا < ف اور ا، فا (لا) ≡ ۰ کو پورا کرے تو ا کو فا (لا) ≡ ۰ کی اصل کہتے ہیں۔ کوئی صحیح عدد ا + م ف بھی فا (لا) ≡ ۰ کو پورا کریگا کیونکہ $ا^{ن}$ ≡ $(ا + م ف)^{ن}$ اور اسلئے فا (ا) ≡ فا (ا + م ف)۔ لیکن اصطلاح فا (لا) ≡ ۰ کی اصل صرف اس عدد صحیح تک محدود ہے جو ف سے کم ہو۔

اب فا (لا) ≡ ۰ کی اصلوں کی تعداد اس کے درجہ ن سے بڑی نہیں ہے۔ کیونکہ اگر $ا_1$ کوئی اصل ہے تو فا (لا) ≡ (لا − $ا_1$) $فا_1$ (لا) + $ر_1$ اور چونکہ فا ($ا_1$) ≡ ۰، $ر_1$ ≡ ۰۔ اسلئے فا (لا) ≡ (لا − $ا_1$) $فا_1$ (لا)۔ اگر فا (لا) کی دوسری اصل $ا_2$ ہو تو $فا_1$ ($ا_2$) ≡ ۰ ہونا چاہئے اور اس لئے اوپر کی طرح $فا_1$ (لا) ≡ (لا − $ا_2$) $فا_2$ (لا)۔ اسی طرح عمل جاری رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ف (لا) ≡ ۰ کی ن اصلیں $ا_1$، $ا_2$، ...، $ا_ن$ ہوں تو فا (لا) ≡ (لا − $ا_1$) (لا − $ا_2$) ... (لا − $ا_ن$) اور اس لئے فا (لا) ≡ ۰ کی کوئی اور اصل نہیں ہو سکتی کیونکہ لا کی کوئی قیمت جو عدد ف سے کم ہو (لا − $ا_1$) (لا − $ا_2$) ... (لا − $ا_ن$) ≡ ۰ کو پورا نہیں کر سکتی۔

(ب) اگر درجۂ ن کے تفاعل فا (لا) کو درجوں ل اور (ن - ل) والے اجزائے ضربی $فا_۱$ (لا)، $فا_۲$ (لا) میں تحلیل کیا جائے اور اگر فا (لا) ≡ ۰ کی ن اصلیں ہوں تو چونکہ ہر اصل $فا_۱$ (لا) ≡ ۰ یا $فا_۲$ (لا) ≡ ۰ کو پورا کرے گی اسلئے $فا_۱$ (لا) ≡ ۰ کی ٹھیک ل اصلیں اور $فا_۲$ (لا) ≡ ۰ کی ٹھیک ن - ل اصلیں ہوں گی -

(ج) اگر ۱، ۲، ... ، ف - ۱ کو کسی عدد ا (< ف) سے ضرب دیا جائے اور ا، ۲ ا، ۳ ا، ... ، (ف - ۱) ا کو ف پہ تقسیم کیا جائے تو تمام باقی مختلف ہونگے اور اس لئے کسی نہ کسی ترتیب میں ۱، ۲، ۳، ... ، ف - ۱ کو ہونا چاہئے کیونکہ اگر ایسا نہ ہو تو ل ا - م ا = (ل - م) ا، ف سے تقسیم پذیر ہوگا جو ناممکن ہے کیونکہ ل اور م دونوں ف سے کم ہیں اور ف مفرد عدد ہے -

پس {ا، ۲ ا، ۳ ا، ... ، (ف - ۱) ا کا حاصل ضرب} - {۱، ۲، ۳، ... ... (ف - ۱) کا حاصل ضرب} ف سے تقسیم پذیر ہوگا - اسلئے

$$۱، ۲، ۳ ... (ف - ۱) (ا^{ف-۱} - ۱) ≡ ۰، \quad اسلئے \quad ا^{ف-۱} - ۱ ≡ ۰ ۔$$

اور اسلئے $لا^{ف-۱} - ۱ ≡ ۰$ کی اصلیں ۱، ۲، ۳، ... ، ف - ۱ ہیں -

(د) اگر ہم کوئی عدد ا، ف سے چھوٹا لیں اور اسلئے ا، ف کے لئے مفرد ہو کیونکہ خود ف مفرد عدد ہے تو ا، $ا^۲$، $ا^۳$، ... کو ف سے تقسیم کرنے پر باقیوں میں سے کوئی ایک حاصل ہونا چاہئے کیونکہ باقیوں کی ممکن تعداد صرف (ف - ۱) ہے - (503)

اور اسلئے $ا^{ن+ر} ≡ ا^ر$ اسلئے $ا^ر (ا^ن - ۱) ≡ ۰$، اسلئے $ا^ن - ۱ ≡ ۰$، اسلئے $ا^{ن+ر} - ا^ر ≡ ۰$ ۔

اسلئے پہلے (ن − ۱) باقی ہمیشہ اس ترتیب میں واقع ہوتے ہیں لیکن (ج) کی رو سے $ا^{ن-۱} \equiv ۰$، اسلئے ن = ف − ۱ یا ن < ف − ۱ اگر ن، ف − ۱ سے کم ہو تو ن، ف − ۱ کا مقسم ہونا چاہئے کیونکہ اگر ف − ۱ = م ن + ر جہاں ر < ن تو چونکہ $ا^{ف-۱} \equiv ۱$، $\therefore ا^{م ن} ا^{ر} \equiv ۱$ لیکن $ا^{م ن} \equiv ۱$ کیونکہ $ا^{ن} \equiv ۱$ اور اسلئے اگر $ا^{ر} \equiv ل$ تو چونکہ $ا^{م ن} ا^{ر} \equiv ۱$ اسلئے ل = ۱ اور اسلئے ن وہ کم سے کم صحیح عدد نہیں ہے جس کے لئے $ا^{ن} \equiv ۱$ ۔

اگر ا، $لا^{ن} - ۱ \equiv ۰$ کی اصل ہو مگر $لا^{م} - ۱ \equiv ۰$ (م < ن) کی اصل نہ ہو تو ا کو $لا^{ن} - ۱ \equiv ۰$ کی ابتدائی اصل کہتے ہیں اور یہ اصل ایسی ہے کہ اگر ا، $ا^{۲}$، $ا^{۳}$، . . . $ا^{ن-۱}$ کو ف سے تقسیم کریں تو باقی سب ایک دوسرے سے مختلف ہیں اور اکائی سے بھی مختلف ہیں پس مسئلہ جو ہم کو ثابت کرنا ہے یہہ ہے کہ $لا^{ف-۱} - ۱ \equiv ۰$ کی ابتدائی اصلیں موجود ہوتی ہیں ۔

(ص) ف − ۱ کو اس کے مفرد اجزائے ضربی $ف - ۱ = ق^{ل} ر^{م} س^{ن}$ میں تحلیل کرو جہاں ق، ر، س مفرد عدد ہیں چونکہ $لا^{ق^{ل}} - ۱$، $لا^{ف-۱} - ۱$ کا جزو ضربی ہے اسلئے (ب) کی رو سے اس کی $ق^{ل}$ اصلیں موجود ہیں اور اگر اسکی اصلوں میں سے کوئی $لا^{ک} - ۱ \equiv ۰$ کو پورا کریں جہاں $ک < ق^{ل}$ تو اس استدلال سے جو (د) میں کیا گیا ہے ک بھی $ق^{ل}$ کا جزو ضربی ہوگا اور چونکہ $لا^{ق^{ل}} - ۱ \equiv ۰$ ۔ اگر $لا^{ک} - ۱ \equiv ۰$ ۔ اس لئے

ایسی تمام اصلیں $\text{لا}^{\text{ق}^{\text{ل}-\text{۱}}}-\text{۱}\equiv\text{۰}$ کو بھی پورا کریں گی۔ چونکہ $\text{ق}^{\text{ل}-\text{۱}}$، ف-۱ کا جزو ضربی ہے اسلئے $\text{لا}^{\text{ق}^{\text{ل}-\text{۱}}}-\text{۱}\equiv\text{۰}$ کی $\text{ق}^{\text{ل}-\text{۱}}$ اصلیں ہیں اور اس لئے $\text{لا}^{\text{ق}^{\text{ل}}}-\text{۱}\equiv\text{۰}$ کی $\text{ق}^{\text{ل}-\text{۱}}$ اور صرف $\text{ق}^{\text{ل}-\text{۱}}$ اصلیں ایسی ہیں جو کمتر درجہ کی ثنائی متطابقوں کی بھی اصلیں ہیں اور اس لئے $\text{لا}^{\text{ق}^{\text{ل}}}-\text{۱}\equiv\text{۰}$ کی $\text{ق}^{\text{ل}}-\text{ق}^{\text{ل}-\text{۱}}$ ابتدائی اصلیں ہیں۔

(ف) اگر $\text{لا}^{\text{م}}-\text{۱}\equiv\text{۰}$ کی ابتدائی اصل ا اور $\text{لا}^{\text{ن}}-\text{۱}\equiv\text{۰}$ کی ابتدائی اصل ب ہو اور اگر م، ن ایک دوسرے کے لئے مفرد ہوں تو $\text{لا}^{\text{م ن}}-\text{۱}\equiv\text{۰}$ کی ابتدائی اصل اب ہوگی۔

فرض کرو کہ س کم سے کم وہ صحیح عدد ہے جس کے لئے $(\text{اب})^{\text{س}}-\text{۱}\equiv\text{۰}$، یعنے $\text{ا}^{\text{س}}\,\text{ب}^{\text{س}}-\text{۱}\equiv\text{۰}$، اس لئے

$\text{ا}^{\text{م س}}\,\text{ب}^{\text{م س}}\equiv\text{۱}$۔ لیکن $\text{ا}^{\text{م س}}\equiv\text{۱}$، اس لئے $\text{ب}^{\text{م س}}\equiv\text{۱}$، اسلئے م س، ن کا ایک ضعف ہے۔ اور اس لئے س، ن کا ایک ضعف ہے۔ اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے کہ س، م کا ایک ضعف ہے۔ اس لئے س، م ن کا ایک ضعف ہے۔ لیکن $(\text{اب})^{\text{م ن}}\equiv\text{۱}$، اس لئے م ن، س کا ایک ضعف ہے اور اسلئے س $=$ م ن۔

اب اگر $\text{لا}^{\text{ق}^{\text{ل}}}-\text{۱}\equiv\text{۰}$ کی ایک ابتدائی اصل ا ہے جس کے متعلق

ہم (ص) میں ثابت کر چکے ہیں کہ ایسی ایک ابتدائی اصل ضرور موجود ہونی چاہئے اور اگر $لا^{ر^م} - ۱ \equiv ۰$ کی ایک ابتدائی اصل ب ہے تو یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ $لا^{ق^ل ر^م} - ۱ \equiv ۰$ کی ایک ابتدائی اصل ا ب ہوگی مزید برین اگر $لا^{س^ن} - ۱ \equiv ۰$ کی ایک ابتدائی اصل ج ہو تو معلوم ہوتا (804) ہے کہ $لا^{ف-۱} - ۱ \equiv ۰$ کی ایک ابتدائی اصل ا ب ج ہوگی جہاں $ف - ۱ \equiv ق^ل ر^م س^ن$ ۔ اس طرح عمل کو جاری رکھنے سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ $لا^{ف-۱} - ۱ \equiv ۰$ کی ابتدائی اصلیں ہمیشہ موجود ہوتی ہیں اور اس طرح ہم یہ مسئلہ ثابت کر سکتے ہیں کہ ایک عدد ا ایسا معلوم کیا جا سکتا ہے کہ اگر $ا$، $ا^۲$، $ا^۳$، ... $ا^{ف-۱}$ کو ف سے تقسیم کیا جائے تو تمام باقی مختلف ہوتے ہیں اور آخری باقی اکائی ہوتا ہے۔

اس دفعہ کے شروع میں جو مسئلہ بیان کیا گیا ہے اسکی ایک اہم مثال وہ ہے جبکہ $ف = ۱۷$، اس لئے ثنائی مساوات $لا^{۱۷} - ۱ \equiv ۰$ کا حل یعنے اس مسئلہ کا حل کہ دائرہ میں ۱۷ ضلعوں والا منتظم کثیر الاضلاع بنایا جائے ۱۶ ویں درجہ کے آبل کی مساوات کے حل پر موقوف ہے۔ آبل کی اس مساوات کی تمام اصلیں ایک گروہ بناتی ہیں اور چونکہ $۱۶ = ۲^۴$ اسلئے دفعہ ۲۴۴ کی رو سے یہ حل دوسرے درجہ کی مساواتوں کے حل پر یعنے جذر المربع نکالنے پر منحصر ہے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ہندسی مسئلہ صرف خطوط مستقیم اور دائرے کھینچنے سے حل ہو سکتا ہے۔ یہ مساوات

جلد اول صفحہ ۱۴۹ پر دی گئی ہے اور وہاں اصلوں کی جو ترتیب دی گئی ہے عدد صحیح ۳ لینے سے حاصل ہوتی ہے کیونکہ ف = ۱۷ کے لئے ۳، مساوات لا^{16} - ۱ = ۰ کی ابتدائی اصل ہے ۔ پھر دفعہ ۲۴۴ کی طرح طہ (لا) = لا^{3} لیکر اصلوں کے گروہ بنائے جاتے ہیں ۔

۲۴۶ ۔ اگر ایک ناتحویل پذیر مساوات کی ایک اصل ایک دوسری اصل کا منطق تفاعل ہو تو دی ہوئی مساوات آبل کی مساوات ہوگی :- اگر ن ویں درجہ کی مساوات

فا (لا) = ۰ ناتحویل پذیر ہے اور اگر ایک اصل لا$_{1}$ ایک دوسری اصل لا$_{2}$ کا منطق تفاعل طہ ہے یعنی اگر لا$_{2}$ = طہ (لا$_{1}$) تو تمام اصلیں اس طرح سے مربوط ہوں گی اور مساوات آبل کی مساوات ہوگی ۔ اس کو ثابت کرنے کے لئے ہم ابدال ما = طہ (لا) کے ذریعہ مساوات فا (لا) = ۰ کو اسی درجہ کی مساوات فہ (ما) = ۰ میں مستحیل کرتے ہیں ۔ چونکہ فہ (ما) = ۰ کی ایک اصل = لا$_{2}$ اسلئے اس مساوات کی تمام اصلیں وہی ہونی چاہئیں جو مساوات فا (لا) = ۰ کی ہیں اور در اصل فہ (ما) = ۰ کو فا (لا) = ۰ کے معادل ہونا چاہئے کیونکہ اگر ایسا نہ ہو تو فا (لا) اور فہ (لا) کا مقسوم علیہ اعظم دریافت کرنے پر فا (لا) تحویل پذیر ہو جائیگا ۔ پس معلوم ہوا کہ ف (ما) = ۰ کی تمام اصلیں فا (لا) = ۰ کی بھی اصلیں ہیں اور اس لئے فا (لا) کی ہر اصل لا$_{1}$ ایک دوسری اصل لا$_{2}$ سے مساوات لا$_{2}$ = طہ (لا$_{1}$) کے ذریعہ یگانہ طور پر مربوط ہے ۔

تب لا$_{1}$ سے ابتدا کر کے ہمیں حاصل ہوتا ہے لا$_{2}$ = طہ (لا$_{1}$)، پھر ہم لیتے ہیں

$$لا_{۳} = طہ(لا_{۲}) = طہ^{۲}(لا_{۱})$$

وغیرہ یہاں تک کہ ہم کو $لا_{۱} = طہ^{ف}(لا_{۱})$ مل جاتا ہے اور اس طرح (80ظ)
ف اصلوں کا ایک دوریہ حاصل ہوتا ہے - اب چونکہ
$لا_{۱} = طہ^{ف}(لا_{۱})$ اسلئے نئے مساوات $لا = طہ^{ف}(لا)$ یا تو
ایک متماثلہ ہے یا اسکی ایک اصل $لا_{۱}$ مساوات $فا.(لا) = ۰$ میں
مشترک ہے اور چونکہ $فا(لا)$ ناتحویل پذیر ہے اسلئے
حسب سابق وہ مساوات $فا(لا) = ۰$ کے معادل ہے - پس
ہر صورت میں $لا_{۲}، لا_{۲}، \ldots، لا_{ن}$ بھی مساوات $لا = طہ^{ف}(لا)$ کو
پورا کرتے ہیں - پس اگر ہم ایک ایسی اصل $لا_{ف+۱}$ سے شروع کریں
جو مذکورۂ بالا دوریہ میں شامل نہ ہو اور $لا_{ف+۲} = طہ(لا_{ف+۱})$،
$لا_{ف+۳} = طہ(لا_{ف+۲})$ وغیرہ رکھیں تو یہ نیا دوریہ $لا_{۲ف} = طہ^{ف-۱}(لا_{ف+۱})$
پر ختم ہو جائیگا کیونکہ $لا_{ف+۱} = طہ^{ف}(لا_{ف+۱})$ - اگر اس دور میں صرف
ق اصلیں شامل ہوتیں یعنے مساوات $لا_{ف+۱} = طہ^{ق}(لا_{ف+۱})$
شامل ہوتی جہاں $ق < ف$ تو حسب سابق تمام اصلیں مساوات
$لا = طہ^{ق}(لا)$ کو پورا کرتیں اور پہلا دور $لا_{ق} = طہ^{ق-۱}(لا_{۱})$ پر ختم
ہوتا - لیکن مفروض کی بنا پر ایسا نہیں ہوتا اور اس لئے چونکہ
ق، ف سے کم یا زیادہ نہیں ہو سکتا اس لئے $ق = ف$ -
اس طرح عمل کو جاری رکھکر ہم اصلوں کو م دوریوں میں تقسیم کرتے ہیں

جن میں سے ہر دوریہ میں ف اصلیں واقع ہوتی ہیں اسلئے ن = م ف اور اسلئے مساوات آبل کی مساوات ہے - تمام دوریوں میں مختلف اصلیں شامل ہونی چاہئیں کیونکہ اگر دو دوریوں میں ایک اصل مشترک ہو تو اس کی بعد والی اصل بھی دونوں دوریوں میں مشترک ہوگی اور اس طرح بتدریج دونوں دوریوں کی تمام اصلیں مساوی ہوجائینگی اور اس لئے وہ اصل جس سے کہ دوسرا دوریہ شروع کیا گیا تھا پہلے حاصل ہوچکی ہوگی اور مفروض کی بناپر ایسا نہیں ہوتا - نیز یہ تو یقینی ہے کہ فا (لا) = . کی کوئی دو اصلیں مساوی نہیں ہیں کیونکہ مفروض کی بناپر فا (لا) = . ناتحویل پذیر ہے -

(306)

متفرق نوٹ

صفحہ ۵ ۔ ترتیب کے انقلابات کی تعداد، ان لاحقوں کی تعداد پر جو لاحقہ ۱ سے پہلے ہیں اور ان لاحقوں کی تعداد پر جو لاحقہ ۲ سے پہلے ہیں اور دو سے بڑے ہیں اور ان لاحقوں کی تعداد پر جو لاحقہ ۳ سے پہلے ہیں اور اس سے بڑے ہیں وغیرہ مشتمل ہوتی ہے پس انقلابات کی تعداد ان متصلہ انتقالات کی تعداد کے بھی مساوی ہوتی ہے جو اول لاحقہ ۱ کو پہلے مقام پر، پھر ۲ کو، پھر ۳ کو وغیرہ لانیکے لئے ضروری ہوتی ہے۔

صفحہ ۲۵ ۔ مقطعہ کا لاپلاسی پھیلاؤ۔ ہم ایک مقطعہ کو (اع، به، جه...) سے تعبیر کرتے ہیں جس کا مفہوم یہ ہے کہ پہلی صف میں اع، به، جه... ہیں، دوسری صف میں اه، به، جه، ... ہیں وغیرہ۔ اور اس لئے اع به جه ... وتری رقم ہے اور ع، ہ، جه، ... لاحقوں کی معیاری ترتیب ہے جو ضروری نہیں ہے کہ ۱، ۲، ۳، ... ہی ہو مقطعہ کے لاپلاسی پھیلاؤ کو جو صفوں اور ستونوں کی کسی تعداد سے بنے ہوئے صغیروں کی رقوم میں بیان کیا جاتا ہے ثابت کرنیکے لئے ہم تبلائیں گے کہ ∆ = (ا۱ ب۲ ج۳ د۴ ص۵ ف۶ گ۷) کو پہلے تین

ستونوں سے بنے ہوئے صغیروں کی رقوم میں پھیلایا جا سکتا ہے۔ ظاہر ہے کہ طریق عمل جو یہاں اختیار کیا گیا ہے عام صورت میں بھی استعمال ہو سکتا ہے۔ ۷ لاحقوں میں سے تین تین کو ایک مرتبہ لیکر ان کا کوئی اجتماع لو اور اس اجتماع کو ترتیب وار ا، ب، ج سے ملحق کرو اور بقیہ کو ترتیب وار د ص ف گ سے ملحق کرو۔

فرض کرو کہ اس طرح ا$_2$ ب$_5$ ج$_6$ × د$_1$ ص$_3$ ف$_4$ گ$_7$ حاصل ہوتا ہے اس رقم میں انقلابات کی تعداد اس بات پر مبنی ہے کہ ا، ب، ج کے ساتھ جو لاحقے ہیں وہ د، ص، ف، گ کے لاحقوں سے بڑے ہیں اور اس مثال میں انقلابات کی تعداد ۷ ہے۔ اب ا، ب، ج کے لاحقوں ۲، ۵، ۶ کی مختلف ترتیبیں لو اور بقیہ کو ثابت رکھو۔ اسطرح جو مزید انقلابات کا اضافہ کسی رقم مثلاً ا$_5$ ب$_6$ ج$_2$ × د$_1$ ص$_3$ ب$_4$ گ$_7$ میں ہوا ہے وہ ا$_5$ ب$_6$ ج$_2$ کو (ا$_2$، ب$_5$، ج$_6$) کی ایک رقم فرض کرنے اس میں جو انقلابات ہوئے ہیں ان کی تعداد کے مساوی ہے یعنی یہ تعداد ۲ ہے۔ ا$_5$ ب$_6$ ج$_2$ کے ساتھ علامت $(-1)^2$ رکھو تو ہم کو (ا$_2$، ب$_5$، ج$_6$) کی ایک رقم ملتی ہے۔ ۲، ۵، ۶ کی ہر ایک ترتیب سے جو رقم پیدا ہوتی ہے اس کے ساتھ یہی عمل کرنے سے اور ان سب کو جمع کرنے سے ہمکو $(-1)^ن$ (ا$_2$، ب$_5$، ج$_6$) د$_1$ ص$_3$ ف$_4$ گ$_7$ حاصل ہوتا ہے۔ اب لاحقوں ۱، ۳، ۴، ۷ کو ہر ممکنہ طریقہ پر ترتیب دینے اور (ا$_2$، ب$_5$، ج$_6$) کو ثابت رکھنے پر ۵ کی جو رقمیں ملتی ہیں ان سے حاصل ہوتا ہے $(-1)^ن$ (ا$_2$، ب$_5$، ج$_6$) (د$_1$، ص$_3$، ف$_4$، گ$_7$) ۔ (307)

، لاحقوں میں تین تین لینے پر ہر اجتماع سے دو صغائر کا ایک متشابہ حاصل ضرب ملے گا اور اس کے ساتھ علامت $(-1)^m$ ہوگی جہاں م ان انقلابات کی تعداد ہے جو اس وجہ سے حاصل ہوتے ہیں کہ ا، ب، ج کے لاحقے د، ص، ف، گ کے لاحقوں سے بڑے ہیں

صفحہ ۴۴ ۔ نتیجہ کہ ایک مقطعہ Δ جو دفعہ ۱۴۱ کے طور پر لکھا جاتا ہے دو مقطعوں کا حاصل ضرب ہے حسب ذیل طریقہ پر ثابت کیا جا سکتا ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ تمام عہ تمام ا سے ضرب کھاتے ہیں، تمام ہہ تمام ب سے ضرب کھاتے ہیں وغیرہ۔ ایک انتصابی ستون کو جو ب۱ ہہ۱، ب۲ ہہ۲، ب۳ ہہ۳ کی جیسی رقموں سے بنتا ہے ہم متشابہ ارقام کا انتصابی ستون کہیں گے۔ اگر ہم Δ کے پہلے ستون سے متشابہ انتصابی رقموں کا ایک ستون لیں تو ہم کو اسکے ساتھ Δ کے بعد والے ستون سے متشابہ ارقام کا غیر متشابہ ستون لینا چاہئے اور پھر Δ کے تیسرے ستون سے متشابہ رقموں کا ایک ایسا ستون لینا چاہئے جو گزشتہ دو ستونوں کے غیر متشابہ ہو۔ اور علیٰ ہذا القیاس۔ اس طرح بنے ہوئے مقطع میں جس میں (عہ۱ ہہ۲ جہ۳) کی ایک رقم سے ضرب کھایا ہوا مقطع (ا۱، ب۲، ج۳) بطور جزو ضربی کے شامل ہے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ستونوں کو (ا۱، ب۲، ج۳) کے ستون فرض کیا جائے تو ستونوں کی ترتیب میں ہر انقلاب کے ساتھ (عہ۱، ہہ۲، جہ۳) کے رقم کے لاحقوں میں متشابہ انقلاب ہو جاتا ہے اور اس لئے (ا۱ ب۲ ج۳) حاصل کرنیکے لئے ستونوں کے متصلہ انتقالات کی تعداد ٹھیک وہی ہے جو (عہ۱، ہہ۲، جہ۳) کی رقم کو مناسب علامت کے ساتھ حاصل کرنے کے لئے ضروری ہے۔ اس طرح (عہ۱، ہہ۲، جہ۳) کی ہر رقم مناسب

علامت کے ساتھ اور ($ا_۱$، $ب_۲$، $ج_۳$) سے ضرب کھائی ہوئی حاصل ہوتی ہے اور ہم دیکھتے ہیں کہ Δ = ($ا_۱$، $ب_۲$، $ج_۳$) ($ع_۱$، $ب_۲$، $ج_۳$)۔
عام صورت میں بھی ثبوت کے لئے متشابہ طریقہ استعمال کیا جا سکتا ہے۔
صفحہ ۱۳۸ - اگر ع = ۰ اور و = ۰ کی دو اصلیں عہ، بہ مشترک ہوں تو

چونکہ عہ $\frac{\text{جف ر}}{\text{جف ا}_{\text{ق}}} = \frac{\text{جف ر}}{\text{جف ا}_{\text{ن}+1}}$ اور بہ $\frac{\text{جف ر}}{\text{جف ا}_{\text{ق}}} = \frac{\text{جف ر}}{\text{جف ا}_{\text{ن}+1}}$ اسلئے (عہ - بہ) $\frac{\text{جف ر}}{\text{جف ا}_{\text{ق}}} = ۰$

اسلئے $\frac{\text{جف ر}}{\text{جف ا}_{\text{ق}}} = ۰$۔ اور اسلئے $\frac{\text{جف ر}}{\text{جف ا}_{\text{ن}+1}} = ۰$۔ کیونکہ عہ $\frac{\text{جف ر}}{\text{جف ا}_{\text{ق}}} = \frac{\text{جف ر}}{\text{جف ا}_{\text{ن}+1}}$

نوٹ ا

مقطعات

کوشی[1] نے اُن جملوں کو جو تیرھویں باب کا موضوع ہیں Determinants " کا نام دیا تھا۔ یہ نام اُس نے گاس[2] کی تحریروں سے اخذ کیا جس نے اسکو ان تفاعلوں کی بعض خاص جماعتوں کیلئے یعنی ثنائی اور ثلاثی دو درجی شکلوں کے ممیزوں کے لئے استعمال کیا تھا۔ اگرچہ لیبنیز[3] نے ۱۶۹۳ء میں اُن جملوں کی خصوصیت کا شاہدہ کرلیا تھا جو خطی مساواتوں کے حل سے پیدا ہوتے ہیں لیکن اس مضمون میں کوئی مزید ترقی نہیں ہوئی تا آنکہ کریمر (Cramer) کو ۱۷۵۰ء میں منحنیوں کی تحلیل کے سلسلہ میں ایسے تفاعلوں کا مطالعہ کرنا پڑا۔ دفعہ ۱۲۸ میں علامتوں کا جو قاعدہ بیان ہوا ہے اسی نے دریافت کیا تھا۔ اٹھارھویں صدی کے آخری حصہ میں بیزد (Bezout)، لاپلاس، وانڈر مانڈ، اور لگرانج کی مشقتوں نے اس مضمون میں مزید توسیع کی۔ انیسویں صدی کے ابتدائی زمانہ میں ریاضی کی اس شاخ کی نشو و نما گاس اور کوشی کے ہاتھوں ہوئی، قبل الذکر نے علاوہ ان تحقیقاتوں کے جو دو درجی اشکال کے ممیزوں سے متعلق ہیں دوسرے اور تیسرے رتبہ کی مخصوص صورتوں میں یہ ثابت کیا کہ دو مقطعوں کا حاصل ضرب خود ایک مقطع ہوتا ہے۔ کوشی نے سب سے اول اس مضمون پر ایک باضابطہ کتاب لکھکر دنیائے ریاضی پر ایک احسان کیا۔ متبادلہ تفاعلوں پر اپنے ایک مقالہ (Journal de l Ecole polytechnique) میں جو جلد دہم میں شائع ہوا مقطعات پر بحث کرتے ہوئے وہ کہتا ہے کہ مقطعات، مذکورہ

(308)

ا؎ Cauchy ٢؎ Gauss ٣؎ Leibnitz

بالاتفاعلوں کی ایک مخصوص جماعت ہے اور نیز ان سے متعلق کئی اہم عام مسئلے ثابت کرتا ہے ۔ جیکوبی کے مضامین (جو Crelle کے جرنل میں نکلے) اور اس کے مقالوں نے (جو ۱۸۴۱ء میں شائع ہوئے) ان جملوں کے مطالعہ کو بڑی تقویت پہنچائی ۔ اس سے زیادہ قریب زمانہ میں جن علما، ریاضی نے اس مضمون کی توسیع اور اس میں اضافہ کیا ہے انہیں سے Cayley، Joachimsthal، Hesse، Hermite، Brioschi، Sylvester اور (Salmon) قابل ذکر ہیں ۔ اب ریاضی کا کوئی نظری یا عملی شعبہ ایسا نہیں ہے جسمیں مقطعات کے استعمال سے بڑی مدد نہ ملتی ہو ۔ ان کے استعمال سے معلومہ خواص کو دکھانے میں نہ صرف اختصار ونفاست پیدا ہوتی ہے بلکہ علم ریاضی میں نئے انکشافات بھی ہوتے ہیں جدید تصنیفات میں جن سے طالب علم استفادہ کرسکتا ہے حسب ذیل قابل ذکر ہیں :۔

1- Spottiswoode's *Elementary Theorems relating to determinants*, London, 1851,

2- Brio'schi's *La teoriea dei Determinants*., Pavia, 1854

3- Baltzer's *Theorie und Anwendung der Determinanten*, Leipzig, 1864

4- Dostor's *Elements de la Theoriedes Determinants*, Paris, 1877

5- Scott's *Theory of Determinants*, Cambridge, 1880

6- Salmon's *Lessons Introduotry to The Modern Higher Algebra*, Dublin 1876

اس مضمون کی تاریخ (History) میں مزید معلومات حاصل کرنے کے لئے ناظر کو Muir's *Theory of Determinants in the Historical order of its development*, London, 1890) کا مطالعہ کرنا چاہیئے ۔ سامن کی Higher Algelra میں بھی حواصل استقاط، غیر متغیرات، ہم متغیرات، اور خطی استحالات پر اور نیز مقطعات پر اجمالی تاریخی معلومات بہم پہنچائے گئے ہیں ۔

(309)

نوٹ (ب)

مخلوط اشکال

ہم یہاں اٹھارھویں باب کے ضمیمہ کے طور پر دو چار درجیوں ع اور و کے ہم روتفاعلوں کی تعداد درج کرتے ہیں ۔ اس مقصد کے لئے (۱، ۲)^پ فہ پہ کی بجائے ترقیم (فہ، پہ)^پ کا استعمال کرنا موجب سہولت ہوگا جبکہ متغیروں کے درمیان امتیاز اٹھا دیا جائے۔ اِس ترقیم کی رُو سے سولہ ہم رویہ ہیں (ع، و)^پ، (ع، ھَ)^پ، (و، ھ)^پ، (ھ، ھَ)^پ جہاں پ کی قیمتیں ۱، ۲، ۳، ۴ ہیں، یعنی بارہ ہم متغیر اور چار غیر متغیر، لیکن اِن میں سے سلوسٹر نے (ھ، ھَ)، (ھ، ھَ)^۲ کو تحویل کیا ہے اور اس طرح صرف دس غیر تابع ہم متغیر اس طریقہ سے حاصل ہوتے ہیں؛ تاہم چار دو درجی ہم متغیر (گ، و)^۲، (گَ، ع)^۲، (ھ، گَ)^۲، (ھَ، گ)^۲ کو انہیں شامل کرنا ہوگا۔ پس اس نظام کے چودہ خاص ہم متغیر ہیں (گارڈن، Math. Ann. II. 275.)۔

اس فہرست میں وہ پانچ شکلیں جمع کرنی ہیں جو ہر چار درجی سے علٰحدہ علٰحدہ طور پر متعلق ہیں یعنے عَ لا، ھَ لا، گَ لا، عَ لا، جَ اور وَ، ھَ لا، گَ لا، عَ لا، جَ ۔ پس کل اٹھائیس شکلیں ہیں جو حسب ذیل طریقہ پر بنی ہیں :۔ آٹھ غیر متغیر، آٹھ دو درجی، سات چار درجی، اور پانچ چھہ درجی ہم متغیر ۔ دو ثنائی چار درجیوں کا نظریہ، تین ثلاثی چار درجیوں کے نظریہ میں ایک مخصوص صورت کے طور پر تحویل ہوسکتا ہے ۔ دیکھو کوارٹرلی جرنل آف میتھامیاٹکس جلد دہم صفحہ ۲۳۹ ۔

ذیل کی جدول میں مخلوط نظاموں کی شکلوں کی تعداد ۱، ۱ سے ۴، ۴ تک درج ہے :۔

۰	۱	۲	۳	۴
۱	۳	۵	۱۳	۲۰
۲		۶	۱۵	۱۸
۳			۲۶	۲۱
۴				۲۸

نوٹ (ج)

پانچ درجی اور اسکے ہم رو

گارڈن نے غیر تابع ہم رووں کی تعداد تئیس (۲۳) مقرر (310)
کی ہے جنکی فہرست یہ ہے :- پہلے چودہ یعنے چار غیر متغیر ' چار
خطی ہم متغیر ' تین دو درجی ہم متغیر ' اور تین کعبی ہم متغیر جو
دوسرے درجہ کے ہم متغیر ع لا اور تیسرے درجہ کے ہم متغیر
جے لا کو ایک علحدہ مخلوط نظام سمجھ کر دفعہ ۱۹۱ کے طریقہ پر اس نظام سے
اخذ کئے گئے ہیں - دفعہ مذکورہ میں جو تعداد (یعنے پندرہ ' یہ وہ تعداد
ہے جو مخلوط نظام کی تحویل پذیر شکلوں کی ہے) حاصل ہوئی تھی اس سے
ایک کم اس صورت میں واقع ہوتی ہے کیونکہ ع لا اور جے لا کا
حاصل ۲ (ع لا ' جے لا) وہی ہے جو جے لا کا ممیز ۵ (جے لا) ہے
ان دونوں سے ایک ہی غیر متغیر ' بارہویں رتبہ کا ' حاصل ہوتا ہے
ان چودہ ہم رووں کے علاوہ باقی نو کی تعریف حسب ذیل کیگئی ہے جسمیں
ک لا ' جے لا کے ہیسوی کو تعبیر کرنے کے لئے استعمال ہوا ہے :-

چار درجی ہم متغیر :- ع (ھ لا)ع = ق لا ' جے (ع لا ' ق لا) '

پانچ درجی ہم متغیر:- ۔ ع$_{۷}$، ج(ع$_{۷}$، ع$_{۷}$)، ج(ع$_{۷}$، ک$_{۷}$)،

چھہ درجی ہم متغیر:- ۔ ھ$_{۷}$، ج(ع$_{۷}$، ھ$_{۷}$)،

سات درجی ہم متغیر:- ج(ھ$_{۷}$، ج$_{۷}$)،

نو درجی ہم متغیر:- ج(ع$_{۷}$، ھ$_{۷}$)،

مذکورۂ بالا نتائج جدولِ ذیل میں اکٹھے کئے گئے ہیں جسمیں پ سے مراد متغیروں کا درجہ ہے، ھ سے پانچ درجی کے سروں کا رتبہ، اور ن سے ہر درجہ کے ہم روؤں کی تعداد:-

پ	ھ				ن
۰	۴	۸	۱۲	۱۸	۴
۱	۵	۷	۱۱	۱۳	۴
۲	۲	۶	۸		۳
۳	۳	۵	۹		۳
۴	۴	۶			۲
۵	۱	۳	۷		۳
۶	۲	۴			۲
۷	۵				۱
۹	۳				۱

(311) غیر متغیروں کی ان تعریفات کو جو کلیبش[ل] اور گارڈن نے دی ہیں اور جو مساوات ذیل سے واضح ہیں (دیکھو دفعہ ۱۹۰) اختیار کرنے سے گارڈن نے پانچ درجی کے چار غیر متغیروں کے درمیان حسب ذیل رابطہ قائم کیا ہے:-

[ل] Clebsch.

$-بج^{۲}(ع_{لا}، ک_{لا}) = ع_{۴}ک_{لا}^{۲} - ۲ع_{۸}ع_{لا}ک_{لا} + ع_{۱۲}ع_{لا}^{۲}$ ،

نیز $\frac{۱}{۳}\, ع_{عف}(بج_{لا}) = ل_{لا} \equiv ل_{۰}\,لا + ل_{۱}\,ما$

اب $ع_{لا}، ک_{لا}$ میں اور $بج\,(ع_{لا}، ک_{لا})$ میں لا اور ما کی بجائے $ل_{۱}$ اور $-ل_{۰}$ درج کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ

$-ع_{۱۸}^{۲} = ف\,(ع_{۴}، ع_{۸}، ع_{۱۲})$ ،

کیونکہ $۳\,(ع_{لا}، ل_{لا}) = ۱۲\,ع_{۱۲} - ۱۶\,ع_{۴}ع_{۸}$ ،

$۳\,(ک_{لا}، ل_{لا}) = ع_{۸}^{۲} - ع_{۴}ع_{۱۲}$

اس طرح $ع_{۱۸}$ معین ہو جاتا ہے اور اسکا مربع دوسرے غیر متغیروں کی رقوم میں جو معوج نہیں ہیں بیان ہو جاتا ہے ۔

نوٹ (د)

چھہ درجی اور اِسکے ہم رو

چھہ درجی کی چھبیس شکلوں میں سے پہلی سولہ، $\text{ل}_{۱۱}$ اور $\text{ع}_{۱۱}$ کو ایک مخلوط نظام کے طور پر لینے سے حاصل ہوتی ہیں (دفعہ ۲۱۷)

اس طریقہ سے تمام غیر متغیر، دو درجی ہم متغیر اور چار درجی ہم متغیر حاصل ہوتے ہیں۔ بالعموم چار درجی اور دو درجی کے مخلوط نظام میں اٹھارہ شکلیں ہوتی ہیں، لیکن اِس خاص صورت میں سروں کی نوعیت کی وجہہ سے، غیر متغیر $\text{د}_{۱}$ جو چھہ درجی کا غیر متغیر $\text{ع}_{۸}$ ہے غیر متغیروں $\text{ع}_{۲}$، $\text{ع}_{۴}$، $\text{ع}_{۶}$ کی رقوم میں شکل $\text{ع}_{۸} = \text{ف}\,\text{ع}_{۴}^{۲} + \text{ق}\,\text{ع}_{۲}\,\text{ع}_{۶}$ کے ذریعہ بیان ہو سکتا ہے، نیز $\text{ع}_{۱۱}$ کا چھہ درجی ہم متغیر اُن شکلوں میں تحویل ہو سکتا ہے جو تعداد ذیل میں واقع ہوتی ہیں۔

یہ معلوم رہے کہ یہ تمام اشکال متغیروں میں جفت ہیں کیونکہ ن ــ ۲ ک چھہ درجی کے لئے جفت ہے۔

حسب ذیل فہرست سے ہم متغیروں کی کل تعداد معلوم ہو گی:۔

دو درجی ہم متغیر :۔ $\text{ل}_{۱۱} \equiv \text{ع}_{\text{عف}}(۶)$، $\text{م}_{۱۱} \equiv \text{ل}_{\text{عف}}(\text{ع}_{۱۱})$، $\text{ت}_{۱۱} \equiv \text{م}_{\text{عف}}(\text{ع}_{۱۱})$،

بے (ل، م)، بے (ل، ن)، بے (م، ن)،

چار درجی ہم متغیر :- ع، ھ (ع،)، بے (ع، ل)، بے (ع، م)،
بے (ع، ن)،

چھہ درجی ہم متغیر :- ع، بے، بے (ع، ل)، بے (ع، م)، بے (بے، ل)

آٹھہ درجی ہم متغیر :- ھ، بے (ع، ع)، بے (ھ، ل)،

دس درجی ہم متغیر :- بے (ع، ھ)

بارہ درجی ہم متغیر :- گ

(312) ان نتائج کو جدولِ ذیل میں اکٹھا کیا گیا ہے جس میں پ، ہم رو کا درجہ ہے، ھ سروں کا رتبہ، اور ن ہر قسم کے ہم رووں کی تعداد :-

ن	ھ						پ
۵		۱۵	۱۰	۶	۴	۲	۰
۶	۱۲	۱۰	۸	۷	۵	۳	۲
۵		۹	۷	۵	۴	۲	۴
۵		۶	۶	۴	۳	۱	۶
۳				۵	۳	۲	۸
۱						۴	۱۰
۱						۳	۱۲

ع اور ل کے مخلوط نظام کا معوج غیر متغیر ۳۲۱ (دفعہ ۲۱۷)

چھہ درجی کا معوج غیر متغیر Δ_{15} ہونے کی وجہ سے اسکا مربع اسی طرح چھہ درجی کے غیر متغیروں (جنکا درجہ جفت ہے) کی رقوم میں بیان ہوسکتا ہے۔

یہ امر دیکھنے کے قابل ہے کہ متغیروں میں چھٹے درجہ کے اور دسویں رتبہ کے دو ہم متغیر ہیں، یہ پہلی مثال ہے جسمیں ثنائی نظام کے دو غیر تحویل پذیر نیم غیر متغیر ہیں جنکا رتبہ اور وزن ایک ہی ہے۔

یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ اگر دو درجی ہم متغیروں میں سے کسی تین کی ثلاثی شکل کو حوالے کے خطوط کے طور پر لیا جائے تو چھہ درجی ایک کعبی اور مخروطی کے مخلوط نظام سے اس طرح تعبیر ہوگا کہ دونوں منحنیوں کی مساوات کا ہر ایک سر چھہ درجی کا ایک غیر متغیر ہوگا۔

نوٹ (ع)

دفعہ ۲۰۸ کے اصولوں کی توضیح کے لئے اور اُن غیر متغیروں کی توجیہ کے لئے جو خطی طور پر تو غیر تابع ہیں مگر جبری طور پر غیر تابع نہیں ہیں ہم چند مثالیں دیتے ہیں جو اس جلد کے مختلف مقامات سے لی گئی ہیں ۔

(۱) دو کعبیوں کی صورت میں (دفعہ ۱۹۲) لہ، مہ، لہَ، مہَ کو (313)
ساقط کرنیکے لئے نو مساواتیں بشمول مساوات لہ مہَ - لہَ مہ = مد ہیں، پس پانچ غیر متغیر ہیں جو جبری طور پر مکمل فہرست بناتے ہیں، کیونکہ دفعہ ۱۹۲ کے اجتماعیات ف اور ق کو انکا مربع لینے سے اُن پانچ غیر متغیروں کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے جنکا وزن جفت ہے (مقابلہ کرو مثال ۲۹ صفحہ ۳۴۹) - اسلئے یہ معلوم ہو گیا کہ گو خطی طور پر غیر تابع غیر متغیر سات ہیں لیکن صرف پانچ جبری طور پر غیر تابع ہیں ۔

(۲) پانچ درجی کی صورت میں (دیکھو نوٹ ج) لہ، لہَ، مہ، مہَ کو ساقط کرنے کے لئے سات مساواتیں ہیں جنمیں سے تین جبری طور پر غیر تابع، غیر متغیر حاصل ہوتے ہیں۔ چار خطی طور پر غیر تابع متغیروں میں سے ایک کو اس کا مربع لیکر باقی دوسروں کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے، کیونکہ

$$\text{ع}_{۱۸}^{۲} = \text{ف}\,(\text{ع}_{۴}\text{، ع}_{۸}\text{، ع}_{۱۲})$$

(۳) چھہ درجی کی صورت میں لہ، مہ، لہَ، مہَ کو ساقط کرنیکے لئے

آٹھ مساواتیں ہیں جن سے چار جبری طور پر غیر تابع غیر متغیر حاصل ہوتے ہیں۔ لیکن چھ درجی کے پانچ خطی طور پر غیر تابع غیر متغیر ہوتے ہیں جنمیں شکل

$$ع^{۲}_{۱۵} = ف\,(ع_{۲}،\ ع_{۴}،\ ع_{۶}،\ ع_{۱۰})$$

کا ایک ربط ہے جہاں $ع_{۱۵}$ وہ معوج غیر متغیر ہے جو دو درجی $ع_{لا}$ اور چار درجی $ل_{لا}$ (نوٹ د) کے مخلوط نظام سے حاصل ہوتا ہے، اور اوپر کی مساوات میں اس کے مربع کو دوسرے غیر متغیروں کی رقوم میں جن کا وزن جفت ہے بیان کیا گیا ہے (دفعہ ۲۱۷)۔

ثنائی کثیر درجی کے مطلق غیر متغیروں پر ہندسی نکتہ نگاہ سے غور کرنا سبق آموز ہے۔ اگر ان اصلیں یہ ہوں

$$عہ،\ بہ،\ جہ،\ غہ_{۱}،\ غہ_{۲}،\ \ldots\ldots،\ غہ_{ن-۳}$$

تو ن-۳ غیر تابع غیر موسیقی نسبتیں ہونگی جنکو حسب ذیل طریق پر تعبیر کیا جا سکتا ہے:-

$$(عہ،\ بہ،\ جہ،\ غہ_{۱})،\ (عہ،\ بہ،\ جہ،\ غہ_{۲})،\ \ldots،\ (عہ،\ بہ،\ جہ،\ غہ_{ن-۳})$$

تمام غیر موسیقی نسبتیں انکی رقوم میں ناطق طور پر بیان کیجا سکتی ہیں اور چونکہ وہ کسی خطی استحالہ سے نہیں بدلتیں (دفعہ ۳۸ جلد اول) اسلئے وہ ن-۳ غیر تابع غیر منطق، مطلق غیر متغیر ہیں۔ یہ نتیجے ان (ن+۱) مساواتوں سے نکلنے چاہئیں جو پرانے اور نئے سروں $ل_{۰}،\ ل_{۱}،\ ل_{۲}،\ \ldots،\ ل_{ن}$ اور $ل'_{۰}،\ ل'_{۱}،\ \ldots،\ ل'_{ن}$ کو مربوط کرتی ہیں، کیونکہ وہ کثیر درجی کے ہر خطی استحالہ کے عام نتیجوں پر خواہ وہ کسی طرح بیان کئے گئے ہوں حاوی ہیں۔

تمت

اشاریہ

مساواتوں کا نظریہ جلد دوم

(اعداد سے صفحات کا حوالہ دیا گیا ہے)

۴۸۶
۹۲

اصطلاحات
مساواتوں کا نظریہ جلد دوم

Abelian equations	ابل کی مساواتیں
Alternants	متبادلات
Alternate group	متبادلہ گروہ
Alternating functions	متبادل تفاعل
Associative law	ائتلافی کلیہ
Auxiliary functions	امدادی تفاعل
Binary	ثنائی
Binomial	ثنائی، دو رقمی
Canonizant	قانونیہ
Circulants	مستدیرات
Circular substitution	دائری ابدال
Co-factor	ہم جزو ضربی
Column	ستون
Combinant	اجتماعیہ
Combined forms	مجتمع (مخلوط) شکلیں
Concomitant	ہم رو

Conjugate group	مزدوج گروہ
Constituents	اجزائے ترکیبی
Continuants	مسلسلات
Contragredient	ضد استحالہ
Contravariant	ضد متغیر
Covariant	ہم متغیر
Cycle	دوریہ
Determinant	مقطع
Development of a determinant	مقطع کا پھیلاؤ
Dialytic method	بین تحلیلی طریقہ
Difference-product	فرقی حاصل ضرب
Discriminant	ممیزہ
Domain	علاقہ، احاطہ
Elements	عناصر
Eleminant	حاصل اسقاط
Elemination	اسقاط
Emanants	مستخرجات
Equianharmonic	مساوی غیر موسیقی
First minor	پہلا صغیر
Galois function	گیلوا تفاعل
Group	گروہ
Hessian	ہیسوی
Homologous	ہم وصف
Homology	ہم وصفیت
Invariant	غیر متغیر

Invariant sub-group	غیر متغیر تحت گروہ
Inversion	انقلاب
Jacobian	جیکوبی
Leading constituents	فائق یا صدر عناصر
Leading term	فائق یا صدر رقم
Lemma	تمہیدیہ
Magic-square	طلسمی مُربع
Method of least squares	اقل مربعوں کا طریقہ
Minor determinant	صغیر مقطع
Modulus of Transformation	استحالہ کا مقیاس
Multinomial Theorem	کثیر رقمی مسئلہ
Multiple-valued function	کثیر قیمتی تفاعل
Operator, D	عامل عف
Order	رتبہ
Orthogonal Transformation	قائم استحالہ
Partial differential coefficients	جزوی تفرقی سر
Partial fractions	جزوی کسور
Pencil of lines	خطوط کی پنسل
Polynomial	کثیر رقمی
Principal term	صدر رقم
Quintuple factor	پنچہرہ جزو ضربی
Rational domain	منطق احاطہ (علاقہ)
Reciprocal determinant	متکافی مقطع
Reciprocity	متکافیت
Rectangular array	مستطیلی آراستہ

Resolvent	محلل
Resultant	حاصل اسقاط
Row	صف
Semicovariant	نیم ہم متغیر
Seminvariant	نیم غیر متغیر
Sextic	چھ درجی
Similar substitution	متشابہ ابدال
Skew invariant	معوج غیر متغیر
Skew determinant	معوج مقطع
Skew-symmetric determinant	معوج متشاکل مقطع
Source	ماخذ
Sub-group	تحت گروہ
Substitution	ابدال
Symmetric determinant	متشاکل مقطع
Symmetric function	متشاکل تفاعل
Symmetric group	متشاکل گروہ
Ternary	ثلاثی
Transitive group	متعدی گروہ
Transposition	تبادل
Trinomial form	سہ رقمی شکل
Weight	وزن
Zero-axial determinant	صفر محوری مقطع

ترقیم

مساواتوں کا نظریہ

جلد اول و جلد دوم

$f(x),\ \phi(x),\ F(x),\ f_1(x), \ldots f_n(x),\ \psi(x),\ \chi(x)$, etc.

ف(لا)، فہ(لا)، فا(لا)، ف۱(لا)،...، فن(لا)، پہ(لا)، خہ(لا)، وغیرہ

مشتق تفاعیل: ف'(لا)، ف''(لا)، ف'''(لا)، ... ، فن(لا)

$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x), \ldots\ldots f^{n}(x)$.

فر ما / فر لا ، فر۲ ما / فر لا۲ ، فر۳ ما / فر لا۳ ، .... ، فرن ما / فر لان ....

$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots\ldots \frac{d^ny}{dx^n}$

جف ع / جف لا ، جف ع / جف ما ، جف۲ ع / جف ما۲ ، جف۲ ع / جف لا۲ ، جف۲ ع / جف لا جف ما ، .... ، جفن ع / جف مان

$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \ldots\ldots \frac{\partial^n u}{\partial y^n}$.

$D = a_0\frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1\frac{\partial}{\partial a_2} + 3a_2\frac{\partial}{\partial a_3} + \cdots + na_{n-1}\frac{\partial}{\partial a_n}$	عف = ا. جف/جف ا۱ + ۲ ا۱ جف/جف ا۲ + ۳ ا۲ جف/جف ا۳ + ۰۰۰۰ + ن ان-۱ جف/جف ان
Polynomials:	**کثیر الارقام:**
$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$	ا. لان + ا۱ لان-۱ + ا۲ لان-۲ + ۰۰۰ + ان-۱ لا + ان ،
$x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}x + b_n$	لان + ب۱ لان-۱ + ب۲ لان-۲ + ۰۰۰ + بن-۱ لا + بن ،
$a_0x^n + na_1x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$	ا. لان + ن ا۱ لان-۱ + ن(ن-۱)/۲⌋ ا۲ لان-۲ + ۰۰۰۰۰ + ان
$A_0y^n + A_1y^{n-1} + A_2y^{n-2} + \cdots + A_n$	آ. مان + آ۱ مان-۱ + آ۲ مان-۲ + ۰۰۰ + آن
Cubic:	**کعبی:**
$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0$	ا. لا۳ + ۳ ا۱ لا۲ + ۳ ا۲ لا + ا۳ = ۰ ،
$x^3 + px^2 + qx + r = 0$	لا۳ + ف لا۲ + ق لا + ر = ۰ ،
$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0.$	ا لا۳ + ۳ ب لا۲ + ۳ ج لا + د = ۰ ،
$A_0y^3 + 3A_1y^2 + 3A_2y + A_3 = 0$	آ. ما۳ + ۳ آ۱ ما۲ + ۳ آ۲ ما + آ۳ = ۰ ،

$a_0 a_2 - a_1^2 \equiv H.$	$ا_۰ ا_۲ - ا_۱^۲ \equiv ھ$ ،
$a_0 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3 = G.$	$ا_۰ ا_۳ - ۳ ا_۰ ا_۱ ا_۲ + ۲ ا_۱^۳ \equiv گ$ ،
$z^3 + 3Hz + G = 0$	$ی^۳ + ۳ ھ ی + گ = ۰$ ،
$z = \sqrt[3]{f} + \sqrt[3]{q}$	$ی = \sqrt[۳]{ف} + \sqrt[۳]{ق}$
$a_0^2 a_3^2 - 6 a_0 a_1 a_2 a_3 + 4 a_1^3 a_3$	$ا_۰^۲ ا_۳^۲ - ۶ ا_۰ ا_۱ ا_۲ ا_۳ + ۴ ا_۱^۳ ا_۳$
$-3 a_1^2 a_2^2 = \Delta.$	$- ۳ ا_۱^۲ ا_۲^۲ = \Delta$ ،
Quartic:	چار درجی:
$a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + 6 a_2 x^2$	$ا_۰ لا^۴ + ۴ ا_۱ لا^۳ + ۶ ا_۲ لا^۲$
$+ 4 a_3 x + a_4 = 0.$	$+ ۴ ا_۳ لا + ا_۴ = ۰$ ،
$x^4 + f x^3 + q x^2$	$لا^۴ + ف لا^۳ + ق لا^۲$
$+ r x + s = 0.$	$+ ر لا + س = ۰$ ،
$a x^4 + 4 b x^3 + 6 x^2$	$ا لا^۴ + ۴ ب لا^۳ + ۶ لا^۲$
$+ 4 d x + s = 0$	$+ ۴ د لا + س = ۰$ ،
$a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2 \equiv I$	$ا_۰ ا_۴ - ۴ ا_۱ ا_۳ + ۳ ا_۲^۲ \equiv ع$
$a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2$	$ا_۰ ا_۲ ا_۴ + ۲ ا_۱ ا_۲ ا_۳ - ا_۰ ا_۳^۲$
$- a_1^2 a_4 - a_2^3 \equiv J.$	$- ا_۱^۲ ا_۴ - ا_۲^۳ \equiv ج$ ،

$$z^4 + 6Hz^2 + 4Gz + a_0^2 I - 3H^2 = 0$$

$$\text{ی}^{۴} + ۶\,\text{ھ}\,\text{ی}^{۲} + ۴\,\text{گ}\,\text{ی} + \text{ا}^{۲}\,\text{ع} - ۳\,\text{ھ}^{۲} = ۰ ،$$

$$z = \sqrt{f} + \sqrt{q} + \sqrt{r}.$$

$$\text{ی} = \sqrt{\text{ف}} + \sqrt{\text{ق}} + \sqrt{\text{ر}} ،$$

x, y, z	لا، ما، ی
X, Y, Z	لا، ما، ے
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$	عہ، بہ، جہ، ضہ
p, q, r, s, t	پ یا ف، ق، ر، س، ت
P, Q, R, S, T	پ یا ف، ق، ر، س، ت
h, k	ھ، ک
$1, \omega, \omega^2$	ا، سہ، سہ^{۲}
l, m, n	ل، م، ن
L, M, N	ل، م، ن
λ, μ, ν	لہ، مہ، نہ
u, v, w	ع، و، ط
U, V, W	ع، و، ط
$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n.$	عہ$_{۱}$، عہ$_{۲}$، عہ$_{۳}$، ...، عہ$_{ن}$
$\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$	طہ، طہ$_{۱}$، طہ$_{۲}$، طہ$_{۳}$ ...،
$\Sigma, \Pi, <, >$	Σ، Π، $>$، $<$ ،
Q (Quotient)	ق (خارج قسمت)
R (Remainder)	ر، ب (باقی)
$H_x, G_x.$	ھ$_{\text{لا}}$، گ$_{\text{لا}}$

سم ، بم	s_m , p_m
▽ ، △	∇ , Δ
صہ ، شہ	ε , σ
ھ	ϖ
مف	δ
جف ع / جف ما	$\frac{\partial u}{\partial y}$
فہ ، پہ ، طہ	ϕ , ψ , θ
ی = لا + خ ما (ملتف متغیر)	$z = x + iy$ (Complex variable).
مق (مقیاس)	mod. (modulus.)
سعت	am (amplitude.)
ا + خ ب	$a + ib$
= مہ (جم عہ + خ جب عہ)	$= \mu(\cos a + i \sin a)$
سف = Σ عہ^ف = عہ۱^ف + عہ۲^ف + … + عہن^ف ،	$s_p = \Sigma a^p = a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p$.
ع = ام لا^م + ام-۱ لا^م-۱ + … + ا. = ۰ ،	$U = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_0 = 0$
و = بن لا^ن + بن-۱ لا^ن-۱ + … + ب. = ۰ ،	$V = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_0 = 0$

$$\pm R = a_0^n b_0^m \prod (\alpha_p - \beta_q)$$ ± ر = اِ^ن بَ^م ∏ (عِ_ق − بِ_ق)

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)(x, y)^n.$$ (اِ، اِ_۱، اِ_۲، ... اِ_ن)(لا، ما)^ن

Determinants: مقطعات:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

| ا۱ ب۱ ج۱ |
| ا۲ ب۲ ج۲ |
| ا۳ ب۳ ج۳ |

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & l_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & c_n & \cdots & l_n \end{vmatrix}$$

| ا۱ ب۱ ج۱ .... ل۱ |
| ا۲ ب۲ ج۲ .... ل۲ |
| .... |
| ان بن جن .... لن |

$$(a_1 b_2 c_3 \ldots l_n)$$ (ا۱ ب۲ ج۳ .... لن)

$$\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 \ldots l_n$$ Σ ± ا۱ ب۲ ج۳ ... لن

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + \cdots$$ ا۱ آ۱ + ا۲ آ۲ + ...

$$a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1 + \cdots$$ ا۱ آ۱ + ب۱ بَ۱ + ج۱ جَ۱ + ...

$$A_1 = \Sigma \pm b_2 c_3 \cdots l_n = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & \cdots & l_2 \\ b_3 & c_3 & \cdots & l_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & c_n & \cdots & l_n \end{vmatrix} = \Delta_{a_1}$$

$$\text{ا}_1 = \sum \pm \text{ب}_2 \text{ج}_3 \cdots \text{ل}_\text{ن} = \begin{vmatrix} \text{ب}_2 & \text{ج}_2 & \cdots & \text{ل}_2 \\ \text{ب}_3 & \text{ج}_3 & \cdots & \text{ل}_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{ب}_\text{ن} & \text{ج}_\text{ن} & \cdots & \text{ل}_\text{ن} \end{vmatrix} = \Delta_{\text{ا}_1}$$

$\text{ا}_2 = -\Delta_{\text{ا}_2},\ \text{ا}_3 = \Delta_{\text{ا}_3},\ \ldots$	$A_2 = -\Delta_{a_2},\ A_3 = \Delta_{a_3},\ \ldots$
$\left\{\begin{matrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 & \text{د}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 & \text{د}_2 \end{matrix}\right.$	$\left.\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{matrix}\right\}$
$\left\{\begin{matrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 \\ \text{ا}_4 & \text{ب}_4 \end{matrix}\right.$	$\left.\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{matrix}\right\}$
گروہ :	Group.
$\begin{pmatrix} \text{لا}_1 & \text{لا}_2 & \text{لا}_3 & \cdots & \text{لا}_\text{ن} \\ \text{لا}_\text{ع} & \text{لا}_\text{ب} & \text{لا}_\text{ج} & \cdots & \text{لا}_\text{ل} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_\alpha & x_\beta & x_\gamma & \cdots & x_\lambda \end{pmatrix}$
$\text{ج}_1 \text{ج}_2 \text{ج}_3 \cdots \text{ج}_\text{ژ}$	$C_1 C_2 C_3 \cdots C_j$

ب ـ م
جلد ۲

۵۱۰

مساوات کا نظریہ

۲۲/۱۱

کتب خانہ
جامعہ عثمانیہ

۱۔ اراکین مجلس اعلیٰ، مجلس تعلیمی، مجلس انتظامی ... بیک وقت ... کتابیں لے سکتے ہیں۔

۲۔ اساتذہ جامعہ عثمانیہ و کلیات ... پانچ کتابیں ایک ماہ کے لیے ... لے سکیں گے۔

۳۔ طلبائے جامعہ عثمانیہ ... دو کتابیں ... لے سکیں گے۔

۴۔ ... کتابیں ایک ہفتہ سے زیادہ نہیں رکھی جائیں گی۔

۵۔ ہر ایک کتاب ... واپس کرنا ہوگا۔

۶۔ کتابیں اگر خراب ہو جائیں تو ... ذمہ دار ہوں گے۔

۷۔ کتابوں پر کسی قسم کا نشان یا ... نہ لگایا جائے۔

۸۔ قلمی نسخے اور حوالے کی کتابیں جاری نہ کی جائیں گی۔ فقط

۱۲